المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب التمارين

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　يوسف سليمان جرادات　　أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　06-5376266　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　feedback@nccd.gov.jo　www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقم (2021/5)، تاريـخ 2021/12/7 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2021/168) تاريـخ 2021/12/21 م بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 385 - 2

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2082)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر: الفـرع العلمـي: كتـاب التماريـن: (الفصـل الدراسـي الثانـي)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.-ط2؛ مزيـدة ومنقحـة- عمـان: المركـز، 2022

(44) ص.

ر.إ.: **2022/4/2082**

الواصفات: / تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م

أعيدت طباعته 2022 م – 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتنمي مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم/ المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم البقية لتحلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة إجابته، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 5 الاقترانات المثلثية

الوحدة 6 المتطابقات والمعادلات المثلثية

قائمة المحتويات

الوحدة 5: الاقترانات المثلثية

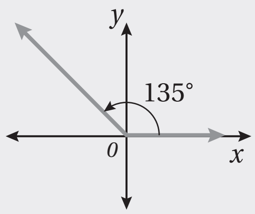
أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

رسم الزاوية في الوضع القياسي (الدرس 1)

أرسم في الوضع القياسي الزاوية المعطى قياسها في ما يأتي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

1) $150°$ 2) $240°$ 3) $290°$ 4) $180°$

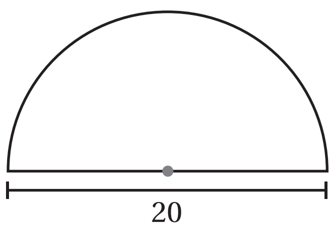
مثال: أرسم الزاوية $135°$ في الوضع القياسي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

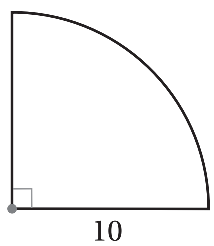


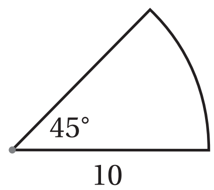
أرســم المحورين الإحداثيين. ومن نقطة الأصل أرســم ضلع الابتداء مُنطبِقًا على محور x الموجب، ثم أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل، وأضع تدريج المنقلــة $0°$ على ضلع الابتداء، ثم أُعيِّن نقطةً مقابــل التدريج $135°$. بعد ذلك أرسم ضلع الانتهاء من نقطة الأصل إلى النقطة الثابتة التي عيَّنْتُها، فأجد أنَّ ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الثاني.

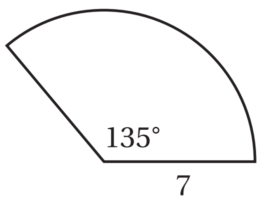
إيجاد طول القوس ومساحة القطاع الدائري (الدرس 1)

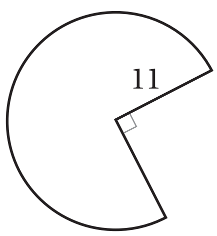
أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلّ من الأشكال الآتية (أكتب الإجابة بدلالة π):

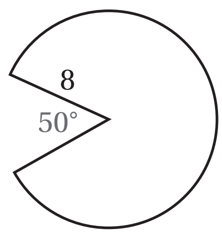
5)


6)


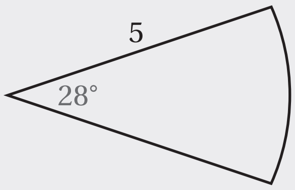
7)


8)


9)


10)


مثال: أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.



زاوية القطاع هي °28، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$ قانون طول القوس

$$l = \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2 \times 5$$ بتعويض $\theta = 28^\circ, r = 5$

$$\approx 2.4$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول هذا القوس مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 2.4 وحدة طول.

