الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب التمارين

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

نور محمد حسان

إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بناءً على قـرار المجلس الأعـلى للمركز الوطني لتطويـر المناهـج في جلسـته رقم (2021/5)، تاريـخ 2021/12/7م، وقرار مجلس التربيـة والتعليم رقـم (2021/170)، تاريخ 2021/12/21م، بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2021.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
ISBN: 978 - 9923 - 41 - 387 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2084)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر: الفـرع الأدبـي: كتـاب التماريـن: (الفصـل الدراسـي الثانـي)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.–ط2؛ مزيـدة ومنقحـة.– عمّـان: المركـز، 2022

ج2(31) ص.

ر.إ.: **2022/4/2084**

الواصفات: / تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م

أعيدت طباعته 2022 م – 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتنمي مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم/ المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم البقية لتحلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة إجابته، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 4 الاقترانات المتشعبة

أستعد لدراسة الوحدة 6

الدرس 1 الاقترانات المتشعبة 11

الدرس 2 اقتران القيمة المطلقة 12

الوحدة 5 النهايات والمشتقات

أستعد لدراسة الوحدة 13

الدرس 1 النهايات والاتصال 22

الدرس 2 المشتقة 23

الدرس 3 التزايد والتناقص لكثيرات الحدود 24

قائمة المحتويات

الوحدة 6 المتتاليات والمتسلسلات

أستعد لدراسة الوحدة 25

الدرس 1 المتتاليات والمتسلسلات 28

الدرس 2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية 29

الدرس 3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية 30

الدرس 4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية 31

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

- **إيجاد قيمة الاقتران عند قيمة معطاة** (الدرس 1)

إذا كان $g(x) = 10 - x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

1. أجد $g(-5)$
2. أجد $g(3) + 6$
3. أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

إذا كان $f(x) = 5x - 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4. $f(0)$
5. $f(5)$
6. $25 - f(-2)$
7. $f(2) + f(-1)$

مثال: **إذا كان $f(x) = 2x + 6$، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:**

a) أجد $f(3)$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيط	$= 12$

b) أجد $f(-4) + 10$

بتعويض $x = -4$	$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$
بالتبسيط	$= -2 + 10$
بالتبسيط	$= 8$

c) أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $f(x) = -10$	$-10 = 2x + 6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$-16 = 2x$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$x = -8$

إذن، عندما $x = -8$، فإنَّ $f(x) = -10$

تمثيل الاقتران الخطّيّ بيانيًّا (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

8 $f(x) = 4 - x$

9 $f(x) = x + 2$

10 $f(x) = 2x - 5$

11 $f(x) = -x$

12 $f(x) = 2(1 + x)$

13 $f(x) = 3$

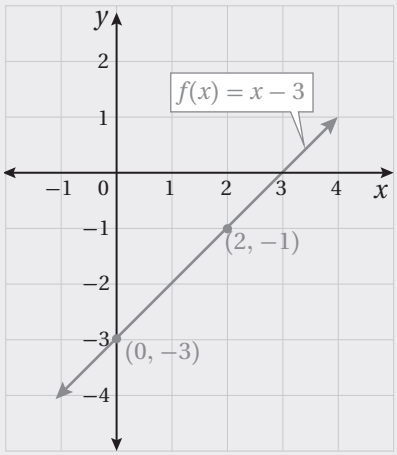
مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = x - 3$ بيانيًّا.

الخطوة 1 أختار بعض قِيَم المدخَلات x، ولتكنْ: 0, 2

الخطوة 2 أُنشئ جدولًا لإيجاد قِيَم المخرَجات المقابلة لهذه المدخَلات

x	$x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
2	$(2) - 3$	-1	$(2, -1)$
0	$(0) - 3$	-3	$(0, -3)$

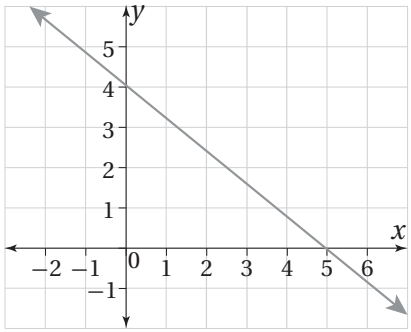
الخطوة 3 أمثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخطّ مستقيم



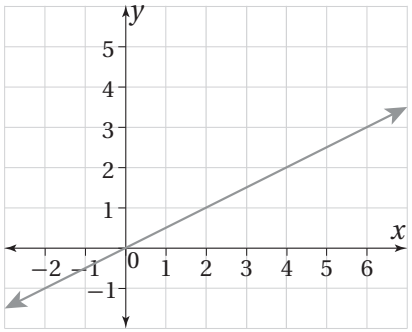
إيجاد معادلة مستقيم من تمثيل بياني معطى (الدرس 1)

أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع:

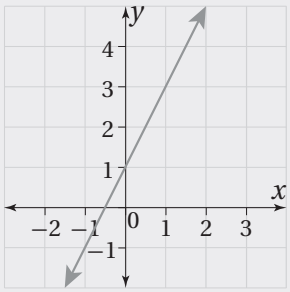
14



15



مثال: أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع.



