المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين- مادة الرياضيات- الصف الثاني العلمي ف2(طبعة 2023)

الوحدة الرابعة: التكامل

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد تكاملات غير محدودة لاقترانات القوة صفحة 6
1	$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$
2	$\int (2 + x^3 + 5x^{-2})\,dx = 2x + \frac{1}{4}x^4 - 5x^{-1} + C = 2x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{x} + C$
3	$\int (2x^7 - 4x^{-4})\,dx = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3}x^{-3} + C = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3x^3} + C$
4	$\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + C$
5	$\int (4x^4 - 4x^2 + x)\,dx = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
6	$\int (x^2 + 7 - 2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 7x - x^2 + C$
7	$\int (x^2 + 2x - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$
8	$\int (2x+5)^5\,dx = \frac{1}{12}(2x+5)^6 + C$
9	$\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$
	إيجاد تكاملات محدودة لاقترانات القوة صفحة 7
10	$\int_{-2}^{3} x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6\Big\vert_{-2}^{3} = \frac{1}{6}(729 - 64) = \frac{665}{6}$
11	$\int_{1}^{2} (2x^{-3} + 3x)\,dx = \left(-x^{-2} + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{1}^{2} = \left(-\frac{1}{4} + 6\right) - \left(-1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$
12	$\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_{1}^{4} \left(2x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-2x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_{1}^{4}$ $= \left(-\frac{1}{2} - 1\right) - (-2 - 2) = \frac{5}{2}$

	إيجاد قاعدة اقتران عُلمت مشتقته ونقطة تحققه (الشرط الأولي) صفحة 7
13	$f(x)=\int (x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x+C$ $f(0)=0+0+C$ $8=0+C\Rightarrow C=8$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+8$
	إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x صفحة 8
14	$2x^2-x^3=0\Rightarrow x^2(2-x)=0\Rightarrow x=0\quad ,x=2$ $f(1)=2-1=1\Rightarrow f(x)>0,\quad 0<x<2$ $Area=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (2x^2-x^3)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\vert_0^2$ $=\left(\frac{16}{3}-4\right)-0=\frac{4}{3}$
15	$x^2-8x+12=0\Rightarrow (x-6)(x-2)=0\Rightarrow x=6\quad ,x=2$ $f(3)=9-24+12=-3\Rightarrow f(x)<0,\ \ 2<x<6$ $Area=-\int_2^6 f(x)\,dx=\int_2^6 (-x^2+8x-12)\,dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x\right)\Big\vert_2^6$ $=(-72+144-72)-\left(-\frac{8}{3}+16-24\right)=\frac{32}{3}$
16	$x^3+4x^2-11x-30=0\Rightarrow (x-3)(x+2)(x+5)=0$ $\Rightarrow x=3\quad ,x=-2\quad ,x=-5$ $f(-3)=-27+36+33-30=12\Rightarrow f(x)>0,\quad -5<x<-2$ $f(0)=-30\Rightarrow f(x)<0,\quad -2<x<3$ $Area=\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx+(-\int_{-2}^{3} f(x)\,dx)$ $=\int_{-5}^{-2}(x^3+4x^2-11x-30)\,dx+\int_{-2}^{3}(-x^3-4x^2+11x+30)\,dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{11}{2}x^2-30x\right)\Big\vert_{-5}^{-2}+\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{11}{2}x^2+30x\right)\Big\vert_{-2}^{3}$ $=\frac{863}{6}$

إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران منحنى اقتران حول المحورx صفحة 11	
17	$V=\pi\int_1^8 (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx$ $=\frac{3\pi}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big\|_1^8=\frac{3\pi}{5}\left((8)^{\frac{5}{3}}-(1)^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{93\pi}{5}=18.6\pi$ إذن، حجم المجسم يساوي18.6π وحدة مكعبة.

الدرس الأول: تكامل اقترانات خاصة

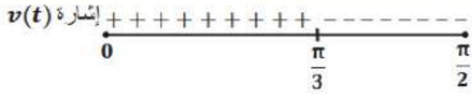
1	$\int 4e^{-5x}\,dx=-\frac{4}{5}e^{-5x}+C$
2	$\int(\sin 2x-\cos 2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$
3	$\int\cos^2 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$
4	$\int\frac{e^x+4}{e^{2x}}dx=\int(e^{-x}+4e^{-2x})\,dx=-e^{-x}-2e^{-2x}+C$
5	$\int(\cot x\csc x-2e^x)dx=-\csc x-2e^x+C$
6	$\int(3\cos 3x-\tan^2 x)\,dx=\int\left(3\cos 3x-(\sec^2 x-1)\right)dx$ $=\sin 3x-\tan x+x+C$
7	$\int\cos 3x\,(1+\csc^2 x)\,dx=\int\cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ $=\int\cos x+\cot x\csc x\,dx=\sin x-\csc x+C$
8	$\int\frac{x^2+x-4}{x+2}dx=\int\left(x-1-\frac{2}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x-2\ln\|x+2\|+C$
9	$\int\frac{1}{\sqrt{e^x}}dx=\int e^{-\frac{1}{2}x}dx=-2e^{-\frac{1}{2}x}+C$
10	$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(\sec^2 x+x^{-2})dx=\tan x-\frac{1}{x}+C$

11	$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}dx = \frac{1}{3}\ln\|x^3-3x^2\| + C$
12	$\int \ln e^{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$
13	$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin x) + C$
14	$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln\|2x-1\| + C$
15	$\int \frac{3-2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}dx = \int\left(3\csc^2\frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x\right)dx$ $= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + C$
16	$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x+4\|\|_0^1 = \ln(e+4) - \ln 5 = \ln\frac{e+4}{5}$
17	$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int_1^2\frac{3}{3x-2}dx = \frac{1}{3}\ln\|3x-2\|\Big\|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$
18	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$
19	$\int_{-1}^1 \|3x-2\|dx = \int_{-1}^{\frac{2}{3}}(2-3x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1(3x-2)dx$ $= \left(2x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big\|_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{13}{3}$

20	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+3\sin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2 x+6\sin x\cos x+9\sin^2 x)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+8\sin^2 x+3\sin 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+4(1-\cos 2x)+3\sin 2x)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(5-4\cos 2x+3\sin 2x)dx=\left(5x-2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\pi-2}{4}$
21	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\ln\|\cos x\|\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0=\frac{1}{2}\ln 2$
22	$\int_0^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-4\sin^2 x\cos^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-(2\sin x\cos x)^2)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{16}}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{16}}\cos 4x\,dx=\frac{1}{4}\sin 4x\Big\|_0^{\frac{\pi}{16}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$
23	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+2\tan x\sec x+\tan^2 x)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+2\tan x\sec x+\sec^2 x-1)dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x+2\tan x\sec x-1)dx$ $=(2\tan x+2\sec x-x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=2+2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2=2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$

24	$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}dx = \int_0^1 \left(2-\frac{4}{3x+2}\right)dx = \left(2x-\frac{4}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert\right)\Big\rvert_0^1$ $= 2-\frac{4}{3}\ln 5+\frac{4}{3}\ln 2 = 2+\frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$
25	$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 (2x+1)dx + \int_3^5 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\rvert_1^3 + \left(10x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_3^5$ $= 12-2+50-\frac{25}{2}-30+\frac{9}{2} = 22$
26	$\int_1^k \frac{4}{2x-1}dx = 1$ $\Rightarrow 2\ln\lvert 2x-1\rvert\Big\rvert_1^k = 1$ $\Rightarrow 2\ln\lvert 2k-1\rvert = 1$ $\Rightarrow 2\ln(2k-1) = 1$ $\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2}$ $,k>\frac{1}{2}$ لأن $\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$

27	$\int_0^{\ln a}(e^x+e^{-x})dx=\frac{48}{7}$ $\Rightarrow (e^x-e^{-x})\|_0^{\ln a}=\frac{48}{7}$ $\Rightarrow \left(a-\frac{1}{a}\right)-(1-1)=\frac{48}{7}$ $\Rightarrow a-\frac{1}{a}-\frac{48}{7}=0$ $\Rightarrow 7a^2-48a-7=0$ $\Rightarrow (7a+1)(a-7)=0$ $\Rightarrow a=-\frac{1}{7}$ (تُرفض) , $a=7$
28	$A=\int_0^{\pi}2\cos^2\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\|_0^{\pi}=\pi$
29	$f(x)=\int(e^{-x}+x^2)dx=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+C$ $f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+C$ $f(0)=-1+C$ $4=-1+C\Rightarrow C=5$ $\Rightarrow f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^3+5$
30	$f(x)=\int\left(\frac{3}{x}-4\right)dx=3\ln\|x\|-4x+C$ $f(x)=3\ln\|x\|-4x+C$ $f(1)=-4+C$ $0=-4+C\Rightarrow C=4$ $\Rightarrow f(x)=3\ln\|x\|-4x+4$
31	$s(3)-s(0)=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3\frac{-t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\|_0^3=-\frac{1}{2}\ln 10\text{ m}$

32	$d=\int_0^3 \lvert v(t)\rvert\, dt=\int_0^3 \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\rvert_0^3=\frac{1}{2}\ln 10\ \text{m}$
33	$s\left(\frac{\pi}{2}\right)-s(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\, dt=-2\cos 3t\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}=2\ \text{m}$
34	$6\sin 3t=0 \Rightarrow 3t=0,\pi \Rightarrow t=0,\frac{\pi}{3}$  $d=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lvert v(t)\rvert\, dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lvert 6\sin 3t\rvert dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3t\, dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin 3t\, dt$ $=-2\cos 3t\rvert_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cos 3t\rvert_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2+2+0-2(-1)=6\ \text{m}$
35	عندما $0\le t\le 6$ $s(t)=\int (8t-t^2)dt=4t^2-\frac{1}{3}t^3+C_1$ $s(0)=0-0+C_1$ $0=0+C_1 \Rightarrow C_1=0$ $\Rightarrow s(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3 \quad ,0\le t\le 6$ عندما $t>6$ $s(t)=\int \left(15-\frac{1}{2}t\right) dt=15t-\frac{1}{4}t^2+C_2$ الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$ نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة $s(6)=144-\frac{216}{3}=72$ $s(6)=90-9+C_2$ $72=81+C_2 \Rightarrow C_2=-9$ $\Rightarrow s(t)=15t-\frac{1}{4}t^2-9 \quad ,t>6$ $\Rightarrow s(40)=15(40)-\frac{1}{4}(1600)-9=191\ \text{m}$ يُعرض في الصفحة التالية حل لهذا السؤال بطريقة أخرى.