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$ قانون مساحة القطاع

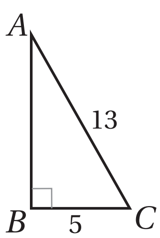
$$= \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$ بتعويض $r = 5, \theta = 28^\circ$

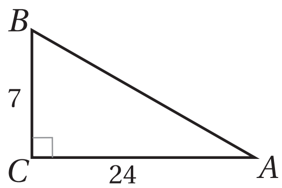
$$\approx 6.1$$ باستعمال الآلة الحاسبة

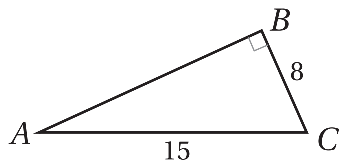
إذن، مساحة هذا القطاع مقرّبةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 6.1 وحدة مربعة.

• إيجاد النسب المثلثية لزوايا في المثلث قائم الزاوية (الدرس 2)

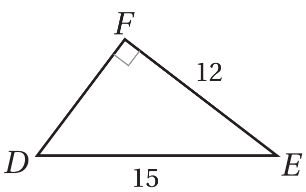
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في كلّ مما يأتي، وأترك إجابتي في صورةِ كسر:

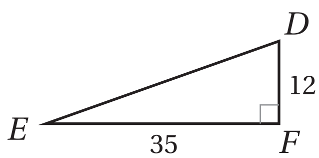
11


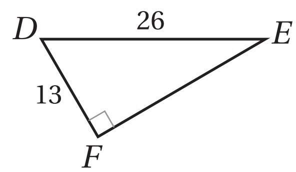
12


13


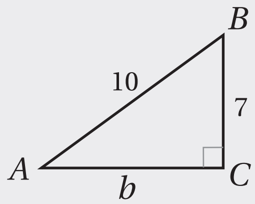
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية E في كلّ ممّا يأتي، وأترك إجابتي في صورة كسر:

14


15


16


مثال: أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في المثلث المجاور.



الخطوة 1 أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد b.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويض $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيط	$49 + b^2 = 100$
بطرح 49 من طرفي المعادلة	$b^2 = 51$
بأخذ الجذر التربيعيّ لطرفي المعادلة	$b = \pm\sqrt{51}$

بما أنّ الطول لا يمكن أنْ يكون سالبًا، فإنّ $b = \sqrt{51}$.

الخطوة 2 أجد النسب المثلثية الثلاث.

$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$ | $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ | $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$

- **إيجاد النسب المثلثية الأساسية باستعمال دائرة الوحدة** (الدرس 2)

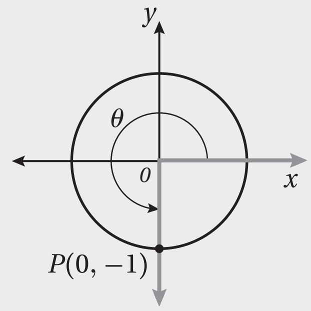
أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

17) $P(0.6 , 0.8)$

18) $P(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

19) $P(1, 0)$

مثال: أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة $P(0 , -1)$ في ما يأتي:



$\sin\theta = y = -1$

$\cos\theta = x = 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ (غير مُعرَّف)

إيجاد قِيَم النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة (الدرس 2)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20 $\cos 120°$ **21** $\sin 225°$ **22** $\tan 330°$

مثال: أجد قيمة $\sin 120°$.

إيجاد قياس الزاوية المرجعية
$\theta' = 180° - \theta$

$\theta = 120°$
$= 180° - 120°$

$= 60°$

الجيب موجب في الربع الثاني
$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تمثيل اقترانَي الجيب وجيب التمام والظل (الدرس 3)

أرسم منحنى الاقتران لكلّ ممّا يأتي في الفترة المعطاة، ثمّ أصفه:

23 $y = \sin x \quad 0° \le x \le 270°$

24 $y = \cos x \quad 0° \le x \le 180°$

25 $y = \sin x \quad 0° \le x \le 180°$

26 $y = \tan x \quad 0° \le x \le 180°$

مثال: أرسم منحنى الاقتران $y = \sin x$، ثمّ أصفه، علمًا بأن $0° \leq x \leq 360°$