أجد المقطع y والميل، ثم أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

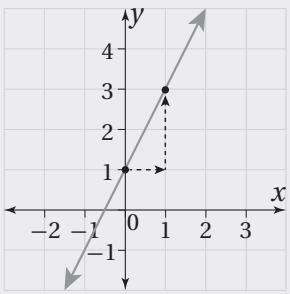
الخطوة 1 أجد المقطع y.

أُلاحِظ أنَّ المستقيم قطع المحور y عند 1

إذن، المقطع y هو $b = 1$

الخطوة 2 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم، ثم أجد مقدار التغيُّر الرأسي والتغيُّر الأفقي بينهما.



أُلاحِظ أنَّ:

عدد الخطوات الأفقية هو 1

عدد الخطوات الرأسية هو 2

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيُّر الرأسي}}{\text{التغيُّر الأفقي}}$$

إذن، ميل المستقيم هو: $m = \frac{2}{1} = 2$

الخطـوة 3 أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

أُعوِّض المقطع y والميل في صيغة الميل والمقطع:

صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$

بتعويض $m = 2$، و $b = 1$ $y = 2x + 1$

إذن، معادلة المستقيم هي: $y = 2x + 1$

• مفهوم القيمة المطلَقة (الدرس 2)

أجد قيمة كلّ من المقادير الآتية:

16 $|17|$

17 $|-32| - 10$

18 $4 + |12|$

19 $3 + |-7|$

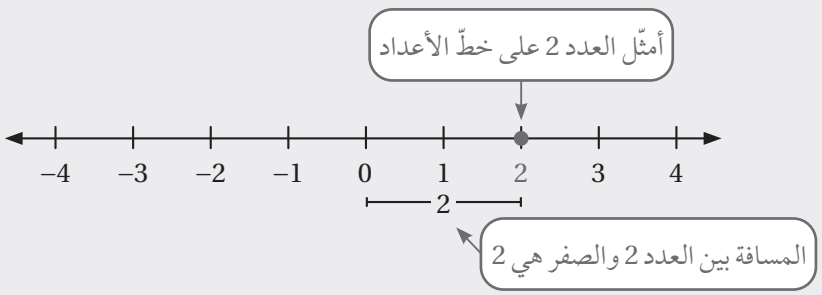
20 $|-8| + |-22|$

21 $|-9| - 2$

مثال: أجد القيمة المطلَقة لكلّ عدد ممّا يأتي:

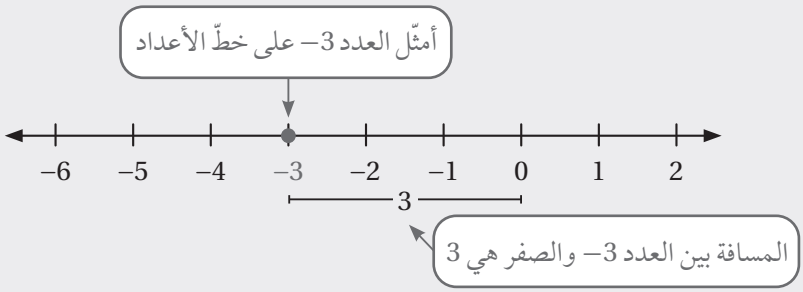
a) العددُ 2

بما أنّ المسافة بَين العدد 2 والصفر هي 2، فإنّ $|2| = 2$.



b) العدد -3

بما أنّ المسافة بين العدد -3 والصفر هي 3، فإنّ $|-3| = 3$.



• إيجاد قيمة مقدار جبريّ يتضمن قيمة مطلَقة (الدرس 2)

أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

22 $|x-2|+10, x=-4$

23 $-2|3x+1|, x=-1$

24 $|3x-5|+|x-1|, x=0$

25 $5|2-x|+4, x=2$

26 $|x|+|-x|, x=-10$

27 $x-4|2x+11|, x=-4$

مثال: **أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:**

a) $|x+3|-8, x=2$

$\|x+3\|-8 = \|2+3\|-8$	بتعويض $x=2$
$= \|5\|-8$	$2+3=5$
$= 5-8$	$\|5\|=5$
$= -3$	بالتبسيط

b) $10-|5-2x|, x=7$

$10-\|5-2x\| = 10-\|5-2(7)\|$	بتعويض $x=7$
$= 10-\|5-14\|$	$2(7)=14$
$= 10-\|-9\|$	$5-14=-9$
$= 10-9$	$\|-9\|=9$
$= 1$	بالتبسيط

