الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر العلمي ف1 طبعة 2023

الوحدة الأولى: التفاضل

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد المشتقة باستعمال التعريف العام صفحة 6	
1	$f(x)=3x-8$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-8-3x+8}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h}=3$
2	$f(x)=4x^3+3x$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x+h)^3+3(x+h)-4x^3-3x}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+3x+3h-4x^3-3x}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3+3x+3h-4x^3-3x}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12x^2h+12xh^2+4h^3+3h}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}(12x^2+12xh+4h^2+3)$ $=12x^2+3$

3	$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2-4}-\frac{1}{x^2-4}}{h}$ $=\lim\limits_{h\to0}\frac{x^2-4-(x+h)^2+4}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to0}\frac{(x-x-h)(x+x+h)}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to0}\frac{-h(2x+h)}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to0}\frac{-(2x+h)}{(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$
مشتقة اقتران القوة صفحة 6	
4	$f'(x)=21x^2$
5	$f'(x)=16x^{\frac{1}{3}}$
6	$f'(x)=6x-\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}=6x-\frac{5}{2\sqrt{x}}$
7	$f(x)=-3x^{-7}\Rightarrow f'(x)=21x^{-8}=\frac{21}{x^8}$
8	$f(x)=x^5-2x^3\Rightarrow f'(x)=5x^4-6x^2$
9	$y=7x^{-3}+3x^{-1}-2$ $\frac{dy}{dx}=-21x^{-4}-3x^{-2}=-\frac{21}{x^4}-\frac{3}{x^2}$
مشتقة الاقتران $y=(ax+b)^n$ صفحة 7	
10	$\frac{dy}{dx}=6(2x-3)^5(2)=12(2x-3)^5$
11	$y=(9-3x)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(9-3x)^{-\frac{1}{2}}(-3)=-\frac{3}{2\sqrt{9-3x}}$
12	$y=(4x+1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{3}{2}}(4)=-\frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}$

	إيجاد معادلة المماس عند نقطة ما صفحة 8
13	$f'(x) = 2(3x+2)(3) = 18x + 12$ ميل المماس: $f'(-1) = 18(-1) + 12 = -6$ معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -6(x+1)$ $\Rightarrow y = -6x - 5$
14	بما أن ميل المماس هو -6 إذن ميل العمودي هو $\frac{1}{6}$ معادلة العمودي على المماس: $y - 1 = \frac{1}{6}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$

الدرس الأول: الاشتقاق

1	f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل، و f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لانه غير متصل عندهما، والاتصال شرط ضروري.
2	$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$
3	$f(x) = 2e^x + x^{-2}$ $f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \frac{2}{x^3}$
4	$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$
5	$f(x) = 2e^x + x \quad , \quad x = 2$ $f(2) = 2e^2 + 2$ $f'(x) = 2e^x + 1$ ميل المماس: $f'(2) = 2e^2 + 1$ معادلة المماس: $y - 2e^2 - 2 = (2e^2 + 1)(x - 2)$ $y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$
6	$f'(x) = 3 + \cos x$ عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$ $3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$ وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f.
7	$s(t) = 3t^2 - t^3 \ , t \geq 0$ السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$ التسارع: $a(t) = 6 - 6t$

8	يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ $v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2-t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$ $s(0) = 0, \quad s(2) = 12 - 8 = 4$ إذن يكون الجسيم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0\text{ m}, \ s = 4\text{ m}$
9	$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x \quad , x = e^2$ $f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \quad \Rightarrow (e^2, 4)$ $f'(x) = \frac{2}{x}$ ميل المماس: $f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$ معادلة المماس: $y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$
10	ميل المستقيم الذي معادلته $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3 $f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
11	$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$ $f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2$
12	نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = 2$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$ معادلة المماس: $y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

1	$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$
2	$f'(x)=\csc x\cot x-\cos x$
3	$f(x)=\dfrac{x^2+cx}{x^2+c}\ ,x\neq 0$ $f'(x)=\dfrac{(2x+c)(x^2+c)-2x(x^2+cx)}{(x^2+c)^2}=\dfrac{2cx-cx^2+c^2}{(x^2+c)^2}\ ,x\neq 0$
4	$f'(x)=-x\csc^2 x+\cot x$
5	$f'(x)=4-x^2\sec^2 x-2x\tan x$
6	$f'(x)=\dfrac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}=\dfrac{-x\sin x-2\cos x}{x^3}$
7	$f(x)=x-\dfrac{4x}{x+3}$ $f'(x)=1-\dfrac{4(x+3)-4x}{(x+3)^2}=1-\dfrac{12}{(x+3)^2}$
8	$f'(x)=\dfrac{-6\cos^2 x-(3-3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}=\dfrac{-6+6\sin x}{4\cos^2 x}$
9	$f'(x)=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x$
10	$f'(x)=-x^2\sin x+2x\cos x$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}$ معادلة المماس: $y-0=-\frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-\frac{\pi^2}{4}x+\frac{\pi^3}{8}$
11	$f'(x)=\dfrac{(\cos x)(\cos x)+\sin x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ ميل المماس: $f'(\pi)=\frac{1}{1}=1$ معادلة المماس: $y+1=1(x-\pi)\Rightarrow y=x-\pi-1$
12	$f'(x)=\dfrac{2x^2-4x^2+2x}{x^4}=\dfrac{-2x+2}{x^3}=0\ \Rightarrow x=1$ النقطة المطلوبة هي: $(1,f(1))=(1,1)$

13	$h'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\ \Rightarrow x=0$ النقطة المطلوبة هي: $(0,h(0))=(0,0)$
14	$g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$ $g'(x)=\frac{8e^x-8e^x(x-2)}{e^{2x}}=\frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}}=\frac{8(3-x)}{e^x}=0\ \Rightarrow x=3$ النقطة المطلوبة هي: $(3,g(3))=\left(3,\frac{8}{e^3}\right)$
15	$u'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times 1+3\times\frac{1}{3}=3$
16	$v'(4)=\frac{g(4)f'(4)-f(4)g'(4)}{\left(g(4)\right)^2}=\frac{2\times\frac{1}{3}-3\times 1}{(2)^2}=-\frac{7}{12}$
17	$f'(x)=x\sec x\tan x+\sec x=\sec x\,(1+x\tan x)$
18	$f'(x)=\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}$ $f''(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{x^2\times\frac{1}{x}-2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$
19	$a(t)=\frac{-20}{(2t+15)^2}$ $a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}=-0.032\ \text{ft/s}^2$
20	$a(20)=\frac{-20}{(40+15)^2}\approx -0.007\ \text{ft/s}^2$
21	$A=\sqrt{t}(6t+5)=6t^{\frac{3}{2}}+5t^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dA}{dt}=9t^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}}=9\sqrt{t}+\frac{5}{2\sqrt{t}}\ \ \text{cm}^2/\text{s}$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

1	$f'(x) = -10e^{-0.1x}$
2	$f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$
3	$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$
4	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$
5	$f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2} = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$ $f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2(x-1)\ln 3}$
6	$f(x) = 2(\cot(\pi x+2))^2$ $f'(x) = -4\pi\cot(\pi x+2)\csc^2(\pi x+2)$
7	$f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$
8	$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$
9	$f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3+2} \times \frac{2x(x^3+2)-3x^4}{(x^3+2)^2}$ $= \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^2} = \frac{8x^3-2x^6}{(x^3+2)^3}$
10	$f'(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$ $= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$
11	$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$ $= \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$
12	$f'(x) = -(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$

13	$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$ معادلة المماس: $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$
14	$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$ ميل المماس: $f'(-1) = -54$ $x = -1 \ \Rightarrow y = f(-1) = 27$ معادلة المماس: $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$
15	$f'(x) = 3\sec^2 3x$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ معادلة المماس: $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$
16	$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$ $= 3\cos x\,(1 - \sin^2 x)$ $= 3\cos x\,(\cos^2 x)$ $= 3\cos^3 x$
17	$f''(x) = -9\cos^2 x\sin x$

<table>
<tr><td>18</td><td>

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}} \ , \qquad y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

معادلة المماس: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$

$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$$

</td></tr>
<tr><td>19</td><td>

$$y = e^{ax}$$
$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = 1 \rightarrow e^{ax} = \frac{1}{a}$$
$$\Rightarrow ax = \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
$$\Rightarrow x = \frac{-\ln a}{a}$$
$$\Rightarrow y = e^{a\left(\frac{-\ln a}{a}\right)} = e^{-\ln a} = (e^{\ln a})^{-1} = \frac{1}{a}$$

إذن، النقطة المطلوبة هي: $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

</td></tr>
<tr><td>20</td><td>

ميل العمودي على المماس عند النقطة P يساوي 1-

معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right) \Rightarrow y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow k = \frac{1 - \ln a}{a}$$

</td></tr>
<tr><td>21</td><td>

$$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)} = (4 + 3f(x))^{\frac{1}{2}}$$
$$h'(x) = \frac{1}{2}(3f'(x))(4 + 3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$$
$$h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}} = \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

</td></tr>
<tr><td>22</td><td>

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$
$$f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$$