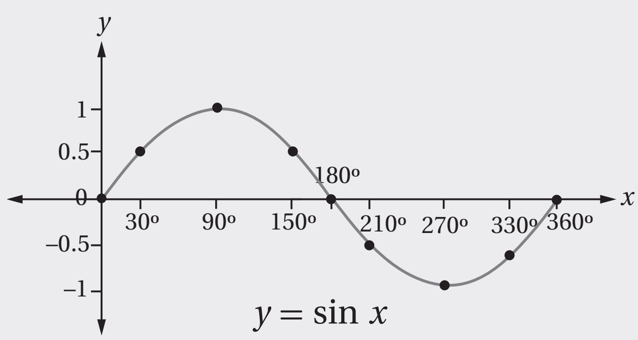
الخطـوة 1 أكوّن جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نِسَبُها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية $30°$

الخطـوة 2 أجد قيمة $\sin x$ لكلّ زاوية x، ثم أكتبها في الجدول:

x	$0°$	$30°$	$90°$	$150°$	$180°$	$210°$	$270°$	$330°$	$360°$
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطـوة 3 أُعيِّـن الأزواج المرتبـة: $(0°, 0), (30°, 0.5), (90°, 1), \ldots\ldots (360°, 0)$ في المسـتوى الإحداثيّ.

الخطـوة 4 أصل بمنحنى أملس بين النقاط، فينتج رسم كما في الشكل الآتي.



من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$، ألاحظ أن أكبر قيمة للاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمة له هي -1

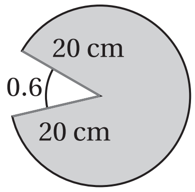
الدرس 1

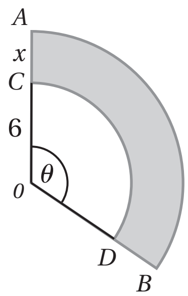
قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in Radian

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $225°$ 2) $840°$ 3) $\frac{11\pi}{6}$ 4) $-\frac{23\pi}{4}$

5) أجد مساحة القطاع الدائري المُظلَّل في الشكل المجاور.

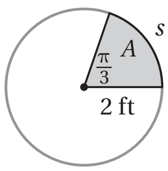




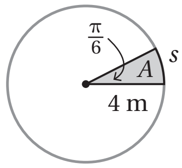
6) يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين مركزهما O. إذا كان: $OC = 6$ cm، و $CA = x$ cm، و $m\angle\theta = 2$، وكانت مساحة المنطقة المُظلَّلة 64 cm^2، فأجد قيمة المُتغيِّر x.

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

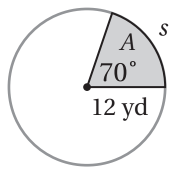
7)



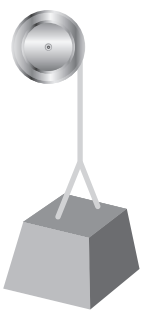
8)



9)



10) **رافعـة:** يبلغ طول نصـف القُطْر لبكرة رافعـة 2 ft، وهي تُسـتعمَل لرفع الأحمال الثقيلة، وتؤدي 8 دورات كل 15 ثانية. أجد السرعة الخطية والسرعة الزاويّة للرافعة.



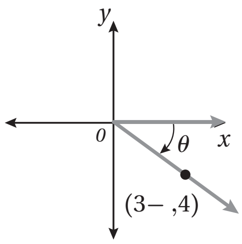
11) إذا كانت مساحة دائرة 72 cm^2، فأجد مساحة قطاع دائري من هذه الدائرة يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{6}$.

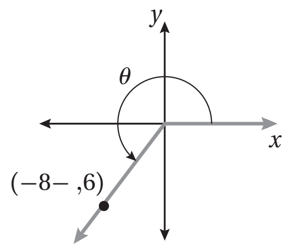
12) قطاع دائري نصف قُطْره 24 cm، ومساحته 288 cm^2. أجد الزاوية المركزية لهذا القطاع.