حلّ أخر:

35	$s(40)-s(0)=\int_0^{40} v(t)dt$ $\Rightarrow s(40)=s(0)+\int_0^{40} v(t)dt$ $=0+\int_0^{6}(8t-t^2)dt+\int_6^{40}\left(15-\frac{1}{2}t\right)dt$ $=(4t^2-\frac{t^3}{3})\Big\vert_0^6+(15t-\frac{t^2}{4})\Big\vert_6^{40}$ $=\left(4(6^2)-\frac{6^3}{3}\right)-0+15(40)-\frac{40^2}{4}-15(6)+\frac{6^2}{4}$ $=144-72+600-400-90+9=191\text{ m}$

الدرس الثاني: التكامل بالتعويض

1	$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$
2	$u = 1 - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$ $\int \left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}dx = \int u^2 \sin\frac{x}{2}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du = \int 2u^2du = \frac{2}{3}u^3 + C$ $= \frac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$
3	$\int \csc^5 x\cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x}xdx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $= \int u^3 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$ $= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$
4	$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sin x^2\, dx = \int \frac{1}{2}\sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$
5	$u = x + 2 \Rightarrow dx = du \quad , \qquad x = u - 2$ $\int x^3(x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7)du$ $= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{3}{5}u^{10} + \frac{4}{3}u^9 - u^8 + C$ $= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$

6	$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}dx$ $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = xdu$ $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{2}udu = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$
7	$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\,du = 2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$
8	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx$ $u = \ln 4x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2}du$ $\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2}du$ $= \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C$ $= -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$

9	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$ $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u \, du = \int \cos u \cos^2 u \, du$ $= \int \cos u \, (1 - \sin^2 u \,) du$ $v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u \Rightarrow \cos u \, dx = dv$ $\int \cos u \, (1 - \sin^2 u \,) du = \int (1 - v^2) dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C$ $= \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C$ $= \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$ ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة: $\int \sec^2 x \, \cos(\tan x) \left(1 - \sin^2(\tan x)\right) dx$ وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.
10	$u = 4x + 1 \Rightarrow 4dx = du \quad , \qquad 4x = u - 1$ $x = 20 \Rightarrow u = 81$ $x = 6 \Rightarrow u = 25$ $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du = \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \left(\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_{25}^{81} = (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5\right) = \frac{592}{3}$
11	$u = \sqrt{x-1} \Rightarrow u^2 = x - 1 \Rightarrow 2u du = dx$ $x = 5 \Rightarrow u = 2$ $x = 2 \Rightarrow u = 1$ $\int_2^5 \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{2u}{1+u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u+1}\right) du$ $= (2u - 2\ln\|u+1\|)\|_1^2 = (4 - 2\ln 3) - (2 - 2\ln 2) = 2 - 2\ln\frac{2}{3}$

12	$u = 1 + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx = \int_2^1 \frac{2 \sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u} du$ $= \int_2^1 \frac{2 - 2u}{u} du = \int_1^2 \frac{2u - 2}{u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u}\right) du$ $= (2u - 2\ln\|u\|)\|_1^2 = (4 - 2\ln 2) - (2 - 0) = 2 - 2\ln 2$
13	$u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$ $x = 4 \Rightarrow u = 3$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}du = \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2}u^4 \Big\|_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$
14	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x\, du$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du = \int_0^1 e^u du = e^u\|_0^1 = e - 1$

15	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\, dx = \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2(1-u^2)\, du$ $= \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2 - u^4)\, du = \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big\|_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\right) = \frac{47}{480}$
16	$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = -1$ $A = -\int_{-1}^0 f(x)\, dx = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x}\, dx$ $u = 1 + x \Rightarrow dx = du \quad , \quad x = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = -1 \Rightarrow u = 0$ $A = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x}\, dx = \int_0^1 -x\sqrt{u}\, du = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\, du$ $= \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du = \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big\|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

17	$f(x)=\int 16\sin x\ \cos^3 x\,dx$ $u=\cos x\Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x\Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$ $f(x)=\int 16\sin x\ u^3\times\frac{du}{-\sin x}=\int -16\,u^3\,du=-4u^4+C$ $=-4\cos^4 x+C$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+C$ $0=-1+C\Rightarrow C=1$ $\Rightarrow f(x)=-4\cos^4 x+1$
18	$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$ $u=x^2+5\Rightarrow \frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+5}+C$ $f(2)=3+C$ $1=3+C\Rightarrow C=-2$ $\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+5}-2$

19	$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ $u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$ $s(0) = 2 + C$ $4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$ $\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$

1	$\frac{4}{x^2+4x}=\frac{4}{x(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}$ $A(x+4)+B(x)=4$ $x=0 \Rightarrow A=1$ $x=-4 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx=\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x+4\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{x}{x+4}\right\rvert+C$
2	$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$ $A(x+3)+B(x-3)=6$ $x=3 \Rightarrow A=1$ $x=-3 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$ $=\ln\lvert x-3\rvert-\ln\lvert x+3\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert+C$
3	$\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}=\frac{x^2-3x+8}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ $A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)=x^2-3x+8$ $x=2 \Rightarrow A=\frac{2}{3}$ $x=-1 \Rightarrow C=-4$ $x=0 \Rightarrow A-2B-2C=8 \Rightarrow \frac{2}{3}-2B+8=8 \Rightarrow B=\frac{1}{3}$ $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$ $=\frac{2}{3}\ln\lvert x-2\rvert+\frac{1}{3}\ln\lvert x+1\rvert+\frac{4}{x+1}+C$

4	$\frac{x-10}{x^2-2x-8}=\frac{x-10}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-4)=x-10$ $x=4 \Rightarrow A=-1$ $x=-2 \Rightarrow B=2$ $\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x+2}\right)dx$ $=-\ln\|x-4\|+2\ln\|x+2\|+C$
5	$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}$ $=1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+1)=5x-1$ $x=-1 \Rightarrow A=2$ $x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=1$ $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$ $=x+2\ln\|x+1\|+\frac{1}{2}\ln\|2x-1\|+C$
6	$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$ $A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)=2x^2-x+6$ $x=-1 \Rightarrow A=3$ $x=0 \Rightarrow 2A+C=6 \Rightarrow 6+C=6 \Rightarrow C=0$ $x=1 \Rightarrow 3A+2B+2C=7 \Rightarrow 9+2B=7 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{-x}{x^2+2}\right)dx$ $=3\ln\|x+1\|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$

7	$\dfrac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$ $A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)=8x+24$ $x=-1 \Rightarrow A=1$ $x=3 \Rightarrow C=12$ $x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=24 \Rightarrow 9-3B+12=24 \Rightarrow B=-1$ $\int \dfrac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx=\int\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-1}{x-3}+\dfrac{12}{(x-3)^2}\right)dx$ $=\ln\|x+1\|-\ln\|x-3\|-\dfrac{12}{x-3}+C$
8	$\dfrac{8x}{x^3+x^2-x-1}=\dfrac{8x}{x^2(x+1)-(x+1)}=\dfrac{8x}{(x^2-1)(x+1)}=\dfrac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$ $=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$ $A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2=8x$ $x=-1 \Rightarrow B=4$ $x=1 \Rightarrow C=2$ $x=0 \Rightarrow -A-B+C=0 \Rightarrow -A-4+2=0 \Rightarrow A=-2$ $\int \dfrac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\int\left(\dfrac{-2}{x+1}+\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x-1}\right)dx$ $=-2\ln\|x+1\|-\dfrac{4}{x+1}+2\ln\|x-1\|+C=2\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|-\dfrac{4}{x+1}+C$

9	$\frac{4}{x^3-2x^2}=\frac{4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$ $A(x)(x-2)+B(x-2)+C(x^2)=4$ $x=0 \Rightarrow B=-2$ $x=2 \Rightarrow C=1$ $x=1 \Rightarrow -A-B+C=4 \Rightarrow -A+2+1=4 \Rightarrow A=-1$ $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx$ $=-\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x}+\ln\lvert x-2\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{x-2}{x}\right\rvert+\frac{2}{x}+C$
10	$\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $A(x)(x+1)+B(x+1)+C(x^2)=x-1$ $x=0 \Rightarrow B=-1$ $x=-1 \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow 2A+2B+C=0 \Rightarrow 2A-2-2=0 \Rightarrow A=2$ $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx=\int_1^5\left(\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x+1}\right)dx$ $=\left(2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}-2\ln\lvert x-2\rvert\right)\Big\rvert_1^5=\left(\frac{1}{x}+2\ln\left\lvert\frac{x}{x-2}\right\rvert\right)\Big\rvert_1^5=2\ln\frac{5}{3}-\frac{4}{5}$

11	$\frac{4-x}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$ $A(x-2)+B=4-x$ $x=2 \Rightarrow B=2$ $x=0 \Rightarrow -2A+B=4 \Rightarrow -2A+2=4 \Rightarrow A=-1$ $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx=\int_7^{12}\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$ $=\left(-\ln\lvert x-2\rvert-\frac{2}{x-2}\right)\Big\rvert_7^{12}=-\ln 10-\frac{1}{5}+\ln 5+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\ln\frac{1}{2}$
12	$\frac{4}{x^2+8x+15}=\frac{4}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$ $A(x+3)+B(x+5)=4$ $x=-5 \Rightarrow A=-2$ $x=-3 \Rightarrow B=2$ $\int_1^{2} \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx=\int_1^{2}\left(\frac{-2}{x+5}+\frac{2}{x+3}\right)dx$ $=(-2\ln\lvert x+5\rvert+2\ln\lvert x+3\rvert)\rvert_1^2=\left(2\ln\left\lvert\frac{x+3}{x+5}\right\rvert\right)\Big\rvert_1^2$ $=2\ln\frac{5}{7}-2\ln\frac{2}{3}=2\ln\frac{15}{14}$

13	$\dfrac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5+\dfrac{-x+10}{2x^2-5x} = 5+\dfrac{10-x}{x(2x-5)} = 5+\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x-5}$ $A(2x-5)+B(x) = 10-x$ $x=0 \Rightarrow A=-2$ $x=\dfrac{5}{2} \Rightarrow B=3$ $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx = \int_1^2 \left(5+\dfrac{-2}{x}+\dfrac{3}{2x-5}\right)dx$ $= \left(5x-2\ln\lvert x\rvert+\dfrac{3}{2}\ln\lvert 2x-5\rvert\right)\Big\rvert_1^2 = 10-2\ln 2-5-\dfrac{3}{2}\ln 3 = 5-\ln 12\sqrt{3}$
14	$\dfrac{25}{(x+1)(2x-3)^2} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{2x-3}+\dfrac{C}{(2x-3)^2}$ $A(2x-3)^2+B(x+1)(2x-3)+C(x+1) = 25$ $x=-1 \Rightarrow A=1$ $x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow C=10$ $x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=25 \Rightarrow 9-3B+10=25 \Rightarrow B=-2$ $\displaystyle\int_2^5 \dfrac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx = \int_2^5 \left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-2}{2x-3}+\dfrac{10}{(2x-3)^2}\right)dx$ $= \left(\ln\lvert x+1\rvert-\ln\lvert 2x-3\rvert-\dfrac{5}{2x-3}\right)\Big\rvert_2^5 = \left(\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{2x-3}\right\rvert-\dfrac{5}{2x-3}\right)\Big\rvert_2^5$ $= \left(\ln\dfrac{6}{7}-\dfrac{5}{7}\right)-(\ln 3-5) = \dfrac{30}{7}+\ln\dfrac{2}{7}$

15	$\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{(x-3)(x+2)}=1+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-3)=16-2x$ $x=3\Rightarrow A=2$ $x=-2\Rightarrow B=-4$ $\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx=\int_0^2\left(1+\frac{2}{x-3}+\frac{-4}{x+2}\right)dx$ $=(x+2\ln\lvert x-3\rvert-4\ln\lvert x+2\rvert)\vert_0^2$ $=2-4\ln 4-2\ln 3+4\ln 2=2-2\ln 12$
16	$A=\int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$ $\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+2)=4x+3$ $x=-2\Rightarrow A=1$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=2$ $A=\int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$ $=(\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert 2x-1\rvert)\vert_1^2$ $=(\ln 4+\ln 3)-(\ln 3+0)=\ln 4$

17	$A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$ $\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8}=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$ $=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{1}{4}+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-2}+\frac{C}{(2x-2)^2}$ $A(2x-2)^2+B(x+2)(2x-2)+C(x+2)=3x^2-4x-2$ $x=-2 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ $x=1 \Rightarrow C=-1$ $x=0 \Rightarrow 4A-4B+2C=-2 \Rightarrow 2-4B-2=-2 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$ $A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx=\int_2^3\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-2}+\frac{-1}{(2x-2)^2}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ln\|x+2\|+\frac{1}{4}\ln\|2x-2\|+\frac{1}{2(2x-2)}\right)\Big\|_2^3$ $=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln\frac{25}{8}$