</td></tr>
</table>

23	$f'(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$ $f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$ $= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$ $f''(x) + 16f(x) = 0$
24	$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$ $\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$
25	$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \rightarrow -\sec\theta = \sqrt{2} \rightarrow \sec\theta = -\sqrt{2} \rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ عندما $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$، فإن: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, y = 2\cos\theta = 2 \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}$
26	$\frac{dy}{dx} = -\sec\theta = -\frac{1}{\cos\theta}$ يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos\theta = 0$ وعندها يكون: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0 = 1 , y = 2\cos\theta = 2 \times 0 = 0$ فالنقطة المطلوبة هي: $(1, 0)$
27	$a(t) = -1.5t^2 e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$ $a(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$ $v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}$ m/s
28	$f(u) = u^5 + 1 \Rightarrow f'(u) = 5u^4$ $u = g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
29	$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2\sec^2 u \tan u$ $u = g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi$ $(fog)'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi = 5\pi$

30	$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t\,,\ \frac{dx}{dt} = 10\cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t \quad , -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
31	يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا، إذن: $10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4، إذن: $2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$
32	$\frac{dy}{dt} = -3\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}\ , 0 \le t \le 2\pi$ $(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2\sin 2t\,, 3\cos t) = (0, 0) \Rightarrow \sin 2t = 0$ و $\cos t = 0$ $\sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ $\cos t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

1	$3x^3y^2\dfrac{dy}{dx}+3x^2y^3=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$
2	$x\dfrac{dy}{dx}+y=\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)\cos(x+y)$ $\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx}-\cos(x+y)\dfrac{dy}{dx}=-y+\cos(x+y)\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y+\cos(x+y)}{x-\cos(x+y)}$
3	$4y^3\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=10\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10}{4y^3-2y}=\dfrac{5}{2y^3-y}$
4	$x\cos y\dfrac{dy}{dx}+\sin y+y\sin x-\cos x\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin y+y\sin x}{\cos x-x\cos y}$
5	$-\csc^2 y\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-\csc^2 y}=\dfrac{-1}{\cot^2 y}=-\tan^2 y$
6	$\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}+y}{2\sqrt{xy}}+1+2y\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx}+y+2\sqrt{xy}+4y\sqrt{xy}\dfrac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+2\sqrt{xy}}{x+4y\sqrt{xy}}$
7	$2x+3x\dfrac{dy}{dx}+3y+2y\dfrac{dy}{dx}=1+3\dfrac{dy}{dx}$ نعوض $(x,y)=(2,-1)$ $\Rightarrow 4+6\dfrac{dy}{dx}-3-2\dfrac{dy}{dx}=1+3\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=0$ معادلة المماس: $y+1=0(x-2)\Rightarrow y=-1$
8	$xe^y\dfrac{dy}{dx}+e^y+\dfrac{y}{x}+\ln x\dfrac{dy}{dx}=0$ نعوض $(x,y)=(1,\ln 2)$ $e^{\ln 2}\dfrac{dy}{dx}+e^{\ln 2}+\ln 2+0=0$ $2\dfrac{dy}{dx}+2+\ln 2=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-1-\dfrac{1}{2}\ln 2$ معادلة المماس: $y-\ln 2=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)(x-1)$ $y=\left(-1-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)x+1+\dfrac{3}{2}\ln 2$

9	$4x\frac{dy}{dx}+4y=0$ نعوض $(x,y)\ =\ (1,\frac{9}{4})$ $4\frac{dy}{dx}+9=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$ معادلة المماس: $y-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{9}{2}$
10	$x+\frac{1}{4}y\frac{dy}{dx}=0$ نعوض $(x,y)\ =\ (1,2\ )$ $1+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-2$ معادلة المماس: $y-2=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+4$
11	$x^2\frac{dy}{dx}+2xy-4=0\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4-2xy}{x^2}=4x^{-2}-2yx^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=-8x^{-3}+2yx^{-2}-2x^{-1}\frac{dy}{dx}$ $=-8x^{-3}+2yx^{-2}-2x^{-1}(4x^{-2}-2yx^{-1})$ $=-16x^{-3}+6yx^{-2}=-\frac{16}{x^3}+\frac{6y}{x^2}$
12	$2x+2y\frac{dy}{dx}=0\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-xy^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=xy^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}$ $=xy^{-2}(-xy^{-1})-y^{-1}$ $=-x^2y^{-3}-y^{-1}$ $=-\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{8}{y^3}$

13	$2y\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2}{2y}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{12xy-6x^2\dfrac{dy}{dx}}{4y^2}=\dfrac{12xy-6x^2\times\dfrac{3x^2}{2y}}{4y^2}=\dfrac{12xy^2-9x^4}{4y^3}$
14	$y=(x)^{x^2}\quad\Rightarrow \ln y=\ln(x)^{x^2}$ $\Rightarrow \ln y=x^2\ln x$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=x^2\times\dfrac{1}{x}+2x\ln x$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=xy+2xy\ln x$ $x=2\ \Rightarrow y=(2)^{2^2}=16\quad\Rightarrow (2,16)$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=2}=2\times16+2\times2\times16\ln2=32+64\ln2$:ميل المماس $y-16=(32+64\ln2)(x-2)$:معادلة المماس
15	$3(x+y)^2\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=2x+\dfrac{dy}{dx}$ نعوض $(x,y)\ =\ (1,0\ )$ $3\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=2+\dfrac{dy}{dx}\ \Rightarrow 3+3\dfrac{dy}{dx}=2+\dfrac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$:ميل المماس بما أن ميل المماس هو $-\frac{1}{2}$، فإن ميل العمودي على المماس هو 2 $y-0=2(x-1)\ \Rightarrow y=2x-2$:معادلة العمودي على المماس

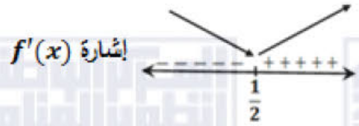
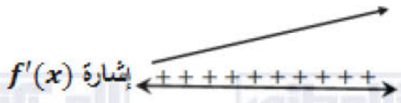
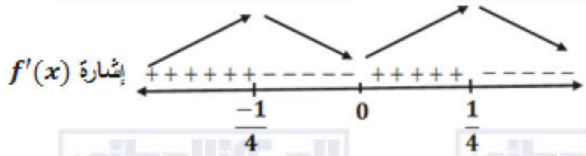
16	$y = x(\ln x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x(\ln x)^x)$ $\Rightarrow \ln y = \ln x + x\ln(\ln x)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = \dfrac{1}{x} + x \times \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \ln(\ln x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{\ln x} + y\ln(\ln x)$ $x = e \Rightarrow y = e(\ln e)^e = e \Rightarrow (e, e)$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=e} = \frac{e}{e} + \frac{e}{1} + 0 = 1 + e$ معادلة المماس: $y - e = (1+e)(x-e) \Rightarrow y = (1+e)x - e^2$
17	$y = (x-2)^{x+1} \Rightarrow \ln y = (x+1)\ln(x-2)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x+1) \times \dfrac{1}{x-2} + \ln(x-2)$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x+1)}{x-2} + y\ln(x-2)$ $= \dfrac{(x-2)^{x+1}(x+1)}{x-2} + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$ $= (x-2)^x(x+1) + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$
18	$y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}} \Rightarrow \ln y = 10\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+5) - \dfrac{1}{3}\ln(8x^2+2)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = \dfrac{10}{x} + \dfrac{x}{x^2+5} - \dfrac{16x}{3(8x^2+2)}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}\left(\dfrac{10}{x} + \dfrac{x}{x^2+5} - \dfrac{16x}{3(8x^2+2)}\right)$

19	$y=(\cos x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\cos x)$ $\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x \times \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln(\cos x))$
20	نفرض أن النقطة المطلوبة هي $P\ (x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى. نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x فينتج أنّ: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y} = -\frac{9x}{4y}$ ميل المماس عند P هو : $-\frac{9x_1}{4y_1}$ لكن ميل المماس يساوي -0.5 إذن، $-\frac{9x_1}{4y_1} = -0.5 \Rightarrow 2y_1 = 9x_1$ وبضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أنّ: $4y^2 + 9x^2 = 36$ وبتعويض إحداثيي P نجد أنّ: $4{y_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36$ $\Rightarrow 81{x_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36 \Rightarrow 90{x_1}^2 = 36 \Rightarrow {x_1}^2 = 0.4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{0.4}$ $\Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}\sqrt{0.4} = \sqrt{8.1}$ النقطة المطلوبة هي: $P\ (\sqrt{0.4}, \sqrt{8.1})$
21	$x^2 + xy + y^2 = 7$ $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow P_1 = (\sqrt{7}, 0), P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$ $x^2 + xy + y^2 = 7 \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{P_1} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2 \quad , \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{P_2} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2$ ميلا المماسين متساويان، إذن هذان المماسان متوازيان.

الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

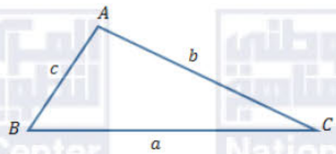
أستعد لدراسة الوحدة

	حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام صفحة 14
1	$24^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \times 12 \times 15 \cos x$ $\cos x = \dfrac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15} = \dfrac{-207}{360} \Rightarrow x \approx 2.18 \text{ rad} \approx 125.1^\circ$
2	$x^2 = 32^2 + 45^2 - 2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ \Rightarrow x \approx 27.37$
3	$x^2 = 15^2 + 22^2 - 2 \times 15 \times 22 \cos 102^\circ \Rightarrow x \approx 29.1$
	حل المعادلات المثلثية صفحة 14
4	$\tan 2x + 1 = 0 \Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}$ $\Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}$
5	$2\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\,(2\sin x + 1) = 0$ $\Rightarrow \sin x = 0 \; or \; \sin x = -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow x = 0, \pi, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$
6	$1 - \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

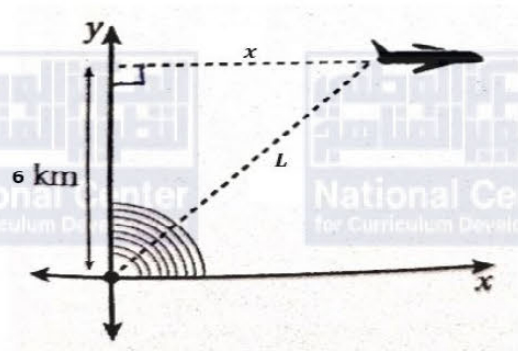
	تحديد فترات التزايد وفترات التناقص صفحة 15
7	$f'(x) = 12x - 6$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$  الاقتران متناقص في $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ومتزايد في $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
8	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ $\Delta = 36 - 48 = -12 < 0$  ليس للمشتقة أصفار وإشارتها مماثلة لإشارة معامل x^2 لجميع الأعداد الحقيقية، أي أنّ: $f'(x) > 0$ فالاقتران متزايد على $\mathbb{R}$
9	$f(x) = x^2 - 8x^4$ $f'(x) = 2x - 32x^3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(1 - 16x^2) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = \pm\frac{1}{4}$  الاقتران f متزايد على $\left(-\infty, \frac{-1}{4}\right)$، و $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. الاقتران f متناقص على $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ ، و $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

الدرس الأول: المعدلات المرتبطة

1	المعطى: $\frac{dV}{dt} = 8$ المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $\rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=12} = 576\pi \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12} = 8 \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12} = \frac{8}{576\pi} = \frac{1}{72\pi}$ cm/s
2	المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{V=36\pi}$ عندما يكون الحجم 36π، يكون: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=3} = 4\pi r^2 \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3}$ $8 = 4\pi \times 9 \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3} = \frac{8}{36\pi} = \frac{2}{9\pi}$ cm/s
3	$t = 33.5 \Rightarrow V = 8 \times 33.5 = 268$ cm^3 عندما يكون الحجم 268 cm^3 يكون طول نصف القطر $\sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}} \approx 4$ cm $\Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=4} = 64\pi \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=4} = 8 \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=4} = \frac{8}{64\pi} = \frac{1}{8\pi} \approx 0.04$ cm/s

4	$V = IR$ $\frac{dV}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}$ المعطى: $\frac{dV}{dt} = 1, \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}$ المطلوب: $\frac{dR}{dt}$ عندما $I = 2, V = 12$ عندما $I = 2, V = 12$، فإن $R = 6$، بالتعويض في المعادلة أعلاه ينتج أنّ: $1 = 2\frac{dR}{dt} + 6(-\frac{1}{3}) \Rightarrow \frac{dR}{dt} = 1.5\ \Omega/s$
5	معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.  $A = \frac{1}{2}ab\sin C$ فإذا كان $a = b = s, C = \theta$، فإنّ: $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$
6	المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$ و المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$ ، حيث s ثابت $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$ $\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}s^2 (\cos\frac{\pi}{6})\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$
7	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 3$ و المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=20}$ $y = \frac{10}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=20} = \frac{-1200}{(401)^2} \approx -0.007 cm/s$

المعطى: $\frac{dL}{dt} = 300$ و المطلوب : $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L=10}$



8

$$L^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x = \sqrt{L^2 - 36}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{L\frac{dL}{dt}}{\sqrt{L^2 - 36}}$$

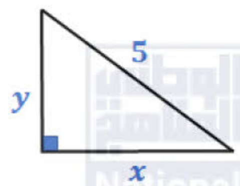
$$\Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{L=10} = \frac{10 \times 300}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{3000}{\sqrt{64}}$$

$$= 375 \text{ km/h}$$

ملاحظة هامة: يرجى تصحيح الجملة الثانية من السؤال بحيث تصبح كما يأتي:

(إذا افترضْتُ أن طرف اللوح غير المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًا على جدار المبنى.)

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو x، وأن بعد الطرف العلوي عن الأرض هو y.



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 0.15 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$

9

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

عندما $x = 3$، يكون:

$$y^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{4(0.15)}{3} = -0.2 \text{ m/s}$$

إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة 0.2 m/s نحو اليسار مقتربًا من الجدار.

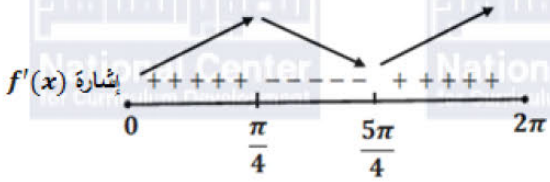
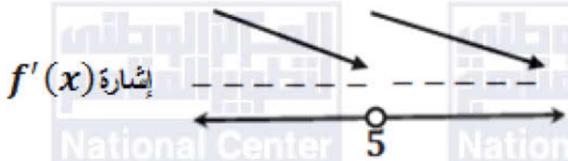
10	$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$
11	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 4$ المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4}$ $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$ $= 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$ $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4} = 2e^{-\frac{(4)^2}{2}}(1 - (4)^2)(4)$ $= -120e^{-8}\ \mathrm{cm^2/min}$

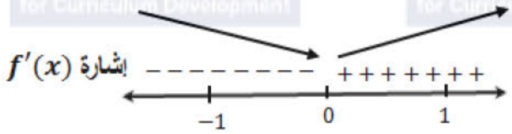
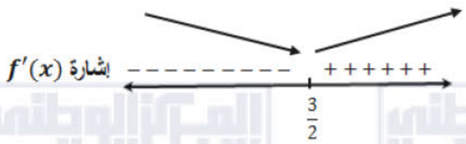
الدرس الثاني: القيم القصوى والتقعر

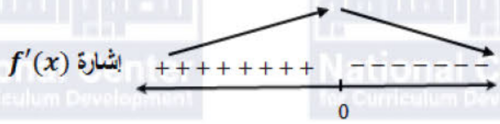
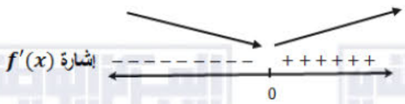
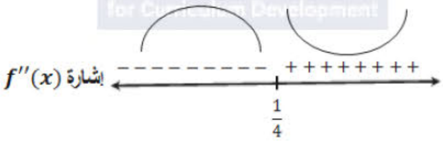
1	القيم الحرجة هي: $x = -2 , x = 2$ لأن المشتقة الأولى غير موجودة عند كل منها، و كذلك $x = 0$ لأن المشتقة الأولى تساوي صفرًا عندها للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(0) = 2$ ، وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي: $f(-2) = f(2) = 0$
2	$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ يوجد قيمة حرجة وحيدة في الفترة $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ هي $x = \frac{\pi}{2}$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$ $f(\pi) = 1 + \cos^2 \pi = 2$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f(\pi) = 2$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
3	$f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$ يوجد قيمتان حرجتان في الفترة $(-2, 3)$ هما $x = 0 , x = 2$ نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال $f(-2) = 0$ $f(0) = -64$ $f(2) = 0$ $f(3) = 125$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f(3) = 125$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f(0) = -64$

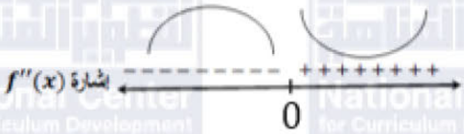
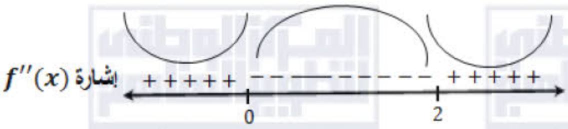
4	$f'(x) = 1 - 2\cos x$ $f'(x) = 0 \ \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{3}, x = -\frac{5\pi}{3}$ نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال $f(-2\pi) = -2\pi \approx -6.28$ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 0.68$ $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -6.97$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.68$ $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.97$ $f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx 6.97$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \approx -6.97$
5	$f'(x) = \frac{x}{x+3} + \ln(x+3)$ بدراسة إشارة كل من $\frac{x}{x+3}$ و $\ln(x+3)$ نجد أن $\frac{x}{x+3} + \ln(x+3) > 0$ مما يعني أن $f'(x) \neq 0$ ، لذا نبحث عن قيم يكون عندها $f'(x)$ غير موجودة في الفترة المعطاة $\frac{x}{x+3}$ غير معرف عندما $x = -3$ ، $\ln(x+3)$ غير معرف عندما $x < -3$ وهما خارج مجال الاقتران، وبما أن $f'(x) > 0$ ، والاقتران متصل في مجاله، فإنه يأخذ القيم القصوى عند طرفي مجاله. نقارن قيمتي الاقتران عند $x = 0, x = 3$ $f(0) = 0$ $f(3) = 3\ln 6$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f(3) = 3\ln 6$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f(0) = 0$

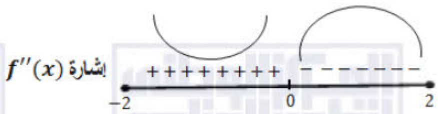
6	$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ $f'(x)$ غير موجودة عندما $x = 0$ والاقتران غير معرف عندها فلا تعد قيمة حرجة. إذن القيمة الحرجة الوحيدة في الفترة (-8, -1) هي: $x = -2$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال. $f(-8) = -8 - \frac{1}{2} = -8.5$ $f(-2) = -2 - 2 = -4$ $f(-1) = -1 - 4 = -5$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f(-2) = -4$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f(-8) = -8.5$
7	$f'(x) = 5e^x - 2e^{2x}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(5 - 2e^x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{5}{2} \to x = \ln\frac{5}{2}$ إذن القيمة الحرجة الوحيدة في مجاله هي: $x = \ln\frac{5}{2}$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال. $f(-1) = 5e^{-1} - e^{-2} = \frac{5}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 1.70$ $f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = 5e^{\ln\frac{5}{2}} - e^{2\ln\frac{5}{2}} = 5e^{\ln\frac{5}{2}} - e^{\ln\frac{25}{4}} = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$ $f(2) = 5e^2 - e^4 \approx -17.65$ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي: $f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي: $f(2) = 5e^2 - e^4 \approx -17.65$