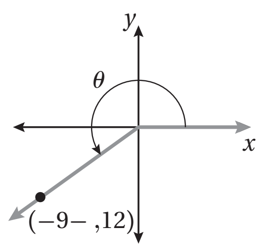
الدرس **2**

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1


2


3


إذا كان: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = 2x$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4 $f\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

5 $(h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right)$

6 $(h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

إذا كان $\sin 70° = \cos 20° = 0.940$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

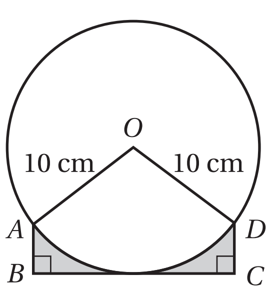
7 $\cos 560°$

8 $\sin 430°$

9 $\sin 470°$

10 $\cos (-380°)$

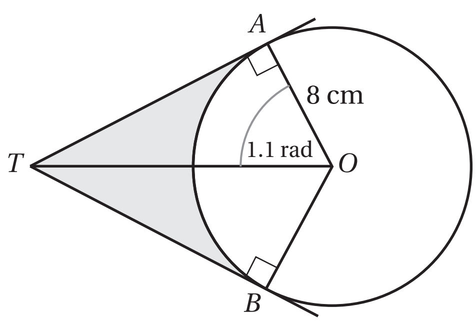
يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها **10 cm**، إذا كان $\overline{BC}$ مماسًّا للدائرة طوله **16 cm**، و $DC = AB$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



11 $m\angle AOD$ بالراديان.

12 مساحة المنطقة المُظلَّلة.

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها **8 cm**، إذا كان $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسَّين للدائرة، وكان $m\angle AOT = 1.1$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



13 طول TA.

14 مساحة الجزء المُظلَّل في الشكل.

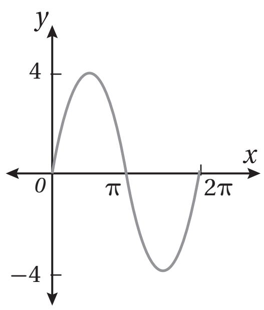
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا

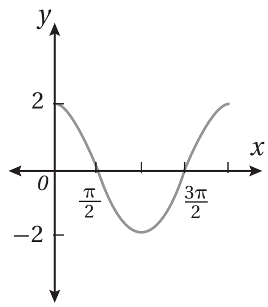
Graphing Trigonometric Functions

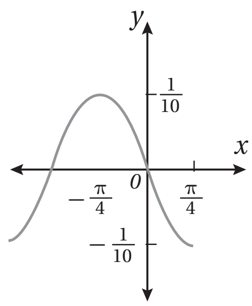
أجد طول الدورة والسعة (إن وُجِدَت) لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

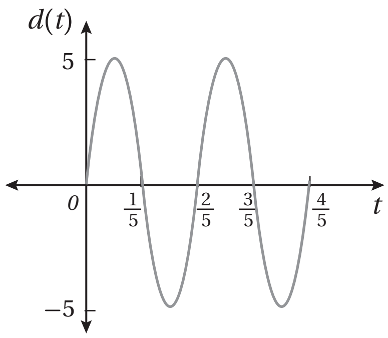
1. $g(x) = 2 + \sin x$
2. $g(x) = 5- \cos x$
3. $g(x) = -\cos (x + \pi)$
4. $g(x) = 5 - \cos (x - \frac{\pi}{2})$
5. $g(x) = -2 - \sin (x-\pi)$
6. $g(x) = 3 + \cos(x + \frac{3\pi}{4})$
7. $g(x) = -4 \sin \frac{1}{4} x$
8. $g(x) = 2 - \tan (x + \frac{\pi}{2})$
9. $g(x) = \frac{1}{2} \tan \pi x$

أجد السعة وطول الدورة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أكتب معادلة في صورة: $y = a \sin b(x-c)$، أو صورة: $y = a \cos b(x-c)$ لتمثيل قاعدة الاقتران:

10. 

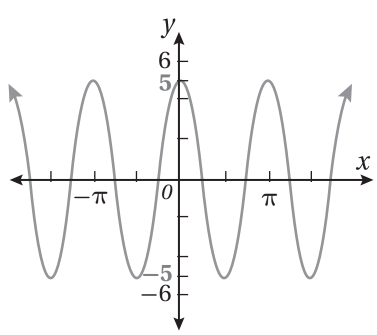
11. 