18	$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x}$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx = \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}\,du$ $\dfrac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \dfrac{Au+B}{u^2+1} + \dfrac{C}{u-1}$ $(Au+B)(u-1) + C(u^2+1) = u+1$ $u = 1 \Rightarrow C = 1$ $u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$ $u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right) du$ $= -\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln\lvert u-1\rvert + C = -\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln\lvert e^x-1\rvert + C$
19	$u = \sin x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x}$ $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx = \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}\,du$ $\dfrac{5}{u^2+3u-4} = \dfrac{5}{(u+4)(u-1)} = \dfrac{A}{u+4} + \dfrac{B}{u-1}$ $A(u-1) + B(u+4) = 5$ $u = 1 \Rightarrow B = 1$ $u = -4 \Rightarrow A = -1$ $\displaystyle\int \frac{5}{u^2+3u-4}\,du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right) du = -\ln\lvert u+4\rvert + \ln\lvert u-1\rvert + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{5\cos x}{sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx = -\ln(4+\sin x) + \ln\lvert -1+\sin x\rvert + C$ $= \ln\left\lvert \dfrac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right\rvert + C$

20	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du$ $\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$ $A(u+2) + B(u+3) = 1$ $u = -3 \Rightarrow A = -1$ $u = -2 \Rightarrow B = 1$ $\Rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2}\right) du = \ln\lvert u+2\rvert - \ln\lvert u+3\rvert + C$ $\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \ln\left\lvert\frac{2+\tan x}{3+\tan x}\right\rvert + C$
21	$\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x-3) = 4x$ $x = 3 \Rightarrow A = 3$ $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right) dx = (3\ln\lvert x-3\rvert + \ln\lvert x+1\rvert)\rvert_0^1$ $= (3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln\frac{16}{27}$

22	$\frac{1}{2x^2+x-1}=\frac{1}{(2x-1)(x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}$ $A(x+1)+B(2x-1)=1$ $x=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$ $x=\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{2}{3}$ $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}dx=\int_1^p\left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{3}\ln\lvert 2x-1\rvert-\frac{1}{3}\ln\lvert x+1\rvert\right)\Big\rvert_1^p=\left(\frac{1}{3}\ln\lvert 2p-1\rvert-\frac{1}{3}\ln\lvert p+1\rvert\right)-\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)$ $=\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{2(2p-1)}{p+1}\right\rvert=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4p-2}{p+1}\right) \quad ,p>1$

1	$u = x \qquad dv = \cos 4x\, dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 4x$ $\int x\cos 4x\, dx = \frac{1}{4}x\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x\, dx = \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$
2	$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ $du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ $\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ $= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$
3	$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$ $du = dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$
4	$u = \ln x \qquad dv = (x^2+1)dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3 + x$ $\int (x^2+1)\ln x\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + C$
5	$\int \ln x^3\, dx = \int 3\ln x\, dx$ $u = 3\ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{3}{x}dx \qquad v = x$ $\int 3\ln x\, dx = 3x\ln x - \int 3dx = 3x\ln x - 3x + C$

6	$u = e^{2x}$ $\quad dv = \sin x\, dx$ $du = 2e^{2x}dx$ $\quad v = -\cos x$ $\int e^{2x}\sin x\, dx = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x\, dx$ $u = 2e^{2x}$ $\quad dv = \cos x\, dx$ $du = 4e^{2x}dx$ $\quad v = \sin x$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - \int 4e^{2x}\sin x\, dx$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\, dx$ $\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x\, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$
7	$u = \ln x$ $\quad dv = dx$ $du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = x$ $\int_1^e \ln x\ dx = x\ln x\|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\|_1^e - x\|_1^e = e - e + 1 = 1$
8	$u = \ln x$ $\quad dv = x^{-2}dx$ $du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{-1}{x}$ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}\ dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\|_1^2 - \frac{1}{x}\Big\|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

9	$u = x \qquad dv = \cos\frac{1}{4}x\,dx$ $du = dx \qquad v = 4\sin\frac{1}{4}x$ $\int_0^{\pi} x\cos\frac{1}{4}x\ dx = 4x\sin\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi} - \int_1^2 4\sin\frac{1}{4}x\ dx$ $= 4x\sin\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi} + 16\cos\frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\pi}$ $= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16$
10	$u = e^{3x} \qquad dv = \cos 2x\,dx$ $du = 3e^{3x}dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$ $\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \int \frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x\,dx$ $u = \frac{3}{2}e^{3x} \qquad dv = \sin 2x\,dx$ $du = \frac{9}{2}e^{3x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \int \frac{9}{4}e^{3x}\cos 2x\,dx$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ $\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x + C$ $\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + C$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}(2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{13}\left(2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3\right)$

11

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$$\int_1^e \ln(x+1)\ dx = x\ln(x+1)|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= x\ln(x+1)|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= x\ln(x+1)|_1^e - (x - \ln(x+1))|_1^e$$

$$= e\ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1)) + (1 - \ln 2)$$

$$= (1+e)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$$

12

$\int x^2 e^x\ dx$

سنستخدم هنا طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة	الإشارة	$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \int x^2 e^x\ dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x\ dx = e^x(x^2 - 2x + 2)\Big|_0^1 = e - 2$$

13

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$$\int_2^4 \ln x\ dx = x\ln x|_2^4 - \int_2^4 dx = x\ln x|_2^4 - x|_2^4$$

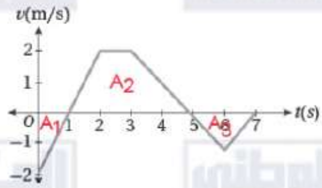
$$= 4\ln 4 - 2\ln 2 - 2 = 8\ln 2 - 2\ln 2 - 2 = 6\ln 2 - 2$$

14	إن الإحداثيين x للنقطتين A, B هما أول حلين موجبين للمعادلة: $x\sin x = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = \pi\ , x = 2\pi\ , \ldots$ ومنه: $A(\pi, 0), B(2\pi, 0)$
15	$Area = \int_0^{\pi} x\sin x\ dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\ dx)$ $u = x \qquad dv = \sin x\, dx$ $du = dx \qquad v = -\cos x$ $\int x\sin x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + C$ $Area = \int_0^{\pi} x\sin x\ dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\ dx)$ $= (-x\cos x + \sin x)\vert_0^{\pi} + (x\cos x - \sin x)\vert_{\pi}^{2\pi}$ $= \pi + 2\pi - (-\pi) = 4\pi$
16	$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = 1$ $\Rightarrow A(1, 0)$
17	$Area = \int_1^2 x^2 \ln x\ dx$ $u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$ $du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$ $Area = \int_1^2 x^2 \ln x\ dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x \Big\vert_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\ dx$ $= \frac{1}{3}x^3 \ln x \Big\vert_1^2 - \frac{1}{9}x^3 \Big\vert_1^2$ $= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

الدرس الخامس: المساحات والحجوم

1	$A=\int_0^{\pi}(2-(1+\cos 2x))\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\vert_0^{\pi}=(\pi-0)-(0-0)=\pi$
2	$1+10x-2x^2=1+5x-x^2 \Rightarrow x^2-5x=0$ $\Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x=0, x=5$ $\Rightarrow A=\int_0^5\left(1+10x-2x^2-(1+5x-x^2)\right)dx$ $=\int_0^5(5x-x^2)\,dx=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_0^5=\frac{125}{2}-\frac{125}{3}=\frac{125}{6}$
3	$A=\int_0^2\left(3x-x^2-(x)\right)dx=\int_0^2(2x-x^2)\,dx$ $=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$
4	$A=\int_{-1}^2\left((x^2+1)-(2x-2)\right)dx=\int_{-1}^2(x^2-2x+3)\,dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Big\vert_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-3\right)=9$
5	$x^2=2-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2, x=1$ $A=\int_{-2}^1\left((2-x)-(x^2)\right)dx=\int_{-2}^1(2-x-x^2)\,dx$ $=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-2}^1=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}$
6	$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\,, x=1$ لكن $x \neq 0$ لأن الاقترانين غير معرفين عند $x=0$، إذن يتقاطع المنحنيان عند $x=1$ فقط. $A=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln\vert x\vert+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)-(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$

7	$1-\cos x=\cos x \Rightarrow 2\cos x=1 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ $\cos x > 1-\cos x,\quad 0<x<\frac{\pi}{3}$ $\cos x < 1-\cos x,\quad \frac{\pi}{3}<x<\pi$ $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-(1-\cos x))\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos x-(\cos x))\,dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-2\cos x)\,dx$ $=(2\sin x-x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}+(x-2\sin x)\Big\vert_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$
8	$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4=4-\frac{1}{2}x \Rightarrow 3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x=0$ $\Rightarrow \sqrt{x}\left(3-x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0\ \ , x-\frac{1}{2}\sqrt{x}-3=0$ $\Rightarrow x=0\ \ , 2x-\sqrt{x}-6=0$ $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2,\qquad \sqrt{x}>0 \ \Rightarrow\ u>0$ $2x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow 2u^2-u-6=0$ $(2u+3)(u-2)=0 \Rightarrow u=-\frac{3}{2}, u=2 \Rightarrow x=4$ (الحل السالب مرفوض) $\Rightarrow x=0\ \ ,\ \ x=4$ $\Rightarrow A(4,2)$
9	$A=\int_0^4\left(\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4\right)-\left(4-\frac{1}{2}x\right)\right)dx$ $=\int_0^4\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x\right)dx=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)\Big\vert_0^4$ $=16-\frac{64}{5}+4=\frac{36}{5}=7.2$

10	 $s(7)-s(0)=\int_0^7 v(t)\,dt=-A_1+A_2-A_3$ $=-\frac{1}{2}(2)(1)+\frac{1}{2}(2)(4+1)-\frac{1}{2}(2)(1)=-1+5-1=3\text{ m}$
11	$d=\int_0^7 \lvert v(t)\rvert\,dt=A_1+A_2+A_3=1+5+1=7\text{ m}$
12	$s(7)-s(0)=3\text{ m} \Rightarrow s(7)-2=3 \Rightarrow s(7)=3+2=5\text{ m}$
13	$\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3\,,x=-2$ $V=\pi\int_0^3\left((g(x))^2-(f(x))^2\right)dx=\pi\int_0^3\left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right)dx$ $=\pi\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big\|_0^3=\frac{153\pi}{5}$
14	$V=\pi\int_e^{e^3}(f(x))^2\,dx=\pi\int_e^{e^3}\ln x\ dx$ $u=\ln x \qquad dv=dx$ $du=\frac{1}{x}dx \qquad v=x$ $V=\pi\int_e^{e^3}\ln x\ dx=\pi(x\ln x\|_e^{e^3}-\int_e^{e^3}dx)=\pi(x\ln x\|_e^{e^3}-x\|_e^{e^3})$ $=\pi(3e^3-e-e^3+e)=2\pi e^3$
15	$x^2=\sqrt{8x} \Rightarrow x^4=8x \Rightarrow x^4-8x=0 \Rightarrow x(x^3-8)=0 \Rightarrow x=0,x=2$ $V=\pi\int_0^2\left(\left(\sqrt{8x}\right)^2-(x^2)^2\right)dx=\pi\int_0^2(8x-x^4)\,dx$ $=\pi\left(4x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_0^2=\pi\left(16-\frac{32}{5}\right)=\frac{48\pi}{5}=9.6\pi$

16	$y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$ $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$ $V = \pi \int_{-3}^{3} (y^2 - (4)^2)\, dx = \pi \int_{-3}^{3} (25 - x^2 - 16)\, dx = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx$ $= \pi \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^{3} = \pi((27 - 9) - (-27 + 9)) = 36\pi$