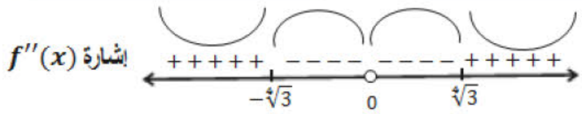
8	$f'(x) = \cos x - \sin x$ $f'(x) = 0 \;\Rightarrow \tan x = 1 \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$  للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ وله قيمة صغرى محلية هي: $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ الاقتران f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ، و $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ الاقتران f متناقص على $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
9	$f'(x) = \frac{x - 5 - x}{(x-5)^2} = \frac{-5}{(x-5)^2}$ $f'(x) \neq 0$ وإشارتها سالبة لجميع الأعداد الحقيقية في مجال الاقتران لأن البسط سالب والمقام موجب ، $f'(x)$ غير موجودة عندما $x = 5$ و f غير معرف عندها  الاقتران f متناقص على $(5, \infty)$ ، و$(-\infty, 5)$ ولا يوجد له قيم قصوى.

10	$f'(x) = \frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $f'(x)$ غير موجودة عندما $x = \pm 1$ إذن القيم الحرجة هي: $x = 0, x = \pm 1$  للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0) = -1$ الاقتران f متزايد على $(0, \infty)$ و متناقص على $(-\infty, 0)$
11	مجال f هو R لأن العبارة $(x^2 - 3x + 4)$ مميزها سالب، وإشارتها موجبة لكل عدد حقيقي x $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ إذن القيمة الحرجة هي: $x = \frac{3}{2}$  للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\frac{7}{4}$ الاقتران f متزايد على $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ و متناقص على $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

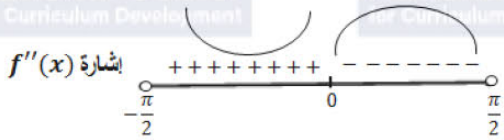
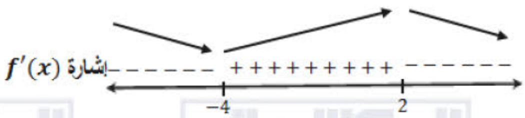
12	$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ $f'(x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$ إذن القيمة الحرجة هي: $x = 0$  للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(0) = 1$ الاقتران f متزايد على $(-\infty, 0)$ و متناقص على $(0, \infty)$
13	$f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2-3}$ $f'(x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$ إذن القيمة الحرجة هي: $x = 0$  للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0) = \frac{1}{8}$ الاقتران f متزايد على $(0, \infty)$ و متناقص على $(-\infty, 0)$
14	$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$ $f''(x) = 24x - 6$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$  الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ وله نقطة انعطاف هي: $\left(\frac{1}{4}, \frac{83}{8}\right)$

15	$f'(x) = 3x^2 - 3$ $f''(x) = 6x$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  الاقتران f مقعر للأعلى في $(0,\infty)$ ، ومقعر للأسفل في $(-\infty,0)$ وله نقطة انعطاف هي: $(0,0)$
16	$f'(x) = (4-4x)(2+2x-x^2)$ $f''(x) = -4(2+2x-x^2) + (4-4x)(2-2x) = 12x^2 - 24x$ $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$  الاقتران f مقعر للأعلى في $(2,\infty)$ و $(-\infty,0)$ ومقعر للأسفل في $(0,2)$ وله نقطتا انعطاف هما: $(2,4),(0,4)$

<table>
<tr>
<td>17</td>
<td>
$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{4-x^2} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{4-x^2} - (4-2x^2)\times\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-12x+2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$
$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2-6) = 0 \to x = 0, x = \pm\sqrt{6}$
مجال هذا الاقتران هو [-2, 2]، فالعددان $\pm\sqrt{6}$ خارج مجاله.


الاقتران f مقعر للأعلى في $(-2, 0)$ ومقعر للأسفل في $(0, 2)$
وله نقطة انعطاف هي: $(0, 0)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>18</td>
<td>
$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$
$f''(x) = 2 - \frac{6}{x^4}$
$f''(x) = 0 \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$


الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\infty, -\sqrt[4]{3})$ و $(\sqrt[4]{3}, \infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\sqrt[4]{3}, 0)$ و $(0, \sqrt[4]{3})$
و له نقطتا انعطاف هما: $(-\sqrt[4]{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ ، و $(\sqrt[4]{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$
</td>
</tr>
</table>

19	$f'(x) = 2 - \sec^2 x$ $f''(x) = -2\sec^2 x \tan x = -\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $f''(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = 0$ $f''(x)$ غير موجودة عندما $\cos x = 0$ ، لكن $\cos x \neq 0$ في الفترة المحددة بالسؤال  الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ وله نقطة انعطاف هي $(0, 0)$
20	 للاقتران قيمة صغرى محلية عند: $x = -4$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند: $x = 2$
21	الاقتران f متزايد على $(-4, 2)$ و متناقص على $(-\infty, -4)$ و $(2, \infty)$

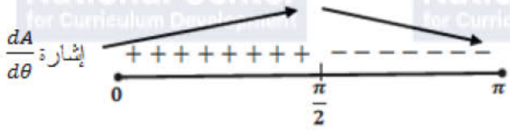
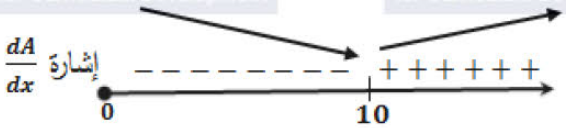
22	$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x\cos x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$ $\Rightarrow \cos x = 0 \;\; or \;\; \sin x = \frac{1}{2}$ $\to x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ إذن القيمة الحرجة هي: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ $f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$ $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 4 = 2 > 0$ $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + 4 > 0$ $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 2 < 0$ $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1 - 2 < 0$ للاقتران قيم صغرى محلية هي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 , f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$
23	$f(x) = x^3 + \frac{48}{x} \quad , x \neq 0$ $f'(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^4 - 48}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$ إذن القيم الحرجة هي: $x = \pm 2$ $f''(x) = 6x + \frac{96}{x^3}$ $f''(-2) = -12 - 12 < 0$ $f''(2) = 12 + 12 > 0$ للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(2) = 32$ للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(-2) = -32$

24	$f'(x)=(x^2-3)e^x+2xe^x=e^x(x^2+2x-3)$ $f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x+3)=0 \Rightarrow x=1, x=-3$ إذن القيم الحرجة هي: $x=1, x=-3$ $f''(x)=e^x(2x+2)+e^x(x^2+2x-3)=e^x(x^2+4x-1)$ $f''(-3)=\dfrac{-4}{e^3}<0$ $f''(1)=4e>0$ للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(1)=-2e$ للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(-3)=\frac{6}{e^3}$
25	$f'(x)=2ax+b$ عند النقطة $(3,12)$ توجد قيمة عظمى محلية، إذن هي نقطة حرجة، ومنه $f'(3)=0$ $f'(3)=6a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$ $f(0)=1 \quad \Rightarrow c=1$ $f(3)=9a+3b+c=12 \quad \Rightarrow 9a+3b=11 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$ بطرح المعادلة (2) من ناتج ضرب المعادلة (1) في 3 نجد أنّ: $9a=-11 \rightarrow a=-\dfrac{11}{9} \quad , b=\dfrac{22}{3}$
26	يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t)=0$ ، أي عندما يوجد مماس أفقي لمنحنى $s(t)$ نلاحظ من الشكل أنه يوجد مماس أفقي عندما $t=3$ s
27	يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t)>0$ أي $s'(t)>0$ ، وهذا يتحقق عندما يكون $s(t)$ متزايدًا أي في الفترة $(1,3)$، ويتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما يكون $s(t)$ متناقصًا أي في الفترة $(3,5)$
28	تتزايد $v(t)$ عندما يكون $a(t)=s''(t)>0$ ، وهذا يحصل عندما يكون منحنى s مقعرًا للأعلى، لكن حسب الشكل فإن منحنى s مقعر للأسفل على مجاله، إذن سرعة الجسم لا تتزايد أبدًا، بل تتناقص على $(1,5)$