الدرس 1

الاقترانات المتشعبة

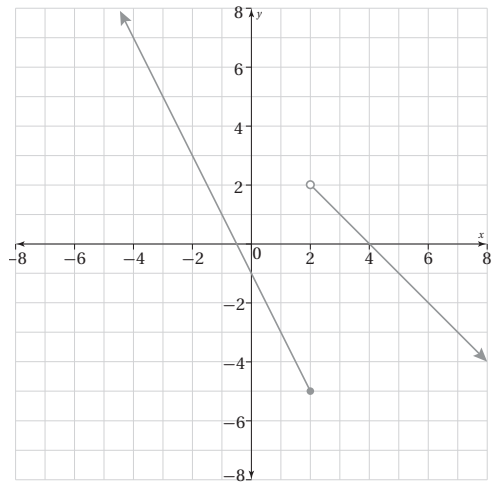
Piecewise functions

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ 1-x, & x\geq 0\end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

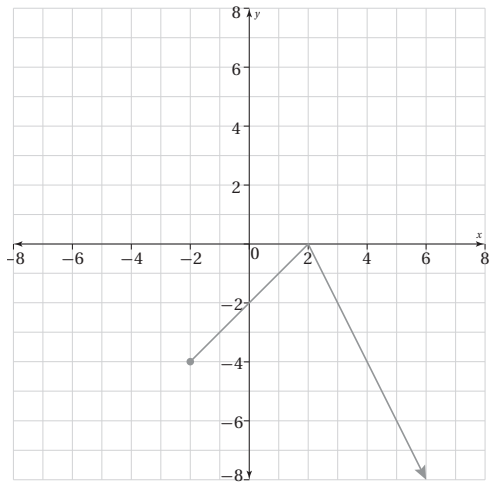
1. أُحدِّد مجال الاقتران $f(x)$.
2. أجد قيمة كلٍّ من: $f(-2)$، و$f(0)$، و$f(1)$.
3. أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.

أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

4.



5.



6. **تأجير سيّارات:** قدَّمت شركة لتأجير السيّارات عرضًا يتضمَّن تأجير أيٍّ من سيّاراتها بمبلغ 15 دينارًا يوميًّا؛ شرط قيادة السيّارة المُستأجَرة مسافة لا تزيد على 300 km في اليوم الواحد. وفي حال تجاوز هذه المسافة في اليوم الواحد، يتعيَّن على المُستأجِر دفع مبلغ 20 دينارًا. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل قيمة استئجار سيّارة من هذه الشركة وقيادتها مسافة x كيلومترًا مدَّة يوم واحد.

7. **خدمات شحن:** تأخذ شركة للشحن مبلغ 12 دينارًا لقاء شحن كل طرد كتلته 5 kg أو أقل، ومبلغ 14 دينارًا عند شحن طرد كتلته أكثر من 5 kg. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل قيمة شحن طرد تتراوح كتلته بين 0 kg و8 kg.

الدرس 2

اقتران القيمة المطلقة

Absolute Value function

إذا كان: $f(x) = |x - 3|$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

1. أُعيد تعريف الاقتران f.
2. أجد كُلًّا من: $f(4)$، و$f(3)$، و$f(-1)$.

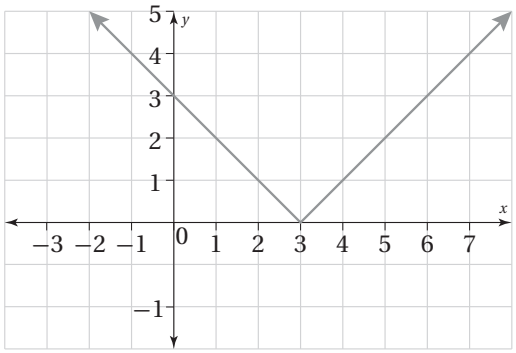
إذا كان: $f(x) = |4 - 2x|$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

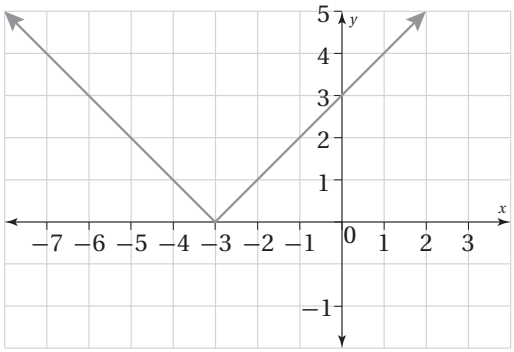
3. أُعيد تعريف الاقتران f.
4. أجد كُلًّا من: $f(3)$، و$f(2)$، و$f(-2)$.

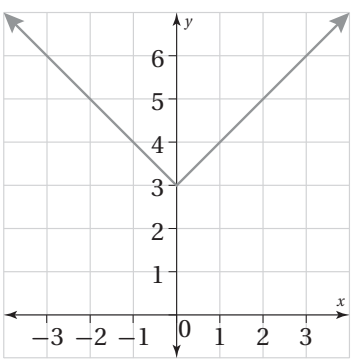
أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

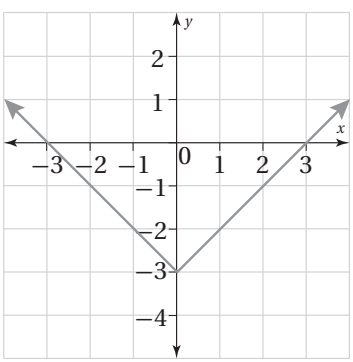
5. $f(x)=|x+1|$
6. $f(x)=|x|+1$
7. $f(x)=|x+2|+1$
8. $f(x)=|x+2|-1$

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

9.