1	$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = x^3 + C$
2	$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2-4} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$ $\Rightarrow A(y+2) + B(y-2) = 1$ $y = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$ $y = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}$ $\int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\lvert y-2\rvert - \frac{1}{4}\ln\lvert y+2\rvert = \ln\lvert x\rvert + C$ $\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{y-2}{y+2}\right\rvert = \ln\lvert x\rvert + C$
3	$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \times e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx$ $\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + C$

4	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sec y}{ye^{x^2}} \Rightarrow \frac{ydy}{\sec y}=\frac{xdx}{e^{x^2}} \Rightarrow \int y\cos y\,dy=\int xe^{-x^2}\,dx$ نجد $\int y\cos y\,dy$ بالأجزاء (من دون إضافة ثابت التكامل): $u=y \qquad dv=\cos y\,dy$ $du=dy \qquad v=\sin y$ $\Rightarrow \int y\cos y\,dy=y\sin y-\int \sin y\,dy=y\sin y+\cos y$ نجد $\int xe^{-x^2}\,dx$ بالتعويض(من دون إضافة ثابت التكامل): $u=-x^2 \Rightarrow du=-2x\,dx \Rightarrow dx=-\frac{du}{2x}$ $\Rightarrow \int xe^{-x^2}\,dx=\int xe^u\times\frac{du}{-2x}=-\int \frac{1}{2}e^u du=-\frac{1}{2}e^u=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ نضيف ثابت التكامل في الخطوة الأخيرة: $\int y\cos y\,dy=\int xe^{-x^2}\,dx$ $\Rightarrow y\sin y+\cos y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
5	$\frac{dy}{dx}=\frac{y-3}{y} \Rightarrow \frac{y}{y-3}dy=dx \Rightarrow \int \frac{y}{y-3}dy=\int dx$ $\Rightarrow \int\left(1+\frac{3}{y-3}\right)dy=\int dx$ $\Rightarrow y+3\ln\|y-3\|=x+C$

6	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\ln x}{y^2}\Rightarrow y^2dy=x\ln x\,dx\Rightarrow\int y^2dy=\int x\ln x\,dx$ نجد $\int x\ln x\,dx$ بالأجزاء: $u=\ln x$ $\quad dv=xdx$ $du=\frac{1}{x}dx$ $\quad v=\frac{1}{2}x^2$ $\Rightarrow\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ $\int y^2dy=\int x\ln x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
7	$\frac{dy}{dx}=-30\cos 4x\sin 4x\quad ,y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$ $\Rightarrow dy=-30\cos 4x\sin 4x\,dx$ $\Rightarrow\int dy=\int -15\sin 8x\,dx$ $\Rightarrow y=\frac{15}{8}\cos 8x+C$ الحل العام : $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{15}{8}\cos 8\left(\frac{\pi}{8}\right)+C$ الشرط الأولي : $0=-\frac{15}{8}+C\Rightarrow C=\frac{15}{8}$ $\Rightarrow y=\frac{15}{8}\cos 8x+\frac{15}{8}$ الحل الخاص :

8	$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$ $\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 dx$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$ الحل العام : $y(0) = 2 \Rightarrow 0 + C = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = 2\sqrt{2}$ الشرط الأولي : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{2}$ الحل الخاص :
9	$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y}\ , y(0) = 0$ $\Rightarrow \cos y\, dy = 4\sqrt{x} dx$ $\Rightarrow \int \cos y\, dy = \int 4\sqrt{x} dx$ $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ الحل العام : $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ الشرط الأولي : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x\sqrt{x}$ الحل الخاص :

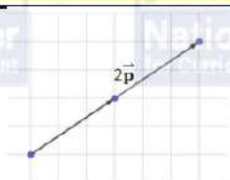
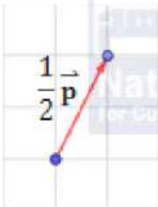
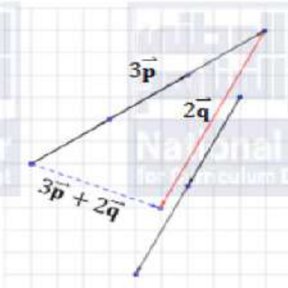
10	$\frac{dy}{dx}=xe^{y-x^2} \quad ,y(1)=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{y}e^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}}=xe^{-x^2}dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{y}}=\int xe^{-x^2}dx$ نجد $\int xe^{-x^2}dx$ بالتعويض: $u=-x^2 \Rightarrow du=-2xdx \Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{y}}=\int xe^{-x^2}dx=\int xe^{u}\times\frac{du}{-2x}=\int -\frac{1}{2}e^{u}du=-\frac{1}{2}e^{u}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ $-e^{-y}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ الحل العام : $\Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ الشرط الأولي : $y(1)=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{2e}+C \Rightarrow C=1-\frac{1}{2e}$ الحل الخاص : $\Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}e^{-x^2}+1-\frac{1}{2e}$
11	$\frac{dy}{dx}=xe^{-y} \quad ,y(4)=\ln 2$ $\Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}}=xdx$ الحل العام : $\Rightarrow \int e^{y}dy=\int xdx \Rightarrow e^{y}=\frac{1}{2}x^2+C$ الشرط الأولي : $y(4)=\ln 2 \Rightarrow 2=8+C \Rightarrow C=-6$ الحل الخاص : $\Rightarrow e^{y}=\frac{1}{2}x^2-6$
12	$\frac{dy}{dx}=(3x^2+4)y^2 \quad ,y(2)=-0.1$ $\Rightarrow \frac{dy}{y^2}=(3x^2+4)dx$ $\Rightarrow \int y^{-2}dy=\int(3x^2+4)dx$ الحل العام : $\Rightarrow -\frac{1}{y}=x^3+4x+C$ الشرط الأولي : $y(2)=-0.1 \Rightarrow 10=8+8+C \Rightarrow C=-6$ الحل الخاص : $\Rightarrow -\frac{1}{y}=x^3+4x-6$

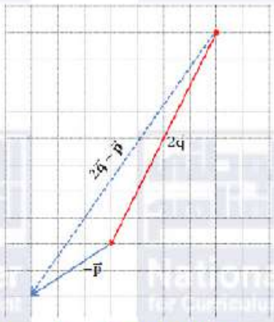
13	$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y^{0.8}\quad ,y(0)=100000$ $\Rightarrow y^{-0.8}dy=\frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow \int y^{-0.8}dy=\int \frac{1}{2}dt$ الحل العام : $\Rightarrow 5y^{0.2}=\frac{1}{2}t+C$ الشرط الأولي: $y(0)=100000$ $\Rightarrow 5\sqrt[5]{100000}=0+C \quad \Rightarrow C=50$ الحل الخاص : $\Rightarrow 5\sqrt[5]{y}=\frac{1}{2}t+50$
14	$5\sqrt[5]{y}=\frac{1}{2}(7)+50 \Rightarrow \sqrt[5]{y}=10.7 \Rightarrow y=(10.7)^5 \quad \approx 140255$
15	$\frac{dv}{dt}=-\frac{v^2}{100}\quad ,v(0)=20$ $\Rightarrow -v^{-2}dv=\frac{1}{100}dt$ $\Rightarrow -\int v^{-2}dv=\int dt$ $\Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{100}t+C$ $v(0)=20 \Rightarrow \frac{1}{20}=0+C \Rightarrow C=\frac{1}{20}$ $\Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{100}t+\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{t+5}{100} \Rightarrow v=\frac{100}{t+5}$

16	$e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x \quad , y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\Rightarrow e^y dy = (10 + 2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow \int e^y dy = \int (10 + 2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow e^y = 10x + 2\tan x + C$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{5\pi}{2} + 2 + C \Rightarrow C = -1 - \frac{5\pi}{2}$ $\Rightarrow e^y = 10x + 2\tan x - 1 - \frac{5\pi}{2}$
17	$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \quad , y(6) = 4$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \ln\|y\| = -\ln\|x\| + C$ $y(6) = 4 \Rightarrow \ln 4 = -\ln 6 + C \Rightarrow C = \ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\| = -\ln\|x\| + \ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\| + \ln\|x\| = \ln 24$ $\Rightarrow \ln\|xy\| = \ln 24$ $\Rightarrow \|xy\| = 24$ $\Rightarrow \|y\| = \frac{24}{\|x\|} \Rightarrow y = \frac{24}{x}$ or $\Rightarrow y = -\frac{24}{x}$ $\Rightarrow y = \frac{24}{x}$ (لأن $y = -\frac{24}{x}$ لا تحقق شروط السؤال)

الوحدة الخامسة: المتجهات

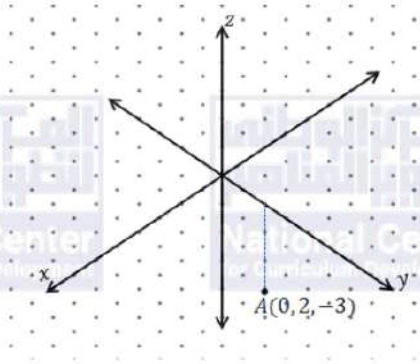
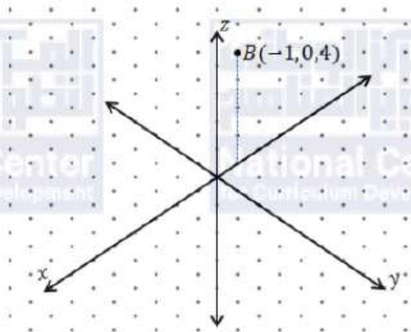
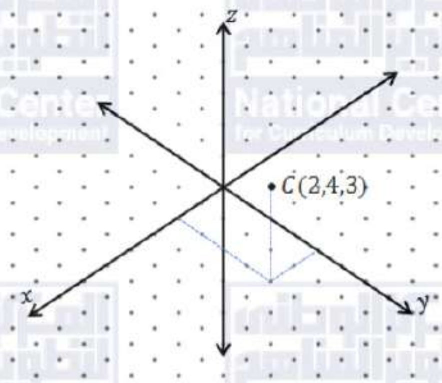
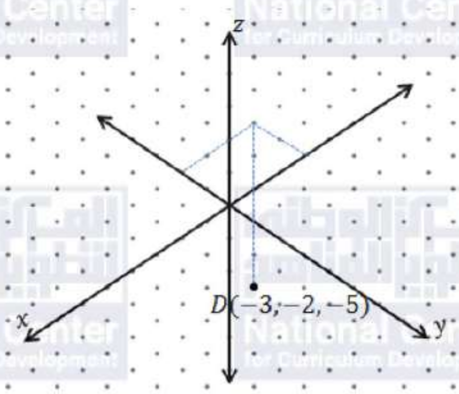
أستعد لدراسة الوحدة

	الصورة الإحداثية ومقدار المتجه صفحة 20
1	$A(-1,6), B(-1,-2), C(4,-5), D(5,1)$ $\overrightarrow{AB} = \langle 0,-8\rangle$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{0+64} = 8$
2	$\overrightarrow{BC} = \langle 5,-3\rangle$, $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
3	$\overrightarrow{CD} = \langle 1,6\rangle$, $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$
4	$\overrightarrow{DA} = \langle -6,5\rangle$, $\lvert\overrightarrow{DA}\rvert = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$
	جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا صفحة 20
5	
6	
7	