12. 



13. يُمثِّل الشكل المجاور الإزاحة $d(t)$ بالسنتيمتر مع الزمن t لكتلة مُعلَّقة بزنبرك نابضي، وهي تتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل في حركة توافقية بسيطة. أكتب قاعدة الاقتران d، حيث $d(t) = a \sin \omega t$.

أتأمّل الشكل المجاور، ثم أُجيب عن السؤالين الآتيين:



14. هل يُمثِّل المنحنى الاقترانَ الذي صورته $y = a \sin bx$، أو صورته $y = a \cos bx$؟ أُبرِّر إجابتي.

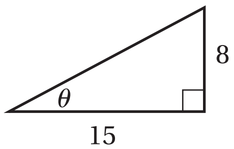
15. أجد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى، وطول الدورة، والسعة للاقتران.

الوحدة 6: المتطابقات والمعادلات المثلثية

أستعد لدراسة الوحدة

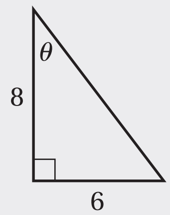
أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

الاقترانات المثلثية (الدرس 1)



1 أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.

مثال: أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



الخطـوة 1 أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

نظرية فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
بتعويض $a = 6, b = 8$	$c^2 = 6^2 + 8^2$
بالتبسيط	$c^2 = 100$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$c = \pm\sqrt{100}$
الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا	$c = 10$

الخطـوة 2 أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ

$$\tan\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \cos\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \sin\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{4}{3} \qquad \sec\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \csc\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{5}{3}$$

إيجاد قِيَم النسب المثلثية إذا عُلِمت قيمة نسبة مثلثية (الدرس 1)

أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

2 $\sin\theta = \frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$

3 $\tan\theta = 1, 180° < \theta < 270°$

مثال: أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ إذا كان: $90° < \theta < 180°$, $\sin \theta = \frac{3}{5}$.

متطابقة فيثاغورس
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

بتعويض قيمة $\sin \theta$
$$\cos^2 \theta + (\frac{3}{5})^2 = 1$$

بطرح $\frac{9}{25}$ من كلا الطرفين
$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25}$$

بالتبسيط
$$\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$$\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$$

في الربع الثاني يكون $\cos \theta$ سالبًا
$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

إيجاد قيمة الاقتران المثلثي لأيِّ زاوية (الدرس 1)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4) $\cos 135°$

5) $\cot 120°$

6) $\sin 210°$

7) $\csc(-30°)$

8) $\tan \frac{\pi}{4}$

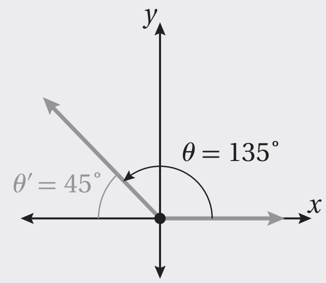
9) $\cos \frac{11\pi}{3}$

10) $\sec(-\frac{7\pi}{4})$

11) $\tan \frac{15\pi}{4}$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) tan 135°



يقع ضلع انتهاء الزاوية °135 في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = 180° - \theta$

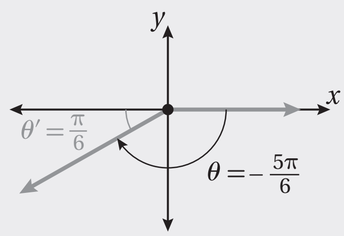
$\theta = 135°$ $\quad = 180° - 135°$

$= 45°$

الظل سالب في الربع الثاني $\tan 135° = -\tan 45° = -1$

2) $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

بما أنَّ الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ سالبة، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ التي قياسها موجب، وأقل من 2π



بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مشتركة قياسها موجب $-\frac{5\pi}{6} + 2(1)\pi = \frac{7\pi}{6}$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = \theta - \pi$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ $\quad = \frac{7\pi}{6} - \pi$

$= \frac{\pi}{6}$

قاطع التمام سالب في الربع الثالث $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\csc\frac{\pi}{6} = -2$

الجيب وجيب التمام للزوايا المتتامة (الدرس 1)

12 إذا كان $\sin 70° = 0.9397$، فأجد $\cos 20°$.