10.


11.


12.


أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

- **تمثيل الاقترانات المتشعبة بيانيًّا، وتحديد المجال والمدى لها** (الدرس 1)

أمثّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ 3x-1, & x\geq 1 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -2\leq x<1 \\ 4, & x\geq 1 \end{cases}$

مثال: أُمثِّل بيانيًّا الاقتران: $f(x)=\begin{cases} x-1, & -1\leq x<2 \\ 2, & x\geq 2 \end{cases}$، وأحدّد مجاله ومداه.

الخطوة 1 أُمثِّل الاقتران: $f(x)=x-1$ عندما $-1\leq x<2$

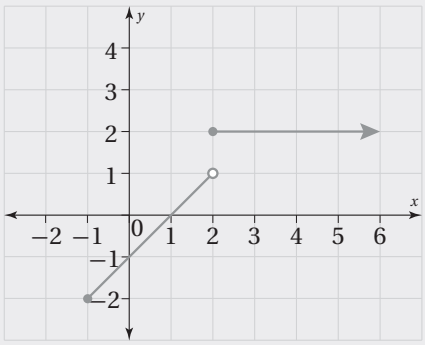
أجد قيمة الاقتران: $f(x)=x-1$ عند طرفي مجاله؛ أيْ عندما $x=-1$، وعندما $x=2$ كما في الجدول الآتي:

x	-1	2
$y=f(x)=x-1$	-2	1
(x,y)	$(-1,-2)$	$(2,1)$

أُعيِّن النقطتين $(-1,-2)$ و $(2,1)$، ثم أصل بينهما بقطعة مستقيمة، وأراعي وضع دائرة صغيرة مفرغة عند $(2,1)$، لماذا؟

الخطوة 2 أُمثِّل الاقتران: $f(x)=2$ عندما $x\geq 2$.

أُلاحِظ أنَّ الاقتران: $f(x)=2$ ثابت؛ لذا فإنَّ تمثيله البياني شعاع أفقي يبدأ عند النقطة $(2,2)$ بدائرة صغيرة مغلقة كما في الشكل الآتي:



إذن، مجال الاقتران f هو: $(-1,\infty)$، ومداه هو: $\{2\}\cup(-2,1]$.

• تحليل المقادير الجبرية (الدرس 1)

أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

3. $3x^2 - 6x$
4. $x^2 - 36$
5. $x^2 + 3x + 2$
6. $x^2 - 5x + 6$
7. $x^2 - x - 2$
8. $2x^2 - 6x + 4$
9. $x^3 - 27$
10. $2x^3 + 128$
11. $16 - x^2$

مثال: **أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:**

a) $\mathbf{3x^3 - 12x}$

$3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$ بإخراج العامل المشترك

$= 3x(x - 2)(x + 2)$ بتحليل الفرق بين مربعين

b) $\mathbf{5x^3 - 5}$

$5x^3 - 5 = 5(x^3 - 1)$ بإخراج العامل المشترك

$= 5(x - 1)(x^2 + x + 1)$ بتحليل الفرق بين مكعبين

c) $\mathbf{3x^2 - 12x - 15}$

$3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5)$ بإخراج العامل المشترك

$= 3(x - 5)(x + 1)$ بتحليل العبارة التربيعية ذات الحدود الثلاثة

d) $\mathbf{x^3 - 6x^2 + 8x}$

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$ بإخراج العامل المشترك

$= x(x - 2)(x - 4)$ بتحليل العبارة التربيعية ذات الحدود الثلاثة

• تبسيط المقادير النسبية (الدرس 1)

أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

12 $\frac{2x+2}{2}$

13 $\frac{16x^2+8x}{2x+1}$

14 $\frac{x-2x^2}{8-16x}$

15 $\frac{x^2-36}{x-6}$

16 $\frac{x^2+7x+12}{x+3}$

17 $\frac{9-3x}{x^2-9}$

مثال: أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{6x+12}{6}$

$\frac{6x+12}{6} = \frac{6(x+2)}{6}$ أُخرج العدد (6) عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= (x+2)$ أقسم كلًّا من البسط والمقام على (6)

b) $\frac{2x^2+2x}{2x}$

$\frac{2x^2+2x}{2x} = \frac{2x\,(x+1)}{2x}$ أُخرج $(2x)$ عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= \frac{\cancel{2x}\,(x+1)}{\cancel{2x}} = x+1$ أقسم البسط والمقام على $(2x)$

c) $\frac{x-1}{x^3-x^2}$

$\frac{x-1}{x^3-x^2} = \frac{x-1}{x^2(x-1)}$ أُحلّل المقام

$= \frac{\cancel{(x-1)}}{x^2\,\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x^2}$ أقسم كلًّا من البسط والمقام على $(x-1)$

الأسس النسبية والجذور (الدرس 2)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّيةٍ في كلّ ممّا يأتي:

18 $p^{\frac{1}{6}}$

19 $\sqrt[8]{u}$

20 $9^{\frac{1}{4}}$

21 $\sqrt[5]{-8}$

22 $w^{\frac{8}{3}}$

23 $\sqrt[6]{v^5}$

24 $16^{\frac{3}{4}}$

25 $\sqrt[5]{(-35)^9}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ ممّا يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $8^{\frac{2}{5}}$

$8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-20}$

$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

- **استعمال قوانين الأسس لتبسيط مقادير عددية** (الدرس 2)

أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

26 $\frac{4^3 \times 8^4}{4^5 \times 8^2}$

27 $3^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$

28 $(7-4)^3 \times 3^{-8}$

29 $\frac{4^2}{4^5}$

مثال: أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

a) 5^{-2}

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ تعريف الأس السالب

$= \frac{1}{25}$ تعريف القوى

b) $\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6}$

$\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6} = \frac{6^5 \times 6^{-2}}{10^6 \times 10^{-3}}$ تعريف الأس السالب

$= \frac{6^3}{10^3}$ قاعدة قسمة القوى

$= \frac{216}{1000} = 0.216$ تعريف القوى

مشتقّة كثيرات الحدود (الدرس 2)

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

30 $f(x) = 2x^3 + 6$

31 $f(x) = x^5 - 5x^2 + 6x - 10$

32 $f(x) = x^4 + 8x^2$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $f(x) = x^4 - 7x^2$

الاقتران الأصلي $f(x) = x^4 - 7x^2$

قانون مشتقّة مضاعف القوة $f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$

بالتبسيط $= 4x^3 - 14x$

ضرب المقادير الجبرية (الدرس 2)

أجد ناتج ضرب كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

33 $2x(x-4)$

34 $(x+4)(x-5)$

35 $(3x + 1)^2$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x + 1)(5x - 2)$.

بفصل المقدار $2x + 3$ إلى حدّين وضرب كُلٍّ منهما في المقدار $5x - 2$ $(2x + 3)(5x - 2) = 2x(5x-2) + 3(5x-2)$

باستعمال خاصية التوزيع $= (10x^2 - 4x) + (15x - 6)$

بجمع الحدود المتشابهة $= 10x^2 - 4x + 15x - 6$

بالتبسيط $= 10x^2 - 11x - 6$

إيجاد سرعة جسم وتسارعه باستعمال المشتقة إذا عُلِم اقتران موقعه (الدرس 2)

36 يمثل الاقتران $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$.

مثال: يمثل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = s'(3)$، التي تمثل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	مشتقة اقتران الموقع
$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	تعريف اقتران السرعة
$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$	بتعويض $t = 3$
$= 14.7 \text{ m/s}$	بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته هي 14.7 m/s

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة. أفترض أنّ اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

المطلوب هو $a(5) = v'(5)$، التي تمثل التسارع عندما $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = 3.6t$	مشتقة اقتران السرعة
$a(5) = 3.6(5)$	بتعويض $t = 5$
$= 18$	بالتبسيط

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته هو 18 m/s^2

حلّ المعادلات التربيعية (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

37 $x^2 - 9x + 8 = 0$

38 $x^2 - 9 = 0$

39 $x^2 = 3x$

40 $x^2 + 8x = 20$

41 $x^2 = 121$

42 $x^2 + 1 = 0$

مثال: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

a) $x^2 = -5x$

$x^2 = -5x$	المعادلة المعطاة
$x^2 + 5x = 0$	بجمع $5x$ إلى طرفي المعادلة
$x(x + 5) = 0$	بإخراج العامل المشترك الأكبر
$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -5$	بحلّ كلّ معادلة

إذن، الجذران هما: $0, -5$

b) $x^2 - 8x + 12 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$	المعادلة المعطاة
$(x - 6)(x - 2) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x - 6 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 6 \qquad x = 2$	بحلّ كلّ معادلة

إذن، الجذران هما: $6, 2$

- **إيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية لاقتران باستعمال المشتقة** (الدرس 3)

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم المحلّية الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

43 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

44 $f(x) = x^2 + 6x - 3$

45 $f(x) = 1 + 5x - x^2$

46 $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

47 $f(x) = 18x^2 - x^4$

48 $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

مثال: أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجدت).

الخطوة 1 أجد القيم الحرجة؛ أي القيم التي ميل المنحنى عندها صفر.

مشتقة الاقتران	$f'(x) = 3x^2 - 12$
بمساواة المشتقة بالصفر	$3x^2 - 12 = 0$
بجمع 12 للطرفين	$3x^2 = 12$
بقسمة الطرفين على 3	$x^2 = 4$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = \pm 2$

إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأن مشتقة الاقتران تساوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطوة 2 لتحديد أي النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

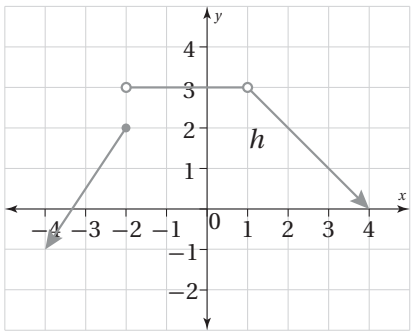
x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

تتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة محلّية عظمى عندما $x = -2$، هي $f(-2) = 20$، وتتغير إشارة ميل المنحني حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلّية صغرى عندما $x = 2$، هي $f(2) = -12$.