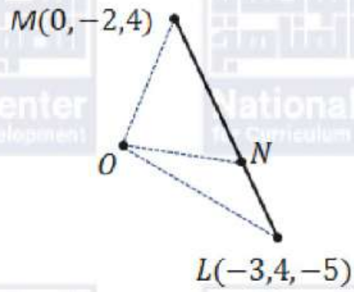
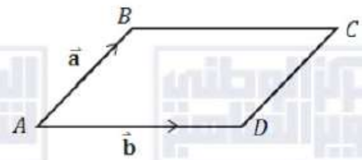
8	
جمع المتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي صفحة 21	
9	$\vec{u}+\vec{v}=\langle 9,7\rangle$
10	$\vec{v}-\vec{u}=\langle 3,11\rangle$
11	$3\vec{u}+2\vec{v}=\langle 21,12\rangle$
12	$-2\vec{u}+\vec{v}=\langle 0,13\rangle$
الضرب القياسي، والزاوية بين متجهين صفحة 22	
13	$\vec{u}\cdot\vec{v}=2(3)-5(-1)=11$
14	$\vec{m}\cdot\vec{n}=-3(8)-4(6)=-48$
15	$\vec{r}\cdot\vec{s}=-5(2)+4(3)=2$
16	$\vec{q}\cdot\vec{p}=11(-4)+8(-5)=-84$
17	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$ $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=3(5)+7(1)=22$ $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{22}{\sqrt{58}\sqrt{26}}\right)\approx 55.5°$

18	$\lvert\vec{\mathbf{c}}\rvert = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\lvert\vec{\mathbf{d}}\rvert = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ $\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{d}} = 2(-6) - 3(9) = -39$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{d}}}{\lvert\vec{\mathbf{c}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{d}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-39}{\sqrt{13}\sqrt{117}}\right) = \cos^{-1}(-1) = 180°$ ملحوظة: يمكن ملاحظة أن $\vec{\mathbf{d}} = -3\vec{\mathbf{c}}$ ، ومنه استنتاج أن قياس الزاوية بينهما هو $180°$ لأن لهما اتجاهان متعاكسان.
19	$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = 4(3n-4) + n(-10) = 0$ $\Rightarrow 12n - 16 - 10n = 0 \Rightarrow n = 8$

الدرس الأول: المتجهات في الفضاء

1	
2	
3	
4	
5	$A(3,0,6)$
6	$C(0,5,6)$

7	$D(0,0,6)$
8	$F(3,5,0)$
9	مركزه هو منتصف $\overline{OB}$ وهو: $\left(\frac{0+3}{2},\frac{0+5}{2},\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},3\right)$
10	$\overrightarrow{AB}=\langle 6,4,-3\rangle, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{36+16+9}=\sqrt{61}$
11	$\overrightarrow{EF}=\langle 3,4,-12\rangle, \lvert\overrightarrow{EF}\rvert=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$
12	$\overrightarrow{GH}=\langle 12,4,6\rangle, \lvert\overrightarrow{GH}\rvert=\sqrt{144+16+36}=\sqrt{196}=14$
13	$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{64+25+45}=\sqrt{134}$ ليكن $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AC}$ ، فإنّ: $\hat{\mathbf{u}}=\frac{1}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\sqrt{134}}(8\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}-3\sqrt{5}\hat{\mathbf{k}})=\frac{8}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{5}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{j}}-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{\mathbf{k}}$
14	$\lvert\mathbf{v}\rvert=\sqrt{25+16+400}=\sqrt{441}=21$ $\Rightarrow \hat{\mathbf{v}}=\frac{1}{21}\langle -5,4,20\rangle=\langle\frac{-5}{21},\frac{4}{21},\frac{6}{21}\rangle$ $\hat{\mathbf{v}}$هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$
15	$\lvert\mathbf{v}\rvert=\sqrt{16+144+9}=13$ $\Rightarrow \hat{\mathbf{v}}=\frac{4}{13}\hat{\mathbf{i}}-\frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}+\frac{3}{13}\hat{\mathbf{k}}$ $\hat{\mathbf{v}}$هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ ، إذن، المتجه الذي له اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ نفسه ومقداره 52 هو $52\,\hat{\mathbf{v}}$ ويساوي: $52\left(\frac{4}{13}\hat{\mathbf{i}}-\frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}+\frac{3}{13}\hat{\mathbf{k}}\right)=16\hat{\mathbf{i}}-48\hat{\mathbf{j}}+12\hat{\mathbf{k}}$
16	$2\vec{\mathbf{u}}+4\vec{\mathbf{v}}=2\langle 3,5,-7\rangle+4\langle -4,3,-6\rangle=\langle -10,22,-38\rangle$
17	$3\vec{\mathbf{u}}-2\vec{\mathbf{v}}=3\langle 3,5,-7\rangle-2\langle -4,3,-6\rangle=\langle 17,9,-9\rangle$
18	$a\langle 3,5,-7\rangle+5\langle -4,3,-6\rangle=\langle 3a-20,5a+15,-7a-30\rangle$ $\Rightarrow \langle 3a-20,5a+15,-7a-30\rangle=\langle -2,b,c\rangle$ $\Rightarrow 3a-20=-2$ و $5a+15=b$ و $-7a-30=c$ $\Rightarrow a=6$ و $b=45$ و $c=-72$

19	$\frac{AP}{PB}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{BP}{BA}=\frac{3}{8}$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=2\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{8}(-2\vec{\mathbf{b}}+2\vec{\mathbf{a}})$ $=\left(2-\frac{3}{4}\right)\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{4}\vec{\mathbf{a}}=\frac{5}{4}\vec{\mathbf{b}}+\frac{3}{4}\vec{\mathbf{a}}$ $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(5\vec{\mathbf{b}}+3\vec{\mathbf{a}})\Rightarrow k=\frac{1}{4}$
20	ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$ $\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\Rightarrow\overrightarrow{LN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$ $\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LN}$ $=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL})$ $=\langle-3,4,-5\rangle+\frac{1}{3}\langle3,-6,9\rangle$ $=\langle-2,2,-2\rangle$ 
21	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ $\Rightarrow-\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=-6\hat{\mathbf{i}}+7\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $(1)+(2): 2\vec{\mathbf{b}}=-4\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$ $\Rightarrow\vec{\mathbf{b}}=-2\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ $(1)-(2): 2\vec{\mathbf{a}}=8\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}\Rightarrow\vec{\mathbf{a}}=4\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ 

22	$p\vec{\mathbf{a}} + q\vec{\mathbf{b}} + r\vec{\mathbf{c}} = p\langle 1,0,4\rangle + q\langle 2,0,-3\rangle + r\langle -5,3,1\rangle$ $= \langle p+2q-5r, 3r, 4p-3q+r\rangle = \langle 28,-12,-5\rangle$ $3r = -12 \Rightarrow r = -4$ $p+2q-5r = 28 \Rightarrow p+2q = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $4p-3q+r = -5 \Rightarrow 4p-3q = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $(1)\times 4-(2): 11q = 33 \Rightarrow q = 3 \quad , p = 2$
23	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 6\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{c}}$
24	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -6\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{c}}$
25	$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU} = 6\vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 6\vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{3}(6\vec{\mathbf{c}}) = 6\vec{\mathbf{a}} + 4\vec{\mathbf{c}}$
26	$\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(6\vec{\mathbf{c}}) + \frac{1}{2}(-6\vec{\mathbf{a}}) = 2\vec{\mathbf{c}} - 3\vec{\mathbf{a}}$
27	$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - 6\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}(6\vec{\mathbf{a}}) - 6\vec{\mathbf{c}} = 3\vec{\mathbf{a}} - 6\vec{\mathbf{c}}$
28	$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS} = 6\vec{\mathbf{c}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} = 6\vec{\mathbf{c}} + \frac{3}{5}(6\vec{\mathbf{a}} - 6\vec{\mathbf{c}}) = \frac{18}{5}\vec{\mathbf{a}} + \frac{12}{5}\vec{\mathbf{c}}$
29	$\overrightarrow{US} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}(-6\vec{\mathbf{c}}) + \frac{2}{5}(-6\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{c}}) = -\frac{12}{5}\vec{\mathbf{a}} - \frac{8}{5}\vec{\mathbf{c}}$
30	$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{5}(-6\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{c}}) + 6\vec{\mathbf{a}} = \frac{12}{5}\vec{\mathbf{a}} + \frac{18}{5}\vec{\mathbf{c}}$
31	$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OA} + h\overrightarrow{AB}$ $= \overrightarrow{OA} + h(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$ $= \vec{\mathbf{a}} + h(-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$ $= \vec{\mathbf{a}} - h\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{b}}$ $= (1-h)\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{b}}$

32	$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PQ}$ $=\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ})$ $=\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ})$ $=\overrightarrow{OP}+k(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB})$ $=\frac{3}{5}\vec{\mathbf{a}}+k\left(-\frac{3}{5}\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}}\right)$ $=\frac{3}{5}\vec{\mathbf{a}}-\frac{3}{5}k\vec{\mathbf{a}}+3k\vec{\mathbf{b}}$ $=\frac{3}{5}(1-k)\vec{\mathbf{a}}+3k\vec{\mathbf{b}}$
33	في السؤالين السابقين وجدنا أنّ: $\overrightarrow{OR}=(1-h)\vec{\mathbf{a}}+h\vec{\mathbf{b}}$ $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}(1-k)\vec{\mathbf{a}}+3k\vec{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow (1-h)\vec{\mathbf{a}}+h\vec{\mathbf{b}}=\frac{3}{5}(1-k)\vec{\mathbf{a}}+3k\vec{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow 1-h=\frac{3}{5}(1-k), \quad h=3k$ $\Rightarrow 1-3k=\frac{3}{5}(1-k)$ $5-15k=3-3k\Rightarrow 2=12k$ $\Rightarrow k=\frac{1}{6}, h=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
34	$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PQ}$ $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}}=\frac{1}{6}\Rightarrow \overrightarrow{PR}:\overrightarrow{PQ}=1:6$

1	$\overrightarrow{AB} = \langle -7,2,7 \rangle$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,5,-3 \rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 14,-4,-14 \rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle -5,-3,10 \rangle$ بما أن: $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ إذن: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ لكن لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$ نظرًا لأن النسبة بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، لذلك $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$ و الشكل $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.
2	$\overrightarrow{AB} = \langle -6,-3,-2 \rangle$ $\overrightarrow{BC} = \langle -14,-1,23 \rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 6,3,2 \rangle$ $\overrightarrow{DA} = \langle 14,1,-23 \rangle$ $\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BC} = (-1)\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$ إذن، الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأن فيه زوجين من الأضلاع المتوازية.
3	يمكن الحل بالاستناد للتوازي: $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $= \langle 3,1,5 \rangle + \langle 2,3,1 \rangle - \langle 6,5,4 \rangle = \langle -1,-1,2 \rangle$ $\Rightarrow D(-1,-1,2)$
4	$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT} = 2\vec{\mathbf{b}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} = 2\vec{\mathbf{b}} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) = 2\vec{\mathbf{b}} + \frac{1}{6}(-2\vec{\mathbf{b}} + 5\vec{\mathbf{a}})$ $= \left(2 - \frac{2}{6}\right)\vec{\mathbf{b}} + \frac{5}{6}\vec{\mathbf{a}} = \frac{10}{6}\vec{\mathbf{b}} + \frac{5}{6}\vec{\mathbf{a}} = \frac{5}{6}(2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}})$ $\Rightarrow \overrightarrow{OT} = \frac{5}{6}(2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}})$ $\Rightarrow \overrightarrow{OT} \parallel (2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}})$
5	$\overrightarrow{OS} = 3\overrightarrow{OR} = 3(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}) = 3\left(\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}\right)$ $= 3\vec{\mathbf{a}} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$ $= 3\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ $= 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