13 إذا كان $\cos 55° = 0.57358$، فأجد $\sin 35°$.

14 إذا كان $\sin 78° = 0.9781$، فأجد $\cos 12°$، و $\sin 12°$.

مثال: إذا كان $\cos 34° = 0.829$، فأجد $\sin 56°$.

تعريف الجيب وجيب التمام للزوايا المتتامة	$\cos A = \sin(90° - A)$
بتعويض $A = 34°$	$\cos 34° = \sin(90° - 34°)$
بالتبسيط	$\cos 34° = \sin 56°$
بتعويض $\cos 34° = 0.829$	$\sin 56° = 0.829$

معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل (الدرس 3)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

17. $\sin^{-1}(-1)$
16. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$
15. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

مثال: أجد قيمة $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاوية التي قيمة الجيب لها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

حل المعادلات المثلثية (الدرس 3)

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية، علمًا بأن $0° \leq x \leq 360°$:

20. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
19. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
18. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
23. $1 - 2\tan x = 5$
22. $2\sin x + 1 = 0$
21. $7 + 9\cos x = 1$
26. $3(\cos x + 3) = 7 + \cos x$
25. $\cos x + 3\sin x\cos x = 0$
24. $2\sin x\tan x + \tan x = 0$

مثال: أحل المعادلتين الآتيتين، علمًا بأن $0° \leq x \leq 360°$:

a) $2 \sin x = 1$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\quad \sin x = \frac{1}{2}$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

ولأن الجيب يكون أيضًا موجبًا في الربع الثاني؛ فإنه يوجد حل آخر للمعادلة هو:

$$180° - 30° = 150°$$

إذن، لهذه المعادلة حلّان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: $30°$، و $150°$

b) $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحـوي هذه المعادلة نسـبتين مثلثتين، ويُلاحَـظ أن $\sin x$ تكرّر في حدّي المعادلةِ، ما يعني أنها تشـبه المعادلة $3yz - 2y = 0$؛ لذا يمكن تحليلها بإخراج عامل مشترك:

بإخراج العامل المشترك $\sin x$ $\quad \sin x\,(3 \cos x - 2) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\quad 3 \cos x - 2 = 0\ ,\ \sin x = 0$

وبذلك أتوصل إلى معادلتين بسيطتين، ثمّ أحل كلّ معادلة على حدة:

المعادلة الأولى $\quad \sin x = 0$

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة $\quad x = 0°, x = 180°$

المعادلة الثانية $\quad 3 \cos x - 2 = 0$

بإضافة 2 إلى الطرفين $\quad 3 \cos x = 2$

بقسمة الطرفين على 3 $\quad \cos x = \frac{2}{3}$

تعريف معكوس جيب التمام $\quad x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad x = 48.2°$

ولأن جيب التمام يكون أيضًا موجبًا في الربع الرابع؛ فإنه يوجد حلّ آخر للمعادلة هو:

$$x = 360° - 48.2° = 311.8°$$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $0°, 180°, 48.2°, 311.8°$

المتطابقات المثلثية 1
Trigonometric Identities 1

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

1 $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$

2 $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}$

3 $\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

4 $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

5 $\frac{1+\cos x}{1+\sec x}$

6 $\frac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

7 $\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x} = 1$

8 $\ln|1+\cos\theta| + \ln|1-\cos\theta| = 2\ln|\sin\theta|$

9 $\frac{1}{1-\sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$

10 $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11 $\sin 105°$

12 $\tan \frac{19\pi}{12}$

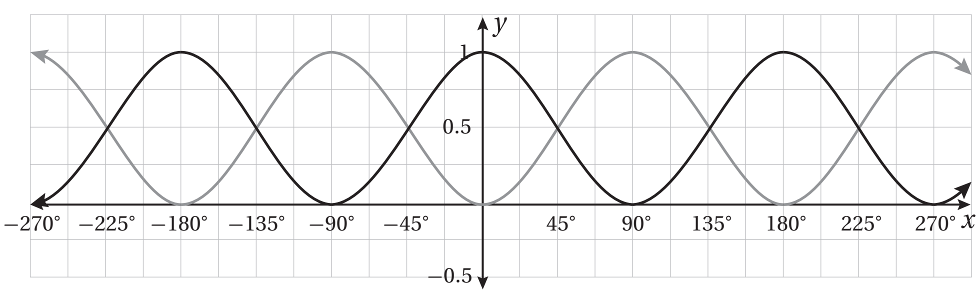
13 $\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80°$