الدرس 1

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) اعتمادًا على التمثيل البياني المعطى:



1. $\lim_{x\to -2} h(x)$

2. $\lim_{x\to -1} h(x)$

3. $\lim_{x\to 1} h(x)$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:

4. $\lim_{x\to 1} (3x+1)$

5. $\lim_{x\to 0} h(x), \quad h(x)=\begin{cases} x-2, & -2\le x<0 \\ x-1, & x\ge 0 \end{cases}$

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

6. $\lim_{x\to 1} (3x^3+x-1)$

7. $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x^2+8}$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

8. $\lim_{x\to 4} \dfrac{5x-20}{x-4}$

9. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2}{x^2-1}$

أبحث اتصال كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة إزاءه:

11. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x<1 \\ x+1, & x\ge 1 \end{cases}, \quad x=1$

12. $g(x)=\begin{cases} 3x, & x<1 \\ 4x-1, & x>1 \end{cases}, \quad x=1$

13. $h(x)=\begin{cases} 2x, & x=-2 \\ x+2, & x\ne -2 \end{cases}, \quad x=-2$

14. $q(x)=\begin{cases} \dfrac{8-x^3}{x-2}, & x\ne 2 \\ -12, & x=2 \end{cases}, \quad x=2$

الدرس 2

المشتقة
The Derivative

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال تعريف المشتقة:

1. $f(x) = 5x, \quad x = 0$
2. $f(x) = x, \quad x = -3$
3. $f(x) = 6x + 3, \quad x = 2$
4. $f(x) = 5x^2, \quad x = 1$
5. $f(x) = 3x^2 + 4x, \quad x = 1$
6. $f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x = 2$

أستعمل قواعد الاشتقاق لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

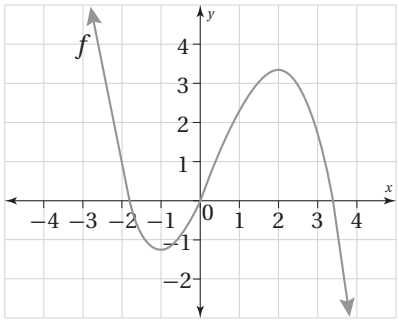
7. $y = 3\pi$
8. $y = 5 - \pi x$
9. $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^{-2} - 7x + 9$
10. $y = \frac{12x^3 + x - 1}{3}$
11. $y = 4\sqrt{x}, \quad x \geq 0$
12. $y = 6\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^2}, \quad x > 0$
13. $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad x \geq 0$
14. $y = \frac{8\sqrt[3]{x^8} + 4x^2 - 4}{4}$
15. $y = \sqrt[4]{x} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1, \quad x > 0$
16. $y = (x + 3)^2$

17. **سيرك:** قفز لاعب في السيرك من حافة منصَّة العرض نحو الأسفل ليسقط في شبكة الحماية، وقد مُثِّل موقعه s (بالقدم) بالنسبة إلى الشبكة بالاقتران: $s(t) = 100 - 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني. ما سرعة اللاعب لحظة وصوله الشبكة؟

الدرس 3

التزايد والتناقص لكثيرات الحدود

Increasing and Decreasing of Polynomials



1 أجد قِيَم x الحرجة للاقتران f المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور، مُحدِّدًا فترات التزايد والتناقص.

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل كثير حدود ممّا يأتي:

2 $f(x) = x^2 - 8x$

3 $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

4 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

5 $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

6 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = 2x^2 - 4x$

9 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

10 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

11 $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

12 $f(x) = -4x + 5$

13 $f(x) = 2x^2 - 4x$

14 $f(x) = x^3 - 3x^2$

15 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

- **إكمال نمط عددي معطى** (الدرس 1)

أجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ متتالية ممّا يأتي:

1. $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$
2. $5, 10, 20, 40, \ldots$
3. $150, 141, 132, 123, \ldots$
4. $400, 200, 100, 50, \ldots$
5. $-8, -7, -6, -5, \ldots$
6. $-2, 1, 6, 13, \ldots$
7. $4, 16, 36, 64, \ldots$
8. $3, 9, 27, 81, \ldots$
9. $3, 8, 18, 38, \ldots$
10. $512, 128, 32, 8, \ldots$

مثال: أجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ متتالية ممّا يأتي:

a) 2 , 5 , 8 , 11 , ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ كلّ حدّ يزيد على الحدّ السابق بمقدار 3، إذن تتزايد المتتالية بمقدار 3، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$2 \underset{+3}{,} 5 \underset{+3}{,} 8 \underset{+3}{,} 11 \underset{+3}{,} 14 \underset{+3}{,} 17 \underset{+3}{,} 20 \ , \ldots$$

b) 3 , 6 , 12 , 24 , ...