29	$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ $f(0) = -9 \quad \Rightarrow d = -9$ $f'(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$ $f(-2) = -73 \quad \Rightarrow 48 - 8a + 4b - 9 = -73 \Rightarrow \; -2a + b = -28 \ldots (1)$ $f'(-2) = 0 \quad \Rightarrow -96 + 12a - 4b = 0 \quad \Rightarrow 3a - b = 24 \ldots\ldots\ldots (2)$ بجمع المعادلتين نجد أنّ: $a = -4 \;, b = -36$
30	$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$ $f'(x) = 0 \;\Rightarrow 12x(x^2 - x - 6) = 0$ $\Rightarrow 12x(x-3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 3, x = -2$ النقطة الثالثة على منحنى الاقتران التي لها مماس أفقي هي $(3, -198)$
31	$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$ $f''(-2) = 120 > 0$ $f''(0) = -72 < 0$ $f''(3) = 180 > 0$ إذن النقطة $(-2, -73)$ هي نقطة قيمة صغرى محلية والنقطة $(0, -9)$ هي نقطة قيمة عظمى محلية والنقطة $(3, -198)$ هي نقطة قيمة صغرى محلية
32	يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ ، أي عندما $t = 5\ s$
33	يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ أي في الفترة $(5, 12)$ ، ويتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما يكون $v(t) < 0$ أي في الفترة $(0, 5)$
34	كما هو واضح من الشكل فإن $v(t)$ تتزايد دومًا على الفترة $(0, 12)$

35	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ $f''(x) = 6ax + 2b$ $f(2) = 11 \quad \Rightarrow 8a + 4b + c = 11 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$ $f'(2) = 0 \quad \Rightarrow 12a + 4b = 0 \ \Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots..(2)$ $f(1) = 5 \quad \Rightarrow a + b + c = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$ $f''(1) = 0 \quad \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots(2)$ بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أنّ: $7a + 3b = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ بطرح 3 أمثال المعادلة (2) من المعادلة (4) نجد أنّ: $-2a = 6 \ \Rightarrow a = -3$ وبتعويض قيمة a في المعادلة (2) نجد أن: $b = 9$ وبتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن: $c = -1$

الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

1	$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta \quad , 0 < \theta < \pi$ $\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta$ $\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  إذن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$
2	ليكن x طول ضلع القاعدة المربعة، h ارتفاع الخزان، A مساحة سطحه، V حجمه. $V = x^2h = 500 \rightarrow h = \frac{500}{x^2}$ $A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$ $\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2000}{x^2}$ $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x = 10$  إذن تكون مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي: $x = 10\text{ m}, h = 5\text{ m}$
3	ليكن الزمن اللازم للوصول من A إلى D هو T_{AD}، والزمن اللازم للوصول من D إلى C هو T_{DC}، فإن الزمن الكلي $T(x)$ هو: $T(x) = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200 - x}{10} + \frac{\sqrt{x^2 + 6400}}{6}$

4

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$$

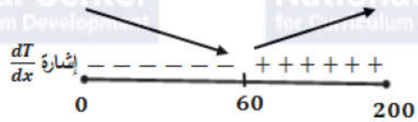
$$\frac{dT}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+6400}$$

$$\Rightarrow 25\,x^2 = 9(x^2+6400)$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9(6400)$$

$$\Rightarrow x = 60 \text{ m}$$



إذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي: $x = 60$ m

5

لتكن A مجموع مساحتي الدائرة والمربع، r طول نصف قطر الدائرة

ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة x cm، فإن:

$$x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

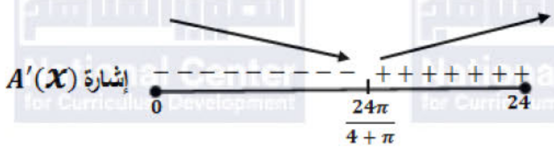
$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-x}{4}\right)^2$$

$$A'(x) = 2\pi\frac{x}{2\pi}\times\frac{1}{2\pi} + 2\left(6-\frac{1}{4}x\right)\times -\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}x - 3 + \frac{1}{8}x$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}\right)x - 3$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}} = \frac{24\pi}{4+\pi}$$



إذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولًا مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}$ cm

6

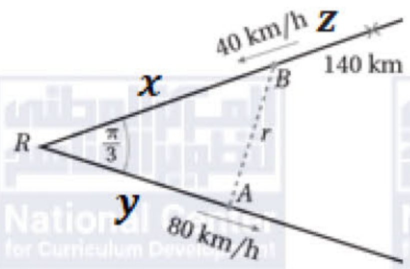
للحصول على أكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$:

$$A(0) = \pi\left(\frac{0}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-0}{4}\right)^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$A(24) = \pi\left(\frac{24}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-24}{4}\right)^2 = \frac{144}{\pi} \approx 45.8 \text{ cm}^2$$

إذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة، ولا نقطع للمربع شيئًا منه.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون:

7

$$y = 80t \,, z = 40t \;\Rightarrow x = 140 - 40t$$

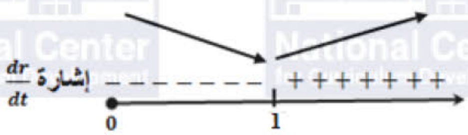
$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Rightarrow r^2 = (140 - 40t)^2 + (80t)^2 - (140 - 40t)(80t)$$

$$= 19600 - 22400t + 11200t^2$$

$$\Rightarrow 2r\frac{dr}{dt} = -22400 + 22400t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-22400 + 22400t}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow -22400 + 22400t = 0 \Rightarrow t = 1\ h$$

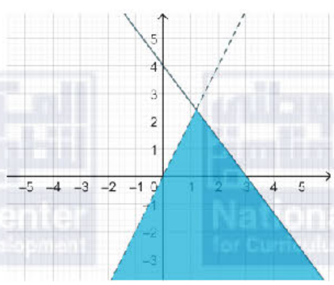


أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي:

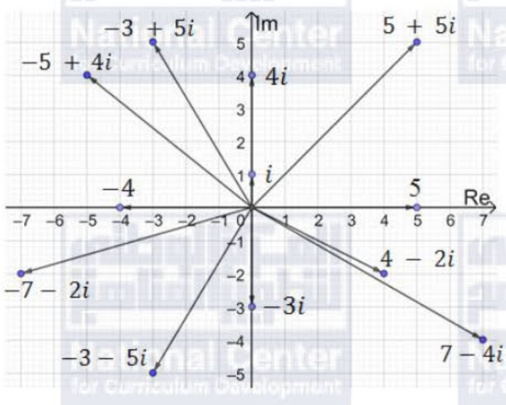
$$r = \sqrt{19600 - 22400 + 11200} = \sqrt{8400} \approx 91.7\ \text{km}$$

الوحدة الثالثة: الأعداد المركبة

أستعد لدراسة الوحدة

	حل معادلات كثيرات الحدود صفحة 20
1	$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6\ , x = -2$
2	$2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$ بتجريب الأصفار النسبية المحتملة، نجد أن $x = 4$ حل لهذه المعادلة، إذن $(x-4)$ عامل من عوامل كثير الحدود $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60$ ، نقسم فنحصل على: $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = (x-4)(2x^2 + 2x + 15)$ $\Rightarrow 2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0 \Rightarrow\ 2x^2 + 2x + 15 = 0\ or\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ملاحظة: العبارة التربيعية $2x^2 + 2x + 15$ مميزها سالب، أي ليس لها جذور حقيقية. فالحل الوحيد لهذه المعادلة هو: $x = 4$
	تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها صفحة 21
3	$\overrightarrow{AB} = \langle 2-4, 6-2 \rangle = \langle -2, 4 \rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
4	$\overrightarrow{AB} = \langle 0-(-2), 7-3 \rangle = \langle 2, 4 \rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
	معادلة الدائرة صفحة 21
5	$(x+1)^2 + (y-8)^2 = 25$
6	$r = \sqrt{(5+7)^2 + (4-13)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ $(x+7)^2 + (y-13)^2 = 225$
	حل نظام متباينات خطية صفحة 22
7	$4x + 3y \leq 12$ $y - 2x < 0$ نرسم المستقيم $4x + 3y = 12$ بخط متصل، ونرسم المستقيم $y - 2x = 0$ بخط متقطع على المستوى الديكارتي نفسه ونظلل المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق كلا المتباينتين. للتحقق من صحة الحل نعوض الزوج (2, 0) في المتباينتين. $4(2) + 3(0) \leq 12 \Rightarrow 8 \leq 12$ ✓ $0 - 2(2) < 0 \Rightarrow -2 < 0$ ✓  إذن الحل صحيح لأن الزوج(2, 0) من منطقة الحل المظللة حقق المتباينتين معًا.

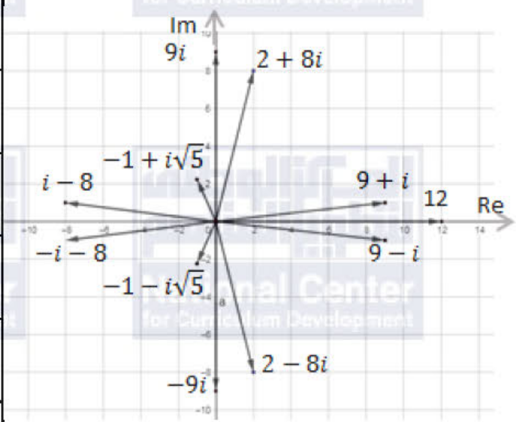
الدرس الأول: الأعداد المركبة

<table>
<tr><td>1</td><td>$\sqrt{-128} = \sqrt{-1 \times 2 \times 64} = 8i\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\sqrt{-14} = \sqrt{-1 \times 14} = i\sqrt{14}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \times 81} = 9i$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\sqrt{-125} = \sqrt{-1 \times 5 \times 25} = 5i\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$3\sqrt{-32} = 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16} = 12i\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\sqrt{-\frac{28}{9}} = \sqrt{-1 \times \frac{7 \times 4}{9}} = \frac{2i\sqrt{7}}{3}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$i^{98} = (i^2)^{49} = (-1)^{49} = -1$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$i^{121} = i^{120} \times i = (i^2)^{60} \times i = (-1)^{60} \times i = i$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>
<table>
<tr><th>z</th><th>$Re(z)$</th><th>$Im(z)$</th></tr>
<tr><td>$-4+6i$</td><td>-4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>-3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$8i$</td><td>0</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$-8+3i$</td><td>-8</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>12-23</td><td>