14 إذا كان $\sin x + \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$، فأُثبِت أنَّ: $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

15 إذا كان $A + B = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّ: $\tan A = \frac{1-\tan B}{1+\tan B}$.

16 **تبرير:** أُثبِت صحة المتطابقة: $\tan(s+t) = \frac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)}$، مُبرِّرًا إجابتي.

17 **تبرير:** يُبيِّن التمثيل البياني الآتي منحنيي الاقترانين: $y = \sin^2 x$، و $y = \cos^2 x$، حيث الزوايا بالدرجات. أستعمل هذا التمثيل لإثبات أنَّ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

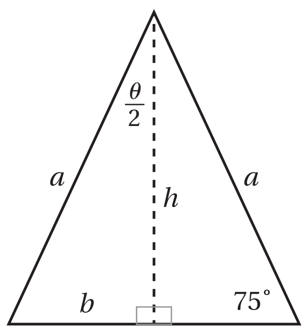
أُبسِّط كُلًّا من المتطابقات الآتية، مُستعمِلًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

1. $2 \sin 3x \cos 3x$
2. $\dfrac{2 \tan 7x}{1 - \tan^2 7x}$
3. $\dfrac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

4. $\dfrac{2 \tan 15°}{1 - \tan^2 15°}$
5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
6. $\cos^2 37.5° - \sin^2 37.5°$
7. $\sin 75°$
8. $\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$
9. $\tan 202.5°$
10. $2 \sin 52.5° \sin 97.5°$
11. $\sin 75° \sin 15°$
12. $\cos 37.5° \sin 7.5°$

يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما a:



13. أكتب قاعدة لمساحة المثلث بدلالة الزاوية θ.
14. أجد مساحة المثلث إذا كان طول الضلع a هو 7 cm

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15. $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 1 - 2\sin^2 2x$
16. $\csc 2x = \dfrac{1}{2} \csc x \sec x$
17. $\cos \theta = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$
18. $\dfrac{\cot \theta - \tan \theta}{\cot \theta + \tan \theta} = \cos 2\theta$
19. $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x + \sin x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$
20. $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x$

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

1) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2) $\cot x - \csc x = \sqrt{3}$

3) $\frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = 2$

4) $3 \cos^2 x = \sin^2 x$

5) $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = 0$

6) $\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - 1 = 0$

7) $\cot^2 x + 5 \csc x = 5$

8) $4 \sec^2 x + 9 \sec x = 8$

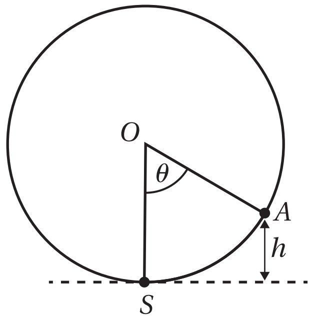
9) $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 5$

10) $\cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0$

11) $4 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

12) $\sin (x + \frac{\pi}{4}) + \sin (x - \frac{\pi}{4}) = 1$

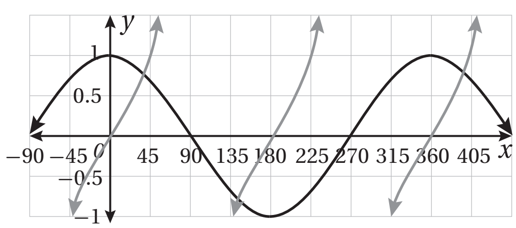
ترفيه: يُمثِّل الشكل المجاور دولابًا دوّارًا في مدينة ألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتُمثِّل S نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن هو A، في حين تُمثِّل النقطة O مركز الدولاب. إذا دار الدولاب بزاوية θ، فإنَّ ارتفاع الراكب عن الأرض h بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 67.5 - 67.5 \cos \theta$، حيث θ بالراديان:



13) أجد طول قُطْر الدولاب.