بقسمة أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ الحصول على أيّ حدّ يكون بضرب الحدّ السابق له في 2، إذن تتضاعف المتتالية بمقدار 2، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$3 \underset{\times 2}{,} 6 \underset{\times 2}{,} 12 \underset{\times 2}{,} 24 \underset{\times 2}{,} 48 \underset{\times 2}{,} 96 \underset{\times 2}{,} 192 \ , \ldots$$

c) 80 , 73 , 66 , 59 , ...

بطــرح أيّ حدّين متتاليين، أجــد أنّ كلّ حدّ ينقص عن الحدّ الســابق بمقــدار 7، إذن تتناقص المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$80 \underset{-7}{,} 73 \underset{-7}{,} 66 \underset{-7}{,} 59 \underset{-7}{,} 52 \underset{-7}{,} 45 \underset{-7}{,} 38 \,, \ldots$$

• **إيجاد الحد العام لمتتالية** (الدرس 1)

أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

11 $4, 9, 14, 19, \ldots$

12 $1, 4, 9, 16, \ldots$

13 $23, 17, 11, 5, \ldots.$

14 $10, 20, 30, \ldots$

15 $2, 9, 28, 65, \ldots$

16 $6, 9, 14, 21, \ldots$

مثال: أجد الحد العام للمتتالية: ... 9, 16, 23, 30,

أُلاحِظ أنَّ حدود المتتالية تتزايد بمقدار 7:

$$9 \underset{+7}{,} 16 \underset{+7}{,} 23 \underset{+7}{,} 30 \,, \ldots$$

يُمكِــن مبدئيًّا التعبير عن المتتالية بالحد $7n$، ولكنْ عنــد تعويض $n = 1$ ينتج العدد 7، وهو أقل من الحد الأول بـ 2؛ لذا أجمع العدد 2 مع $7n$، وبذلك يصبح الحد العام: $T(n) = 7n + 2$

تصنيف المتتالية إلى: خطّية، أو تربيعية، أو تكعيبية (الدرس 1)

أُبيِّن إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية ممّا يأتي يُمثِّل الحد العام لها أم لا، ثم أُصنِّفها إلى خطِّية، أو تربيعية، أو تكعيبية، وأجد الحد الخامس والسبعين في كلٍّ منها:

17 $2, 5, 8, 11, \ldots, 3n - 1$

18 $0, 6, 16, 30, \ldots, 2n^2 - 2$

19 $6, 13, 32, 69, \ldots, n^3 + 5$

20 $-1, -3, -5, -7, \ldots, 1-2n$

مثال: **أُبيِّن إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب المتتالية الآتية يُمثِّل الحد العام لها أم لا، ثم أُصنِّفها إلى خطِّية، أو تربيعية، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين فيها:**

$$5, 9, 13, 17, \ldots, 4n+1$$

أُعوِّض رُتَب بعض الحدود في المقدار الجبري المعطى للتأكُّد أنَّها تنتج من الحد العام:

$n = 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{+1} 5$

$n = 2 \xrightarrow{\times 4} 8 \xrightarrow{+1} 9$

$n = 3 \xrightarrow{\times 4} 12 \xrightarrow{+1} 13$

$n = 4 \xrightarrow{\times 4} 16 \xrightarrow{+1} 17$

إذن، المقدار الجبري المعطى يُمثِّل الحد العام للمتتالية، وهي خطِّية؛ لأنَّ الحد العام خطِّي.

لإيجاد الحد الخامس والسبعين، أُعوِّض $n = 75$ في قاعدة الحد العام:

$$4(75) + 1 = 301$$

الدرس 1

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع، ثم أُصنِّفها إلى منتهية وغير منتهية:

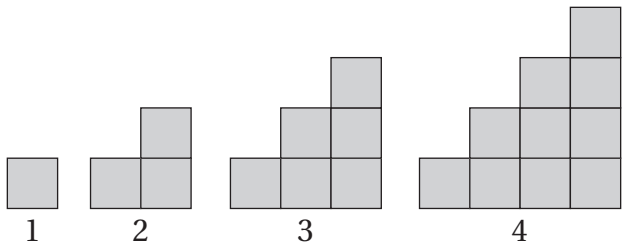
1. $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots$
2. $-10 - 4 + 2 + 8$
3. $5 + 23 + 53 + 95 + 149$
4. $7 + 7 + 7 + 7 + \ldots$
5. $-1 - 5 - 9 - 13 - \ldots$
6. $-9 - 9 - 9 - 9 - 9 - 9$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

7. $\sum_{k=1}^{6} (7k - 5)$
8. $\sum_{k=1}^{5} (2k^3 - 4)$
9. $\sum_{k=1}^{4} (9 - k^2)$
10. $\sum_{k=1}^{6} 4k$
11. $\sum_{k=1}^{3} (3k - 3)$
12. $\sum_{k=1}^{9} (-2)$

13. **رياضة:** تدرَّب مازن على الجري مسافات طويلة، فركض في الدقائق الست الأولى مسافة 1000 m، ثم ركض في كل ســت دقائق لاحقة مسافة أقل بـ 10 m من تلك التي ركضها في الدقائق الست السابقة لها. أكتب متسلسلة تُمثِّل المسافة التي ركضها مازن في 60 دقيقة.