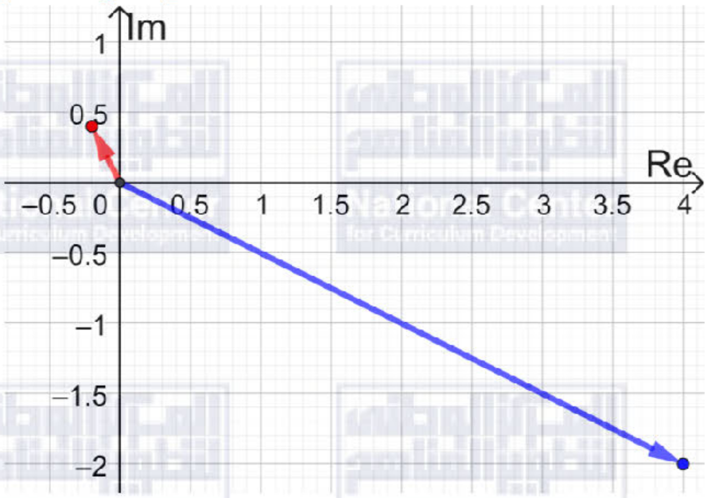
</td></tr>
</table>

24	$A = 4 + 5i \Rightarrow \lvert A\rvert = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$, $Arg(A) = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.90$ $B = 3i \Rightarrow \lvert B\rvert = \sqrt{9} = 3$, $Arg(B) = \frac{\pi}{2}$ $C = 2 - 6i \Rightarrow \lvert C\rvert = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$, $Arg(C) = -\tan^{-1} 3 \approx -1.25$ $D = -2i \Rightarrow \lvert D\rvert = \sqrt{4} = 2$, $Arg(D) = -\frac{\pi}{2}$ $E = -4 \Rightarrow \lvert E\rvert = \sqrt{16} = 4$, $Arg(E) = \pi$ $F = -5 - 4i \Rightarrow \lvert F\rvert = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ $Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{4}{5}\right) \approx -2.47$ $G = -3 + 4i \Rightarrow \lvert G\rvert = \sqrt{9+16} = 5$ $Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 2.21$
25	$2x + 1 = 7$, $4 = -y + 3$ $\Rightarrow x = 3$, $y = -1$
26	$x + 3y = 26$, $2x - 4y = 32$ $\Rightarrow x = 20$, $y = 2$
27	$\lvert z\rvert = 6$, $Arg(z) = \tan^{-1}\frac{0}{6} = 0$ $z = 6(\cos 0 + i \sin 0)$
28	$\lvert z\rvert = 5$, $Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ $z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
29	$\lvert z\rvert = \sqrt{12+4} = 4$, $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ $z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

30	$\|z\| = \sqrt{2}\ , Arg(z) = \pi - \tan^{-1} 1 = \frac{3\pi}{4}$ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
31	$\|z\| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\ , Arg(z) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$ $z = 2\sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46))$
32	$\|z\| = 2\sqrt{17}\ , Arg(z) = \tan^{-1} 4 \approx 1.33$ $z = 2\sqrt{17}(\cos 1.33 + i\sin 1.33)$
33	$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$
34	$12(-1 + i(0)) = -12$
35	$8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$
36	$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$
37	$\bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$
38	$\bar{z} = 9 + i$
39	$\bar{z} = 2 + 8i$
40	$\bar{z} = 9i$
41	$\bar{z} = 12$
42	$\bar{z} = -i - 8$



الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

1	$9+3i$
2	$2-5i$
3	$12+28i$
4	$64-36i^2=100$
5	$-8+24\sqrt{3}i+72-24\sqrt{3}i=64$
6	$\frac{3-i}{4-3i}\times\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{15+5i}{25}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$
7	$z=1-3i\ \ ,w=1+i$
8	$wz=4-2i\rightarrow\lvert wz\rvert=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ $Arg(wz)=-\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx-0.46$ $\frac{w}{z}=\frac{1+i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{-2+4i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ $\left\lvert\frac{w}{z}\right\rvert=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,Arg\left(\frac{w}{z}\right)=\pi-\tan^{-1}2\approx2.03$
9	$wz=4-2i\ ,\frac{w}{z}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ 
10	$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$
11	$\lvert z\rvert=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=6$

12	$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$
13	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert w\rvert = 6 \times 18 = 108$
14	$\sqrt{-15+8i} = x + iy \quad \Rightarrow -15 + 8i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow -15 + 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = -15 \ , 2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$ $\Rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \, , y = \ \pm 4$ $\sqrt{-15+8i} = \pm(1+4i)$
15	$\sqrt{-7-24i} = x + iy \quad \Rightarrow -7 - 24i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow -7 - 24i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = -7 \ , 2xy = -24 \ \Rightarrow y = -\frac{12}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$ $\Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \, , y = \mp 4$ $\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i)$
16	$\sqrt{105+88i} = x + iy \quad \Rightarrow 105 + 88i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow 105 + 88i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = 105 \ , 2xy = 88 \ \Rightarrow y = \frac{44}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105$ $\Rightarrow x^4 - 105x^2 - 1936 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-121) = 0 \Rightarrow x = \pm 11 \, , y = \ \pm 4$ $\sqrt{105+88i} = \pm(11+4i)$

17	$Arg(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \quad \lvert\omega\rvert = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\lvert\omega^3\rvert = \lvert\omega\rvert \times \lvert\omega\rvert \times \lvert\omega\rvert = 1 \times 1 \times 1 = 1$ $Arg(\omega^3) = Arg(\omega) + Arg(\omega) + Arg(\omega) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ $\Rightarrow \omega^3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$
18	$z_1z_2 = 3 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$
19	$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \quad \Rightarrow \overline{z_1} = 3\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$ $z_1\overline{z_1} = 3 \times 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = 9(\cos 0 + i\sin 0) = 9$
20	${z_2}^3 = {z_2}^2 \times z_2 = 2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \times z_2$ $= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $= 8\left(\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ $= 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$
21	$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$
22	$\left\lvert\frac{u - 9i}{3 + i}\right\rvert = 5 \Rightarrow \frac{\lvert u - 9i\rvert}{\lvert 3 + i\rvert} = 5$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{u^2 + 81}}{\sqrt{9 + 1}} = 5$ $\Rightarrow \sqrt{u^2 + 81} = 5\sqrt{10}$ $\Rightarrow u^2 + 81 = 250$ $\Rightarrow u^2 = 169 \Rightarrow u = \pm 13$ لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u = -13$.

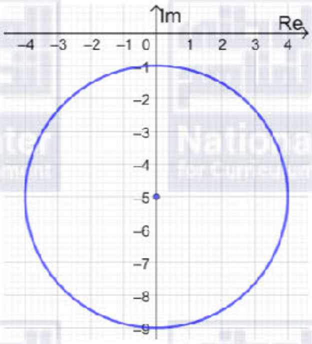
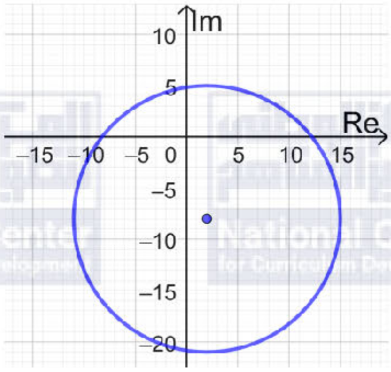
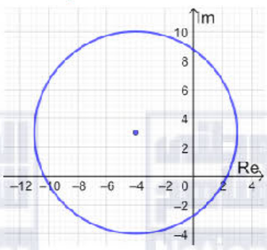
	حلّ آخر: ويمكن كتابة الصورة القياسية للعدد $\frac{u-9i}{3+i}$ وهي $\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i$ ثم إيجاد مقياس هذا العدد $\left\|\frac{u-9i}{3+i}\right\|=\left\|\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i\right\|$ $\sqrt{(\frac{3u-9}{10})^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2}=5$ $(\frac{3u-9}{10})^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2=25$ $(3u-9)^2+(u+27)^2=2500$ $9u^2-54u+81+u^2+54u+729=2500$ $10u^2=1690 \Rightarrow u^2=169 \Rightarrow u=\pm 13$ وبما أن u سالبة فإن $u=-13$.
23	بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، فإنّه يحقق المعادلة، أي أنّ: $(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$ $(1+8i+16i^2)(1+4i)\ +\ 5(1+8i+16i^2)+a(1+4i)+b=0$ $(-15+8i)(1+4i)+5(-15+8i)+a(1+4i)+b=0$ $-15-52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$ $-122+a+b+i(4a-12)=0$ $-122+a+b=0\ ,4a-12=0\ \Rightarrow a=3, b=119$ فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$ بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة، فإن $1-4i$جذر آخر لها. نكوّن معادلة تربيعية لها هذان الجذران: $(x-(1+4i))(x-(1-4i))=(x-1-4i)(x-1+4i)$ $=x^2-2x+17$ ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ فنحصل على: $x^3+5x^2+3x+119=(x^2-2x+17)(x+7)$ الجذران الآخران لهذه المعادلة هما: $x=-7,\ x=1-4i$