6	$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT} = -\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = -\vec{\mathbf{a}} + (2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow \overrightarrow{PT} = (-1)\overrightarrow{PS}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة P نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط T, P, S تقع على استقامة واحدة.
7	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = 8\vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = 8\vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = 8\vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{5}(-8\vec{\mathbf{a}} + 7\vec{\mathbf{c}})$ $= \left(8 - \frac{16}{5}\right)\vec{\mathbf{a}} + \frac{14}{5}\vec{\mathbf{c}} = \frac{24}{5}\vec{\mathbf{a}} + \frac{14}{5}\vec{\mathbf{c}} = \frac{2}{5}(12\vec{\mathbf{a}} + 7\vec{\mathbf{c}})$
8	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = 7\vec{\mathbf{c}} + 12\vec{\mathbf{a}}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}(12\vec{\mathbf{a}} + 7\vec{\mathbf{c}}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة.
9	وجدنا في السؤال السابق أن: $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ $\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OP + PB} = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow 5\,OP = 2\,OP + 2PB \Rightarrow 3\,OP = 2PB$ $\Rightarrow \frac{OP}{PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OP:PB = 2:3$
10	$\vec{\mathbf{r}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}} + t(4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) = 2\hat{\mathbf{i}} + (3 + 4t)\hat{\mathbf{j}} - (5 + 2t)\hat{\mathbf{k}}$
11	$\vec{\mathbf{r}} = \langle 2, -7, 11\rangle + t\langle -4, 5, 8\rangle = \langle 2 - 4t, -7 + 5t, 11 + 8t\rangle$
12	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 6 - 1, 19 - (-7)\rangle = \langle 5, 26\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle 1, -7\rangle + t\langle 5, 26\rangle = \langle 1 + 5t, -7 + 26t\rangle$
13	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 7 - (-5), 13 - 4, -8 - 15\rangle = \langle 12, 9, -23\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 4, 15\rangle + t\langle 12, 9, -23\rangle = \langle -5 + 12t, 4 + 9t, 15 - 23t\rangle$

14	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 13-5, 10-22, 3-(-8)\rangle = \langle 8,-12,11\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Longrightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle 5,22,-8\rangle + t\langle 8,-12,11\rangle = \langle 5+8t, 22-12t, -8+11t\rangle$
15	$\vec{\mathbf{v}} = \langle 9-0, 4-2, 6-(-5)\rangle = \langle 9,2,11\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Longrightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle 0,2,-5\rangle + t\langle 9,2,11\rangle = \langle 9t, 2+2t, -5+11t\rangle$
16	تقع النقطة $(3,7,11)$ على المستقيم l إذا وُجد عدد حقيقي t حيث: $\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 3,7,11\rangle$ $\Longrightarrow -5+3t=3$ و $8-2t=7$ و $4+9t=11$ $\Longrightarrow t=\frac{8}{3}$, $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{7}{9}$ لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث، إذن: النقطة $(3,7,11)$ لا تقع على المستقيم l.
17	تقع النقطة $(1.b,c)$ على المستقيم l ، إذن تؤجد قيمة للوسيط t تحقق المعادلة الآتية: $\langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle = \langle 1,b,c\rangle$ $-5+3t=1 \Longrightarrow t=2$ $8-2t=b \Longrightarrow 8-4=b \Longrightarrow b=4$ $4+9t=c \Longrightarrow 4+18=c \Longrightarrow c=22$
18	الإحداثي y للنقطة الواقعة في المستوى xz هو 0 نجد قيمة t التي تحقق المعادلة $8-2t=0$، وهي $t=4$ ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوىxz نعوض $t=4$ في معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle \Longrightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle -5+12, 8-8, 4+36\rangle = \langle 7,0,40\rangle$ إذن، إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz هي: $(7,0,40)$

19	يتوازى المستقيمان إذا توازى اتجاهاهما، أي: $\langle 4, a, -12\rangle \parallel \langle 3, -2, -9\rangle$ $\Rightarrow \langle 4, a, -12\rangle = k\langle 3, -2, -9\rangle \quad , k \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow 4 = 3k \Rightarrow k = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow a = -2k = \frac{4}{3}(-2) = -\frac{8}{3}$
20	النقاط $A(7,1,q), V(2,5,-3), U(p,-3,-1)$ على استقامة واحدة: $\Rightarrow \overrightarrow{AV} \parallel \overrightarrow{VU} \Rightarrow \overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{VU}\, , k \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow \langle -5,4,-3-q\rangle = k\langle p-2,-8,2\rangle$ $4 = -8k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ $-5 = k(p-2) \Rightarrow p = 12$
21	$\overrightarrow{VU} = \langle 12-2, -3-5, -1-(-3)\rangle = \langle 10,-8,2\rangle$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 10,-8,2\rangle$، ويمكن تبسيطه إلى $\langle 5,-4,1\rangle$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,5,-3\rangle + t\langle 5,4,1\rangle$
22	من السؤال 20 نجد أن: $-3-q = 2k \Rightarrow -3-q = -1 \Rightarrow q = -2$
23	لإيجاد متجه موقع النقطة D نعوض $\lambda = 2$ في معادلة l_1 $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3+2, -2+2(2), 4-2\rangle = \langle 5,2,2\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 3,2,-1\rangle$ إذن، معادلة المستقيم المطلوب هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5,2,2\rangle + t\langle 3,2,-1\rangle$

24	اتجاه l_1 : $\langle 1,-1,-2\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$ اتجاه l_2 : $\langle -1,0,1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 1,-1,-2\rangle = k\langle -1,0,1\rangle$ يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u يحققان: $\langle 4+t, 3-t, 3-2t\rangle = \langle 5-u, 1, u\rangle$ $\Rightarrow 3-t=1 \Rightarrow t=2$ $\Rightarrow 4+t=5-u \Rightarrow t+u=1 \Rightarrow 2+u=1 \Rightarrow u=-1$ $\Rightarrow 3-2t=u \Rightarrow 2t+u=3$ $2(2)+(-1) \overset{?}{=} 3$ $3=3$ ✓ تحققت المعادلات الثلاث للقيمتين $t=2, u=-1$ ، فالمستقيمان متقاطعان، ونجد نقطة تقاطعهما بتعويض $t=2$ في معادلة l_1 $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4,3,3\rangle + 2\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 6,1,-1\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $(6,1,-1)$
25	اتجاه l_1 : $\langle 2,2,3\rangle$ معادلة l_1 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,1,-2\rangle + t\langle 2,2,3\rangle$ اتجاه l_2 : $\langle 2,1,-1\rangle$ معادلة l_2 : $\vec{\mathbf{r}} = \langle 9,6,-2\rangle + u\langle 2,1,-1\rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 2,2,3\rangle = k\langle 2,1,-1\rangle$ يتقاطع المستقيمان إذا وجد عددان حقيقيان t, u بحيث: $\langle 3+2t, 1+2t, -2+3t\rangle = \langle 9+2u, 6+u, -2-u\rangle$ $\Rightarrow 3+2t=9+2u \Rightarrow t-u=3 \ldots\ldots (1)$ $1+2t=6+u \Rightarrow 2t-u=5 \ldots\ldots (2)$ $-2+3t=-2-u \Rightarrow 3t+u=0 \ldots\ldots (3)$ $(2)-(1): t=2 \Rightarrow u=-1$ نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t=2, u=-1$: $3(2)+(-1) \overset{?}{=} 0$ $5=0$ ✗ عبارة غير صحيحة المعادلة غير متحققة، إذن، المستقيمان غير متقاطعين، و غير متوازيين، فهما متخالفان.

$\overrightarrow{AB} = \langle 3, -3, -2 \rangle$

معادلة المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,1,3 \rangle + t\langle 3, -3, -2 \rangle$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \langle 2 + 3t, 1 - 3t, 3 - 2t \rangle$

$AC = 3CB \Rightarrow |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$

$\Rightarrow \sqrt{(2 + 3t - 2)^2 + (1 - 3t - 1)^2 + (3 - 2t - 3)^2} = 3\sqrt{(2 + 3t - 5)^2 + (1 - 3t + 2)^2 + (3 - 2t - 1)^2}$

$\Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$\Rightarrow (2t - 3)(4t - 3) = 0$

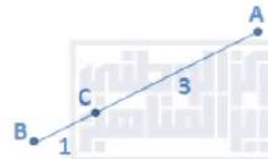
$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right)$ أو $t = \frac{3}{4} \Rightarrow C\left(\frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

26

حلّ آخر:

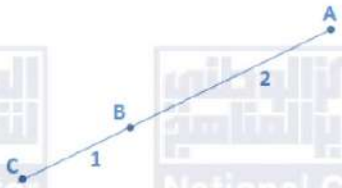
هناك حالتان لمواضع النقاط A, B, C:

الأولى: أن تكون C بين A، وB كما في الرسم الآتي:



وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو: متجه موقع Aزائدًا $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$، أي:

$\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,1,3 \rangle + \frac{3}{4}\langle 3, -3, -2 \rangle = \langle \frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2} \rangle$



والثانية: أن تكون C خارج القطعة المستقيمة$\overline{AB}$ ، ما في الرسم المجاور، وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو :

متجه موقع Aزائدًا $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$، أي:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,1,3 \rangle + \frac{3}{2}\langle 3, -3, -2 \rangle = \langle \frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0 \rangle$$

إذن، الإحداثيات الممكنة للنقطة C هي: $(\frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0)$ ، و $(\frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2})$

نثبت أن كل زوج من أزواج المستقيمات، متقاطعان، ونجد نقاط التقاطع (رؤوس المثلث):

متجه موقع أي نقطة على المستقيمات الثلاثة على التوالي تعطى كما يأتي:

$$\begin{pmatrix}-3+5t\\1-2t\\4-4t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+s\\5+s\\-4-2s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+2q\\-1-5q\\2q\end{pmatrix}$$

أولًا:

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle$

$-3+5t = 1+s \Rightarrow 5t-s=4 \ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t = 5+s \Rightarrow 2t+s=-4 \ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t=-4-2s \Rightarrow 2t-s=4 \ldots\ldots\ldots (3)$

$(1)+(2): 7t=0 \Rightarrow t=0\ , s=-4$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $s=-4\ , t=0$: $2(0)-(-4)=4$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $A(-3,1,4)$

ثانيًا:

$\langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$1+s=2+2q \Rightarrow s-2q=1 \ldots\ldots\ldots (1)$

$5+s=-1-5q \Rightarrow s+5q=-6 \ldots\ldots\ldots (2)$

27 $-4-2s=2q \Rightarrow s+q=-2 \ldots\ldots\ldots (3)$

$(2)-(1): 7q=-7 \Rightarrow q=-1\ , s=-1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $s=-1\ , q=-1$: $(-1)+(-1)=-2$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $B(0,4,-2)$

ثالثًا:

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$-3+5t=2+2q \Rightarrow 5t-2q=5 \ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t=-1-5q \Rightarrow 2t-5q=2 \ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t=2q \Rightarrow 2t+q=2 \ldots\ldots\ldots (3)$

$(3)-(2): 6q=0 \Rightarrow q=0\ , t=1$

نفحص تحقق المعادلة (1) عند $t=1\ , q=0$: $5(1)-2(0)=5$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $C(2,-1,0)$

أثبتنا أنّ كل اثنين من هذه المستقيمات متقاطعان ، فهذه المستقيمات تكوّن مثلثًا، أطوال أضلاعه هي:

$AB=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}$

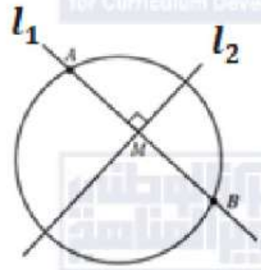
$BC=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$