14. أكتب متسلسلة تُمثِّل مجموع المربعات بعد n مرحلة للشكل الآتي:



الدرس 2

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1. $-1, -4, -7, -10, \ldots$
2. $0.5, -0.2, -0.9, -1.6, \ldots$
3. $2, 11, 20, 29, \ldots$
4. $44, 39, 34, 29, \ldots$
5. $1, 10, 19, 28, \ldots$
6. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots$

أجد الحد العام a_n لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

7. $3, -2, -7, -12, \ldots$
8. $51, 44, 37, 30, \ldots$
9. $3, 2.6, 2.2, 1.8, \ldots$
10. $4, 13, 22, 31, \ldots$
11. $a_4 = 11,\ d = 2$
12. $a_{12} = 52,\ d = -3$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

13. $\sum_{k=1}^{19} (9k + 1)$
14. $\sum_{k=1}^{22} (34 - 5k)$
15. $\sum_{k=1}^{11} (k - 8)$
16. $\sum_{k=1}^{17} (61 - k)$
17. $\sum_{k=1}^{13} (-5k)$
18. $\sum_{k=1}^{88} 3$

19. **عمل تطوُّعي:** شـــاركت نُهى في الخدمة المجتمعية مدَّة أسبوعين في أثناء عطلتها الصيفية، فعملت في اليوم الأول مدَّة ســـاعة ونصف، وعملت في اليوم الثاني مدَّة ســـاعة وخمس وأربعين دقيقة، وعملت في اليوم الثالث مدَّة ساعتين، وهكذا. إذا مثَّلت ساعات عملها متسلسلة حسابية، فأجد مجموع الساعات التي استغرقتها في العمل.

الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1. $2, -8, 32, -128, \ldots$
2. $-5, -2.5, -1.25, -0.625, \ldots$
3. $44, 8.8, 1.76, 0.352, \ldots$
4. $3, 15, 75, 375, \ldots$
5. $0.008, 0.032, 0.128, 0.512, \ldots$
6. $90, 9, 0.9, 0.009, \ldots$

أجد الحد العام a_n لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

7. $6, -12, 24, -48, \ldots$
8. $88, 44, 22, 11, \ldots$
9. $10, 30, 90, 270, \ldots$
10. $\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5, 10, \ldots$
11. $a_5 = 81,\ r = 3$
12. $a_9 = -1536,\ r = -2$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

13. $\sum_{k=1}^{18} 2(4)^{k-1}$
14. $\sum_{k=1}^{17} \frac{3}{5}(2)^{k-1}$
15. $\sum_{k=1}^{20} (\frac{7}{2})^{k-1}$
16. $\sum_{k=1}^{9} 3(0.3)^{k-1}$
17. $\sum_{k=1}^{15} 5(6)^{k-1}$
18. $\sum_{k=1}^{12} (0.1)^{k-1}$

19. **علوم:** بدأت ليلى تجربتها في مختبر العلوم باستعمال 600 خلية بكتيرية. وقد لاحظت أنَّ عدد الخلايا البكتيرية يتزايد بنسبة ثابتة مقدارها 135% كل ساعة. أجد عدد هذه الخلايا بعد 4 ساعات.

الدرس 4

المتسلسلات الهندسية اللانهائية

Infinite Geometric Series

أجد المجاميع الجزئية S_n لقِيَم n الصحيحة، حيث: $5 \geq n \geq 1$ لكلٍّ من المتسلسلات الآتية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:

1. $192 + 48 + 12 + 3 + \ldots$
2. $2 + 10 + 50 + 250 + \ldots$
3. $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots$
4. $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \ldots$
5. $8 - 8 + 8 - 8 + \ldots$
6. $1029 + 147 + 21 + 3 + \ldots$

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:

7. $1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} + \frac{125}{27} + \ldots$
8. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$
9. $\frac{2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{14} - \frac{1}{28} + \ldots$
10. $297 + 99 + 33 + 11 + \ldots$
11. $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots$
12. $2 + 2.5 + 3.125 + 3.90625 + \ldots$

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي:

13. $0.\overline{32}$
14. $0.\overline{09}$
15. $0.\overline{8}$
16. $0.\overline{44}$
17. $0.\overline{92}$
18. $0.\overline{5}$

19. **كراسي:** حرَّك يوسف كرسيًّا هزّازًا مرَّة واحدة، وقد لاحظ أنَّ قاعدة الكرسي المُقوَّسة مثَّلت مسافة 1.1 m أول مرَّة، ثم مثَّلت في كل مرَّة تالية ما نسبته 68% من المسافة التي مثَّلتها في المرَّة التي سبقتها. أجد مجموع المسافات التي مثَّلتها قاعدة الكرسي الهزّاز في هذه الأثناء حتى توقَّف عن الحركة بصورة كاملة.