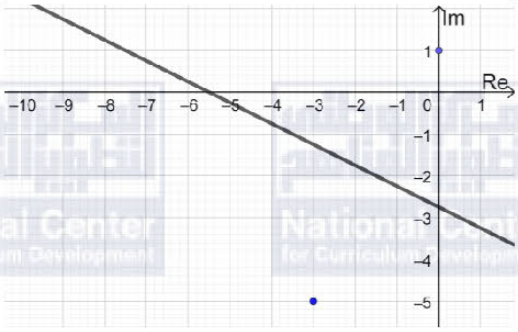
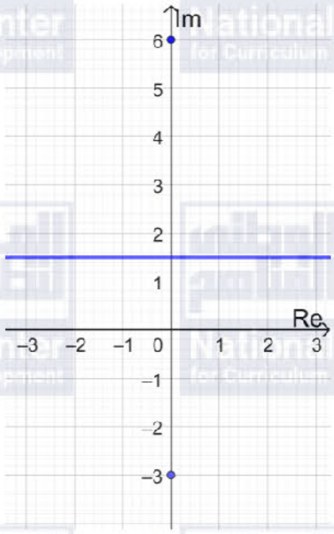
24	نبسط $\frac{362-153i}{2-3i}$ $\frac{362-153i}{2-3i}=\frac{362-153i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{1183+780i}{13}=91+60i$ $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\sqrt{91+60i}=x+iy$ $\Rightarrow 91+60i=x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow x^2-y^2=91\ ,2xy=60\ \Rightarrow y=\frac{30}{x}$ $\Rightarrow x^2-\frac{900}{x^2}=91$ $\Rightarrow x^4-91x^2-900=0$ $\Rightarrow (x^2+9)(x^2-100)=0 \Rightarrow x=\pm 10\ , y=\ \pm 3$ $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\pm(10+3i)$
25	إذا كان $(4+3i)$ جذرًا تربيعيًّا للعدد $(7+24i)$ فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة: $(4+3i)^2=7+24i$ نستطيع التأكد من ذلك بالحساب: $(4+3i)^2=16+24i-9=7+24i$ إذن هو فعلًا جذر تربيعي للعدد$(7+24i)$، وجذره التربيعي الآخر هو : $-4-3i$
26	$\theta_1=Arg(7+24i)=\tan^{-1}\frac{24}{7}\ \approx 1.287$ $\theta_2=Arg(4+3i)=\tan^{-1}\frac{3}{4}\ \approx 0.6435$ $2\times\theta_2=2(0.6435)=1.287=\theta_1$ إذن، $Arg(7+24i)=2Arg(4+3i)$
27	$\|7+24i\|=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$ $\|4+3i\|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ $\Longrightarrow \|7+24i\|=\|4+3i\|^2$

28	$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i \Rightarrow \frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$ $\Rightarrow \frac{3a-ia}{10}+\frac{b-2ib}{5}=1-i$ $\Rightarrow \frac{3}{10}a-i\frac{a}{10}+\frac{b}{5}-i\frac{2b}{5}=1-i$ $\Rightarrow \frac{3}{10}a+\frac{b}{5}=1 \quad , \quad \frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$ $\Rightarrow 3a+2b=10 \quad ,a+4b=10$ $\Rightarrow b=2 \quad ,a=2$
29	$2z^3-8z^2-13z+87=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm3, \pm29, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{29}{2}, \pm87, \pm\frac{87}{2}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$ إذن $(z+3)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$ $\Rightarrow z=-3 \quad ,z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{3\pm6i}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-3, \frac{3}{4}+\frac{3}{2}i, \frac{3}{4}-\frac{3}{2}i$
30	$z^3+4z^2-10z+12=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة لأن: $(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$ إذن $(z+6)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $z^3+4z^2-10z+12=(z+6)(z^2-2z+2)=0$ $\Rightarrow z=-6 \quad ,z=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-6, 1+i, 1-i$

31	بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ ، فإن: $(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$ $\Rightarrow -7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$ $\Rightarrow -7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-4b+10)=0$ $\Rightarrow -2-2a+3b=0\ ,-14+11a-4b=0$ $\Rightarrow a=2, b=2$ المعادلة هي: $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$ بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة، فإنّ $(-2-i)$ جذر آخر لها. نكوّن معادلة لها هذان الجذران: $\big(z-(-2+i)\big)\big(z-(-2-i)\big)=(z+2-i)(z+2+i)$ $=z^2+4z+5$ ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4z+5 فنحصل على: $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4z+5)(z^2-2z+5)$ $z^2-2z+5=0 \quad \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$ جذور هذه المعادلة هي: $x=1-2i,\ \ x=1+2i, x=-2+i\ , x=-2-i$

الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

1	$\|z+5i\|-3=1 \quad \Rightarrow \|z-(-5i)\|=4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-5)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات  المعادلة الديكارتية: $\|z+5i\|-3=1 \quad \Rightarrow \|x+i(y+5)\|=4 \quad \Rightarrow x^2+(y+5)^2=16$
2	$\|z-2+8i\|=13 \quad \Rightarrow \|z-(2-8i)\|=13$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة  المعادلة الديكارتية: $\|z-2+8i\|=13 \quad \Rightarrow \|x-2+i(y+8)\|=13$ $\Rightarrow (x-2)^2+(y+8)^2=169$
3	$\|z+4-3i\|=7 \quad \Rightarrow \|z-(-4+3i)\|=7$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات  المعادلة الديكارتية: $\|z+4-3i\|=7 \quad \Rightarrow \|x+4+i(y-3)\|=7$ $\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=49$

4	$\lvert z+3+5i\rvert = \lvert z-i\rvert \Rightarrow \lvert z-(-3-5i)\rvert = \lvert z-(i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-3,-5),(0,1)$  $\lvert z+3+5i\rvert = \lvert z-i\rvert \Rightarrow \lvert (x+3)+i(y+5)\rvert = \lvert x+i(y-1)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ $\Rightarrow (x+3)^2+(y+5)^2 = x^2+(y-1)^2$ $\Rightarrow x^2+6x+9+y^2+10y+25 = x^2+y^2-2y+1$ $\Rightarrow 6x+12y+33=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $2x+4y+11=0$
5	$\frac{\lvert z+3i\rvert}{\lvert z-6i\rvert}=1 \Rightarrow \lvert z+3i\rvert = \lvert z-6i\rvert \Rightarrow \lvert z-(-3i)\rvert = \lvert z-(6i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3),(0,6)$  $\lvert z+3i\rvert = \lvert z-6i\rvert \Rightarrow \lvert x+i(3+y)\rvert = \lvert x+i(y-6)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{x^2+(3+y)^2} = \sqrt{x^2+(y-6)^2}$ $\Rightarrow x^2+(3+y)^2 = x^2+(y-6)^2$ $\Rightarrow x^2+6y+9+y^2 = x^2+y^2-12y+36$ $\Rightarrow 18y-27=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $2y-3=0 \Rightarrow y=1.5$

6

$$|6-2i-z| = |z+4i| \Rightarrow |z-6+2i| = |z+4i|$$
$$\Rightarrow |z-(6-2i)| = |z-(-4i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

$(6,-2),(0,-4)$

$$|z-6+2i| = |z+4i| \Rightarrow |x-6+i(y+2)| = |x+i(y+4)|$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+(y+4)^2}$$
$$\Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2 = x^2+(y+4)^2$$
$$\Rightarrow x^2-12x+36+y^2+4y+4 = x^2+y^2+8y+16$$
$$\Rightarrow 3x+y-6=0$$

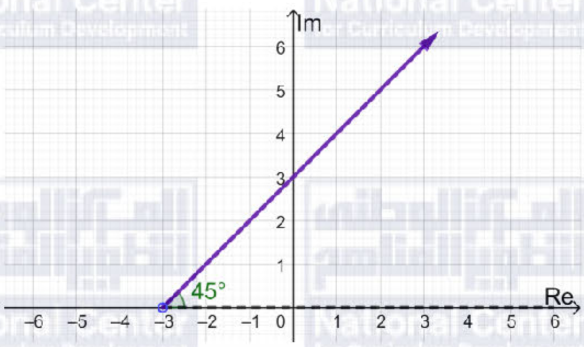
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:

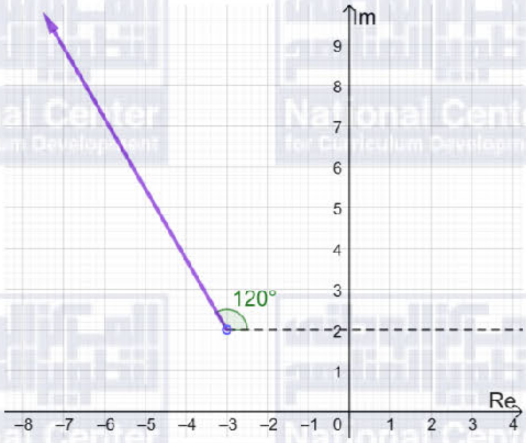
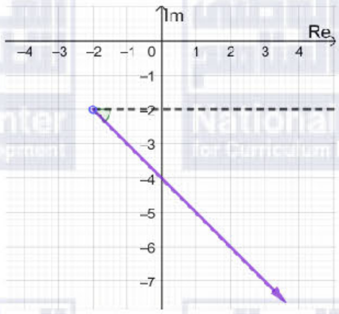
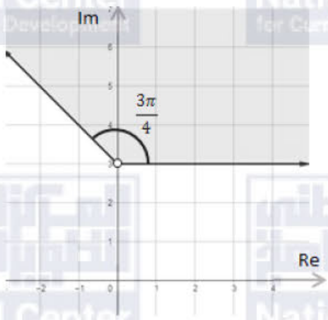
$3x+y-6=0$