$AC=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}$

1	$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 4(-2) + 5(3) - 3(-7) = 28$
2	$\vec{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{f}} = -13(-2) + 8(3) - 5(10) = 0$
3	$\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 7(2) + 4(-5) - 9(10) = -96$
4	$\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 15(6) + 24(5) - 7(a) = 0 \Rightarrow a = 30$
5	$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 5(2) + 2(-1) + 3(-2) = 2$ $\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$ $\lvert\vec{\mathbf{b}}\rvert = \sqrt{4+1+4} = 3$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{b}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 83.8°$
6	$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 1(-1) + 1(-1) - 1(4) = -6$ $\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\lvert\vec{\mathbf{b}}\rvert = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{b}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 144.7°$
7	$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \lambda(\lambda) + 4(-3) + \lambda(4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$ $\Rightarrow (\lambda+6)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = -6\ ,\ \lambda = 2$
8	اتجاه $l_1 : \vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -6, 3\rangle$ اتجاه $l_2 : \vec{\mathbf{w}} = \langle 3, -4, 12\rangle$ $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 2(3) - 6(-4) + 3(12) = 66$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{4+36+9} = 7$ $\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert = \sqrt{9+16+144} = 13$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{7(13)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{66}{91}\right) \approx 43.5°$

9	اتجاه l_1: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3-(-2), -5-11, 9-6\rangle = \langle 5,-16,3\rangle$ اتجاه l_2: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4-(-5), 3-9, 8-12\rangle = \langle 9,-6,-4\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 5(9) - 16(-6) + 3(-4) = 129$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290}$ $\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \approx 48.9°$
10	$\vec{\mathbf{m}} = \langle v, 0, -1\rangle$, $\vec{\mathbf{n}} = \langle 2,-1,0\rangle$ $\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = 2v + 0 + 0 = 2v$ $\lvert\vec{\mathbf{m}}\rvert = \sqrt{v^2+1}$ $\lvert\vec{\mathbf{n}}\rvert = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$ $\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \lvert\vec{\mathbf{m}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{n}}\rvert\cos 60°$ $\Rightarrow 2v = \sqrt{5(v^2+1)} \times \frac{1}{2} \Rightarrow 16v^2 = 5v^2 + 5 \Rightarrow v^2 = \frac{5}{11} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}}$ لأن $\left(-\sqrt{\frac{5}{11}}\right)$ لا يجعل قياس الزاوية بين المتجهين $60°$
11	$\overrightarrow{OA} = \langle 3,-2,6\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle -5,4,1\rangle$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -5(3) + 4(-2) + 1(6) = -17$ $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$ $m\angle AOB = \theta$ $\cos\theta = \frac{-17}{7\sqrt{42}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}}$ $Area = \frac{1}{2}(OA)(OB)\sin\theta = \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42})\frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}} = \frac{1}{2}\sqrt{1776} \approx 21.07$

12	$\overrightarrow{EF} = \langle 4,-10,-7\rangle$ معادلة المستقيم l هي : $\vec{r} = \langle 1,-3,5\rangle + t\langle 4,-10,-7\rangle$ إذا كانت M هي مسقط العمود من G على المستقيم l، فإنّ: $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1+4t, -3-10t, 5-7t)$ ويكون: $\overrightarrow{MG} = (-1-4t, -3+10t, -1+7t)$ $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{MG}$ $\Rightarrow \langle 4,-10,-7\rangle \perp \langle -1-4t, -3+10t, -1+7t\rangle$ $\Rightarrow 4(-1-4t) - 10(-3+10t) - 7(-1+7t) = 0$ $\Rightarrow -4-16t+30-100t+7-49t = 0$ $\Rightarrow -165t = -61 \Rightarrow t = \frac{33}{165} = 0.2$ $\Rightarrow M(1.8,-5,3.6)$
13	$GM = \sqrt{(1.8-0)^2+(-5+6)^2+(3.6-4)^2} = \sqrt{4.4} \approx 2.1$
14	مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر $\overline{AC}$ يقسمه إلى مثلثين متطابقين. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6(15) - 2(8) + 11(5) = 129$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{36+4+121} = \sqrt{161}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{225+64+25} = \sqrt{314}$ $m\measuredangle BAC = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \approx 55°$ $Area(ABCD) = 2 \times \frac{1}{2}(AC)(AB)\sin\theta = \sqrt{161}\sqrt{314}\sin 55° \approx 184.2$
15	$\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -q+6-2 = 0 \Rightarrow q = 4$

16	$\langle -4+4u, 10+2u, p-u\rangle = \langle 8-t, 2+3t, -12+2t\rangle$ $-4+4u = 8-t \Rightarrow 4u+t = 12$ ………………………… (1) $10+2u = 2+3t \Rightarrow 2u-3t = -8$ ………………………… (2) $p-u = -12+2t \Rightarrow p = 2t+u-12$ ………………………… (3) $(1)\times 3+(2): 14u = 28 \Rightarrow u = 2\ , t = 4$ وبما أن المستقيمين متقاطعان، تتحقق المعادلة (3) أيضًا عند $u=2\ , t=4$ ويكون: $p=-2$ وتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي $M(4,14,-4)$
17	العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه (نظرية)، والنقطة M (نقطة تقاطع l_1، و l_2) هي نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM}$ $= \langle 9,-1,-14\rangle + 2(\langle 4,14,-4\rangle - \langle 9,-1,-14\rangle)$ $= \langle 9,-1,-14\rangle + 2\langle -5,15,10\rangle$ $= \langle -1,29,6\rangle$ 
18	$\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at\rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle -19+t+2, 14-3t-5, -5+at-8\rangle$ $= \langle -17+t, 9-3t, -13+at\rangle$ $\overrightarrow{TF} \perp l \Rightarrow \langle -17+t, 9-3t, -13+ta\rangle \cdot \langle 1,-3,a\rangle = 0$ $\Rightarrow -17+t-3(9-3t)+a(-13+at) = 0$ $\Rightarrow -17+t-27+9t-13a+a^2t = 0$ $\Rightarrow (10+a^2)t = 13a+44$ $\Rightarrow t = \dfrac{13a+44}{10+a^2}$

19	$\frac{13a+44}{10+a^2} = 5 \Rightarrow 5a^2 + 50 = 13a + 44$ $\Rightarrow 5a^2 - 13a + 6 = 0 \Rightarrow (5a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{5}, a = 2$ $\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at \rangle$ $a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+10 \rangle = \langle -14, -1, 5 \rangle$ $a = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+3 \rangle = \langle -14, -1, -2 \rangle$
20	متجه الموقع لأي نقطة على المستقيم l هو: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle$ تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle = \langle -4, 5, -1 \rangle$ $\Rightarrow 3+7u = -4 \quad , \quad -2-7u = 5 \quad , \quad 4+5u = -1$ $\Rightarrow u = -1 \quad , \quad u = -1 \quad , \quad u = -1$ إذن، C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u = -1$ في معادلته المتجهة.
21	$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5-(-2), 6-4 \rangle = \langle -2, -3, 2 \rangle$ $\Rightarrow \mathbf{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 2 \rangle$ هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب.
22	$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1 \rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle$ $\angle CDA$ قائمة، فإن $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ وهذا يعني أنّ $\overline{CD}$ يعامد $\overleftrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \langle -2, -3, 2 \rangle \cdot \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0$ $\Rightarrow -14 + 4t + 21 + 9t + 10 + 4t = 0$ $\Rightarrow 17t = -17 \Rightarrow t = -1$ $\overrightarrow{OD} = \langle 3+2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$ $\Rightarrow D(5,1,2)$

23	اتجاه المستقيم الأول l_1 : $\langle 2,-1,-2\rangle$ اتجاه المستقيم الثاني l_2 : $\langle 1,-2,2\rangle$ المستقيمان متعامدان لأن: $\langle 2,-1,-2\rangle\cdot\langle 1,-2,2\rangle = 2(1)-1(-2)-2(2)=0$
24	يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t, u تحقق: $\langle 8+2t, 2-t, -2t\rangle = \langle -9+u, 21-2u, -4+2u\rangle$ $8+2t=-9+u \Longrightarrow 2t-u=-17 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $2-t=21-2u \Longrightarrow 2u-t=19 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $-2t=-4+2u \Longrightarrow 2t+2u=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $(3)-(1): 3u=21 \Longrightarrow u=7\ ,\quad t=-5$ نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم: $2(7)-(-5)=19$ ✓ إذن، يتقاطع المستقيمان، ونجد نقطة التقاطع بتعويض $u=7$ في معادلة l_2: $\vec{r}=\langle -9+7, 21-14, -4+14\rangle = \langle -2,7,10\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $E(-2,7,10)$

الوحدة السادسة: الإحصاء والاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد التوافيق صفحة 31
1	$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$
2	$\binom{50}{1} = \frac{50!}{1!\,49!} = 50$
3	$\binom{100}{99} = \frac{100!}{99!\,1!} = 100$
4	$\binom{1000}{0} = \frac{1000!}{0!\,1000!} = 1$
5	$\binom{20}{20} = \frac{20!}{20!\,0!} = 1$
	إيجاد التباديل صفحة 31
6	$P(10, 9) = \frac{10!}{1!} = 10! = 3628800$
7	$P(8, 0) = \frac{8!}{8!} = 1$
8	$P(7, 7) = \frac{7!}{0!} = 7! = 5040$
9	$P(6, 1) = \frac{6!}{5!} = \frac{6(5!)}{5!} = 6$
10	$P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = \frac{5(4)3!}{3!} = 20$

<table>
<tr><th colspan="2">المتغيرات العشوائية، وتوزيعها الاحتمالي صفحة 32</th></tr>
<tr><td>11</td><td>

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(X=0) = P(TTTT) = \frac{1}{16}$

$P(X=1) = P(\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X=2) = P(\{TTHH, THHT, HTHT, HTTH, THTH, HHTT\}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(\{THHH, HHHT, HTHH, HHTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X=4) = P(HHHH) = \frac{1}{16}$

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

</td></tr>
<tr><td>12</td><td>

$X \in \{1, 2, 3\}$

$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{7}$, $P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{4}{7}$, $P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{2}{7}$

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

</td></tr>
</table>

13

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(X=0) = P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X=1) = P(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\})$
$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(X=2) = P(\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\})$
$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(X=3) = P(\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X=4) = P(\{(1,5),(2,6),(5,1),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(X=5) = P(\{(1,6),(6,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لمجموعة من المشاهدات صفحة 33

14

$\mu = \frac{1+1+2+3+4+5+1-1-5+3}{10} = 1.4$

$\sum x^2 = 92$

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\mu)^2 = \frac{92}{10} - 1.96 = 7.24$

$\sigma = \sqrt{7.24} \approx 2.7$

15

$\mu = \frac{-2-3-4+5+2+1+4+5}{8} = 1$

$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n} = \frac{9+16+25+16+1+0+9+16}{8} = 11.5$

$\sigma = \sqrt{11.5} \approx 3.4$

	إيجاد التوقع، والتباين، والانحراف المعياري صفحة 34
16	$E(x) = \sum xp(x) = -0.2$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.4) + 1(0.6) - (-0.2)^2 = 0.96$ $\sigma = \sqrt{0.96} \approx 0.98$
17	$\sum p(x) = 1 \Rightarrow 0.2 + 0.1 + 0.3 + k = 1 \Rightarrow k = 0.4$ $E(x) = \sum xp(x) = 1.9$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.1) + 4(0.3) + 9(0.4) - (1.9)^2 = 1.29$ $\sigma = \sqrt{1.29} \approx 1.14$