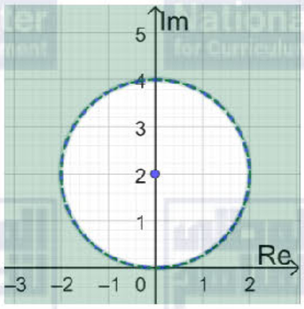
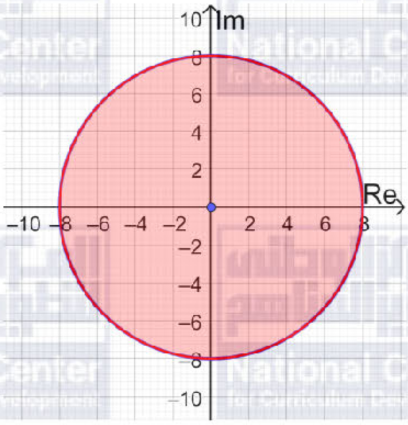
7

$$\text{Arg}(z+3) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \text{Arg}\big(z-(-3)\big) = \frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب



8	$\mathbf{Arg}(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \mathbf{Arg}\big(z-(-3+2i)\big)=\dfrac{2\pi}{3}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب 
9	$\mathbf{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \mathbf{Arg}\big(z-(-2-2i)\big)=-\dfrac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,-2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب 
10	$0 \leq \mathbf{Arg}(z-3i) \leq \dfrac{3\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-3i)=\frac{3\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب ويمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-3i)=0$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي الموجب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كما في الشكل المجاور: 

11	$\|z-2i\|>2 \Rightarrow \|z-(2i)\|>2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-2i\|=2$ ، وهو دائرة مركزها $(0,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي خارج الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة أكبر من طول نصف القطر. 
12	$\|z\|\leq 8$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z\|=8$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 

<table>
<tr>
<td>13</td>
<td>

$|z-1+i| \leq 1$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-1+i|=1$ ، وهو دائرة (ترسم بخط متصل) مركزها $(1,-1)$ وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة وعلى محيطها.

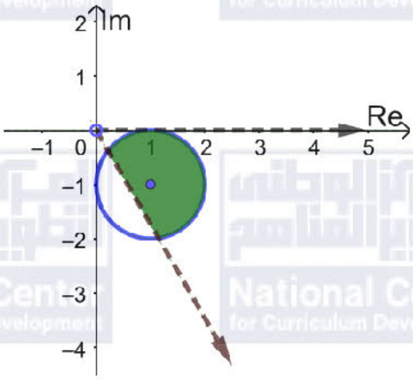
$-\frac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}(z) < 0$

يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$ شعاعًا (بخط متقطع) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

و يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z)=0$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي الموجب

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هذه المتباينة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين

أما المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا فهو كما في الشكل:

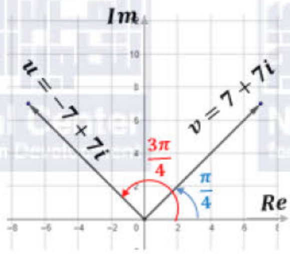


</td>
</tr>
<tr>
<td>14</td>
<td>

$\mathrm{Arg}(z+2i) = \frac{3\pi}{4}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>15</td>
<td>

$u = -7+7i \quad , \quad v = 7+7i$

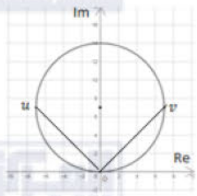
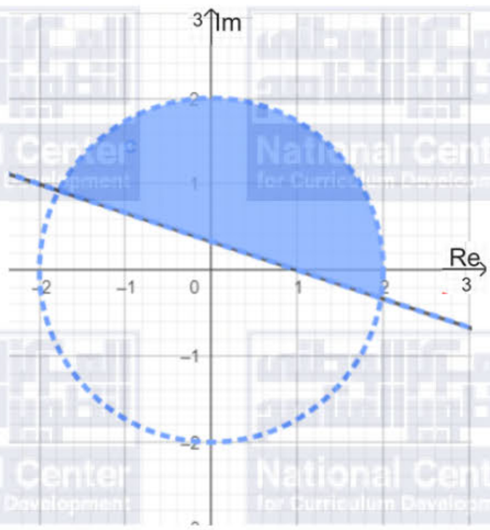


$Arg(u) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right) = \pi - \tan^{-1}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$Arg(v) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

قياس الزاوية الصغرى بين u، و v يساوي $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

</td>
</tr>
</table>

16		الدائرة التي تمر بنقطة الأصل والنقطتين اللتين تمثلان u، وv ، تكون القطعة المستقيمة UV قطر لهذه الدائرة لأن الزاوية UOV قائمة فهي تقابل قطر الدائرة، ومركز الدائرة هو نقطة منتصف هذه القطعة وهي$(\frac{-7+7}{2}, \frac{7+7}{2})$ أي $(0,7)$، وطول نصف قطرها يساوي $\sqrt{(7-0)^2+(7-7)^2} = 7$ إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي: $\|z-7i\| = 7$
17		$u = -1 - i \;\; \Rightarrow u^2 = (1+i)^2 = 2i$ $\|z\| < 2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z\| = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر. $\|z-u^2\| < \|z-u\| \;\; \Rightarrow \|z-2i\| < \|z-(-1-i)\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-2i\| = \|z-(-1-i)\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(-1,-1)$ و $(0,2)$ وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\|0-2i\| < \|0+1+i\| \rightarrow 2 > \sqrt{2}$ بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$ المظللة في الرسم أدناه. 

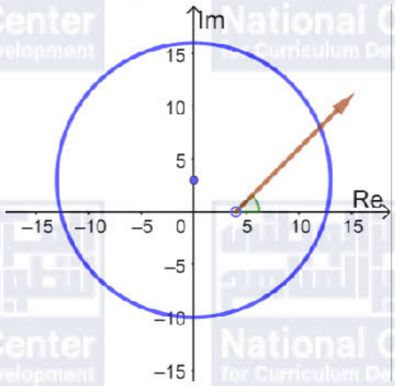
18

$|z-3i|=13$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة

$Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(4,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب أي أنّ ميله يساوي 1 ومعادلته هي : $y-0=1(x-4)$ أي: $y=x-4$



لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

بالتعويض: $x^2+(y-3)^2=169$ و $y=x-4\,, y\geq 0, x\geq 0$

$$x^2+(x-4-3)^2=169$$
$$2x^2-14x+49=169$$
$$x^2-7x-60=0$$
$$(x+5)(x-12)=0$$
$$\Rightarrow\ x=12\ \Rightarrow y=12-4=8$$

العدد المركب الذي يحقق المعادلتين معًا هو: $z=12+8i$

<table>
<tr>
<td>19</td>
<td>

$|z-3-2i|=5$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(3,2)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات

ومعادلتها: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

$|z-6i|=|z-7+i|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,6),(7,-1)$، الذي يمر بالنقطة (3.5, 2.5) وميله 1، ومعادلته هي: $y-2.5=1(x-3.5)$ أي: $y=x-1$

لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

بالتعويض: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ و $y=x-1$

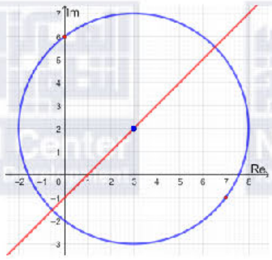
$(x-3)^2+(x-1-2)^2=25$

$2x^2-12x+18=25$

$2x^2-12x-7=0$

$x=\dfrac{6\pm5\sqrt{2}}{2}$

$y=\dfrac{4\pm5\sqrt{2}}{2}$



العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معًا هما:

$z_1=\frac{6+5\sqrt{2}}{2}+\frac{4+5\sqrt{2}}{2}i,\quad z_2=\frac{6-5\sqrt{2}}{2}+\frac{4-5\sqrt{2}}{2}i$

</td>
</tr>
<tr>
<td>20</td>
<td>

المنحنى الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,1),(1,6)$ ومعادلته هي: $|z-4-i|=|z-1-6i|$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الأقرب إلى النقطة $(4,1)$، والخط الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$|z-4-i|<|z-1-6i|$

</td>
</tr>
<tr>
<td>21</td>
<td>

المنحنى الحدودي هنا هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات ومعادلتها هي:

$|z-3i|=4$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الواقعة داخل الدائرة، ولأن المنحنى الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$|z-3i|<4$

</td>
</tr>
<tr>
<td>22</td>
<td>

مركز الدائرة هو (1, 4)، وطول نصف قطرها 4 وحدات والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة فالمتباينة التي تصفها هي: $|z-1-4i|\le 4$

ولدينا شعاعان متصلان منطلقان من النقطة (2, 3)، السفلي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الأفقي، والعلوي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الأفقي وتم تظليل المنطقة المحصورة بينهما، فالمتباينة التي تصف هذه المنطقة هي $\frac{\pi}{4}\le Arg(z-2-3i)\le\frac{\pi}{2}$

إذن، نظام المتباينات الذي تمثله المنطقة المظللة هو:

$|z-1-4i|\le 4\quad,\quad \dfrac{\pi}{4}\le Arg(z-2-3i)\le\dfrac{\pi}{2}$

</td>
</tr>
</table>