1	$P(X=4)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{4096}\approx 0.084$
2	$P(X\le 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3=0.414$
3	$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=1)$ $=1-\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$
4	$P(3\le X\le 7)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$ $=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^3+\left(\frac{7}{8}\right)^4+\left(\frac{7}{8}\right)^5+\left(\frac{7}{8}\right)^6\right)\approx 0.373$
5	$P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}=0.125$
6	$P(X>5)=1-P(X\le 5)$ $=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$ $=1-\left(\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4\right)$ $\approx 1-0.487\approx 0.513$ ويمكن حسابه باستعمال القاعدة: $P(X>x)=(1-p)^x$ $P(X>5)=\left(1-\frac{1}{8}\right)^5=\left(\frac{7}{8}\right)^5\approx 0.513$
7	$P(1<X<3)=P(X=2)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{64}\approx 0.109$
8	$P(4<X\le 6)=P(X=5)+P(X=6)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5\approx 0.137$
9	$P(X=4)=\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1\approx 0.077$
10	$P(X\ge 5)=P(X=5)=\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\approx 0.010$
11	$P(X\le 3)=1-\left(P(X=4)+P(X=5)\right)$ $=1-\left(\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\right)\approx 0.913$
12	$P(3<X\le 5)=P(X=4)+P(X=5)$ $=\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\approx 0.087$

13	$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$ $=\binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2+\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0$ ≈ 0.317
14	$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5+\binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4+\binom{5}{2}(0.4)^2(0.6)^3$ ≈ 0.683
15	$P(2\le X<5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\binom{5}{2}(0.4)^2(0.6)^3+\binom{5}{3}(0.4)^3(0.6)^2+\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1$ ≈ 0.653
16	$P(5<X<8)=0$
17	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.45}=\frac{20}{9}\approx 2.22$
18	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}=2.5$
19	$E(X)=np=10(0.2)=2$ $Var(X)=\sigma^2=np(1-p)=10(0.2)(0.8)=1.6$
20	$E(X)=np=150(0.3)=45$ $Var(X)=\sigma^2=np(1-p)=150(0.3)(0.7)=31.5$
21	هذا الاحتمال يساوي احتمال أن السيارات الخمس الأولى جميعها لم تكن صفراء، وبالتالي: $P(X>5)=(0.9)^5\approx 0.590$ و يمكن ملاحظة أن $X\sim Geo(0.1)$ حيث X عدد السيارات التي تمر حتى مرور أول سيارة صفراء، و يكون الاحتمال المطلوب هو: $P(X>5)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\right)$ $=1-0.1(1+0.9+(0.9)^2+(0.9)^3+(0.9)^4)\approx 0.590$
22	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$ $=1-(0.1+0.1(0.9)+0.1(0.9)^2)=0.729$ ويمكن حسابه باستعمال القاعدة: $P(X>x)=(1-p)^x$ $P(X>3)=(1-0.1)^3=(0.9)^3=0.729$
23	ليكن X عدد الأهداف المسجلة في الرميات الـ 15 $\Rightarrow X\sim B(15,0.1)$ $P(X=3)=\binom{15}{3}(0.1)^3(0.9)^{12}\approx 0.129$

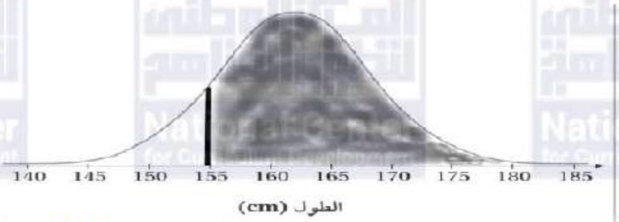
24	ليكن X عدد الطلبة الذين سيحتاجون أوراقًا إضافية من بين الطلبة الثلاثين: $\Rightarrow X \sim B\left(30, \frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow P(X=10) = \binom{30}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{20} \approx 0.002$
25	$P(X=0) = \binom{30}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{0}\left(\frac{2}{5}\right)^{30} = \left(\frac{2}{5}\right)^{30} \approx 1.153 \times 10^{-12}$

الدرس الثاني: التوزيع الطبيعي

1	$\mu_A = 15 > \mu_B = 12$ $\sigma_B > \sigma_A$ وذلك لأن قيم المتغير العشوائي في B أكثر انتشارًا من نظيراتها في المنحنى A
2	$P(0 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < 0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$
3	$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
4	$P(Z < z) = 0.638$ الاحتمال المعطى (0.638) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 0.35$
5	$P(Z > z) = 0.6$ الاحتمال المعطى (0.6) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6 \Rightarrow z = 0.25 \Rightarrow$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.25$
6	$P(0 < Z < z) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < 0) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.95$ الاحتمال المعطى (0.95) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z \approx 1.64$
7	$P(-z < Z < z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - \left(1 - P(Z < z)\right) = 0.8$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9$ الاحتمال المعطى (0.9) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.28$

8	$P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35-30}{10}\right) = P(Z < 0.5) = 0.6915$
9	$P(X > 38.6) = P\left(Z > \frac{38.6-30}{10}\right) = P(Z > 0.86) = 1 - P(Z < 0.86)$ $= 1 - 0.8051 = 0.1949$
10	$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-30}{10}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0.8413$
11	$P(35 < X < 40) = P\left(\frac{35-30}{10} < Z < \frac{40-30}{10}\right) = P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$ $= 0.8413 - 0.6915 = 0.1498$
12	$P(15 < X < 32) = P\left(\frac{15-30}{10} < Z < \frac{32-30}{10}\right) = P(-1.5 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5) = P(Z < 0.2) - \left(1 - P(Z < 1.5)\right)$ $= P(Z < 0.2) + P(Z < 1.5) - 1 = 0.5793 + 0.9332 - 1 = 0.5125$
13	$P(17 < X < 19) = P\left(\frac{17-30}{10} < Z < \frac{19-30}{10}\right) = P(-1.3 < Z < -1.1)$ $= P(Z < -1.1) - P(Z < -1.3) = 1 - P(Z < 1.1) - \left(1 - P(Z < 1.3)\right)$ $= P(Z < 1.3) - P(Z < 1.1) = 0.9032 - 0.8643 = 0.0389$
14	$P(X < x) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.3$ الاحتمال المعطى (0.3) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7$ $\Rightarrow z = 0.52$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.52$ $\Rightarrow \frac{x-30}{10} = -0.52 \Rightarrow x = 24.8$

15	$P(X > x) = 0.6915 \Rightarrow P(Z > z) = 0.6915$ الاحتمال المعطى (0.6915) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6915 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6915 \Rightarrow z = 0.5$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.5$ $\Rightarrow \frac{x-30}{10} = -0.5 \Rightarrow x = 25$
16	$P(X < x) = 0.7516 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7516$ الاحتمال المعطى (0.7516) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 0.67$ $\Rightarrow \frac{x-30}{10} = 0.67 \Rightarrow x = 36.7$
17	$P(X > x) = 0.05 \Rightarrow P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z > z) = 0.05 \Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.05 = 0.95$ $\Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow \frac{x-30}{10} = 1.64 \Rightarrow x = 46.4$
18	$P(X > 1020) \Rightarrow P\left(Z > \frac{1020-1000}{10}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تزيد كتلتها عن 1020 kg هي 2.28%
19	$P(990 < X < 1010) \Rightarrow P\left(\frac{990-1000}{10} < Z > \frac{1010-1000}{10}\right)$ $= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$ $= 2P(Z < 1) - 1$ $= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح كتلتها بين 990 kg ، و1010 kg هي 68.26%

20	$P(X < 1020) = P\left(Z < \frac{1020 - 1000}{10}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$ إذن، النسبة المئوية للحاويات الصالحة للشحن هي 97.72%
21	
22	$P(X > 155) \Rightarrow P\left(Z > \frac{155 - 162}{6.3}\right) \approx P(Z > -1.11) = P(Z < 1.11)$ $= 0.8665$
23	$P(X > 169) \Rightarrow P\left(Z > \frac{169 - 162}{6.3}\right) \approx P(Z > 1.11) = 1 - 0.8665$ $= 0.1335$

تتنوع الإجابات لوجود عدد لانهائي من الفترات $[z_1, z_2]$ والتي يقع ضمنها النسبة المعطاة من الطالبات.

هذه بعض الإجابات المحتملة:

- نختار البحث عن فترة على الشكل $[-1, z]$ بحيث: $P(-1 < Z < z) = 0.5$

$$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -1) = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) - \big(1 - P(Z < 1)\big) = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) - 1 = 0.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) = 1.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) + 0.8413 = 1.5$$
$$\Rightarrow P(Z < z) = 0.6587$$
$$\Rightarrow z = 0.4$$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1, 0.4]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1 \Rightarrow x_1 = 155.7$$
$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.4 \Rightarrow x_2 = 164.52$$

إذن، الفترة $[155.7, 164.52]$ من الأطوال تحوي 50% من الطالبات.

- نختار أيضًا الحل السهل $Z > 0$ والذي يشمل 50% من البيانات، أي الفترة $Z \in [0, \infty)$

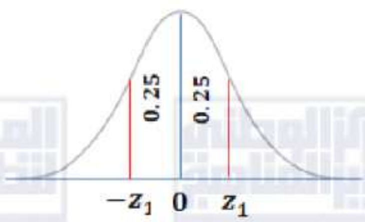
24 وفي قيم X (الأطوال)، هذا يعني الفترة $[162, \infty)$

وبما أن المساحات عندما $Z > 3.4$ صغيرة جدًا، كما يظهر في جدول التوزيع الطبيعي المعياري،

فيمكن إهمالها ويمكن اعتبار أن 50% من الطالبات تقع أطوالهن ضمن $0 < Z < 3.4$ التي تقابل

فترة الأطوال$[162 \text{ cm}, 183.42 \text{ cm}]$. (لأن $x_2 = 162 + 3.4 \times 6.3 = 183.42$)

- ويمكننا أن نأخذ فترة على الصورة $[-z_1, z_1]$تقع فيها أطوال 50% من الطالبات كما هو مبين في الرسم الآتي:



نلاحظ من الرسم أن المساحة على يسار z_1 تساوي0.75

$$P(Z < z_1) = 0.0.75 \Rightarrow z_1 = 0.67$$
$$\Rightarrow x_1 = 0.67(6.3) + 162 \approx 166.2$$
$$\Rightarrow x_2 = -0.67(6.3) + 162 \approx 157.8$$

إذن، إحدى الفترات التي تقع ضمنها أطوال 50% من الطالبات هي: $(157.8 \text{ cm}, 166.2 \text{ cm})$

	نختار أولًا البحث عن فترة من الشكل $[-2, z]$ حيث: $P(-2 < Z < z) = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -2) = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) - \big(1 - P(Z < 2)\big) = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 2) = 1.815$ $\Rightarrow P(Z < z) + 0.9772 = 1.815$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8378$ $\Rightarrow z = 0.98$ إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-2, 0.98]$ $\frac{x_1 - 162}{6.3} = -2 \Rightarrow x_1 = 149.4$ $\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.98 \Rightarrow x_2 \approx 168.2$
25	إذن، الفترة $[149.4, 168.2]$ من الأطوال تحوي 81.5% من الطالبات. نختار أيضًا البحث عن فترة على الشكل $[-z, z]$ بحيث $P(-z < Z < z) = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) - \big(1 - P(Z < z)\big) = 0.815$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.815$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9075$ $\Rightarrow z = 1.32$ إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1.32, 1.32]$ $\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1.32 \Rightarrow x_1 = 153.684 \approx 153.7$ $\frac{x_2 - 162}{6.3} = 1.32 \Rightarrow x_2 = 170.316 \approx 170.3$ إذن، الفترة $[153.7, 170.3]$ من الأطوال تحوي تقريبًا 81.5% من الطالبات.