14) إذا علمْتُ أنَّ الرحلة في هذه اللعبة تُمثِّل دورة واحدة، وأنَّها تستغرق 30 دقيقة، فكم دقيقةً تَلزم للوصول إلى ارتفاع 100 متر فوق سطح الأرض؟

يُمثِّل الشكل المجاور منحنيي المعادلتين: $y = \cos x$، و $y = \tan x$:



15) كم حلًّا يوجد للمعادلة: $\cos x = \tan x$ في الفترة $[0°, 360°]$؟

16) أجد أصغر حلٍّ موجب للمعادلة.

تبرير: إذا كان $\sin(A + B) = 2 \sin (A - B)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

17) أُثبِت أنَّ: $\tan A = 3 \tan B$.

18) أَحُلُّ المعادلة: $\sin (x + 0.5) = 2 \sin (x - 0.5)$، حيث: $0 \le x < 2\pi$.

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

تحويل المقادير من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسّيّة، وبالعكس (الدرس 1)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ مما يأتي:

1) $c^{\frac{1}{8}}$ 2) $\sqrt[9]{x}$ 3) $25^{\frac{1}{10}}$ 4) $\sqrt[3]{-12}$

5) $p^{\frac{1}{6}}$ 6) $\sqrt[8]{u}$ 7) $9^{\frac{1}{4}}$ 8) $\sqrt[5]{-8}$

9) $w^{\frac{8}{3}}$ 10) $\sqrt[6]{v^5}$ 11) $16^{\frac{3}{4}}$ 12) $\sqrt[5]{(-35)^9}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ مما يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $8^{\frac{3}{5}}$

$8^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8^3}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-20}$

$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

ضرب المقادير الجبرية (الدرس 1)

أجد ناتج ضرب كلّ مما يأتي في أبسط صورة:

13) $(x-3)(x+5)$

14) $(12-4x)(1+2x)$

15) $(2x-5)(4x-8x^2)$

16) $(3x+4)^2$

17) $(x^2+7)^2$

18) $(3x-1)(3x+1)$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x+1)(3x-4)$ في أبسط صورة:

بفصل المقدار $(2x+1)$ إلى حدّين ثمّ ضرب كلّ منهما في $(3x-4)$

$$(2x+1)(3x-4) = 2x\,(3x-4) + 1\,(3x-4)$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$$

بتجميع الحدود المتشابهة

$$= 6x^2 - 5x - 4$$

تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الدرس 1)

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

19) $\frac{6x(x+3)}{9x^2}$

20) $\frac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$

21) $\frac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$

22) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

23) $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

24) $\frac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$

مثال: أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\dfrac{2x-10}{2x^2-11x+5}$

$$\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}=\frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)}$$ بتحليل كلّ من البسط والمقام إلى العوامل

$$=\frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}}$$ بقسمة كلّ من البسط والمقام على $(x-5)$

$$=\frac{2}{2x-1}$$ بالتبسيط

b) $\dfrac{1-u^2}{u^2+4u-5}$

$$\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}=\frac{(1-u)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ بتحليل كلّ من البسط والمقام إلى العوامل

$$=\frac{-(u-1)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ $1-u=-(u-1)$

$$=\frac{-\cancel{(u-1)}(1+u)}{\cancel{(u-1)}(u+5)}$$ بقسمة كلّ من البسط والمقام على $(u-1)$

$$=\frac{-(u+1)}{u+5}$$ بالتبسيط

مشتقة اقتران القوّة (الدرس 1)

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

25) $y=2x^4-5x^2+7$

26) $y=\sqrt{x}$

27) $y=x+\sqrt[5]{2x}$

28) $y=\dfrac{1-4x}{x^2}$

29) $y=8x-\dfrac{1}{2x}$

30) $y=(2x-3)(3x+5)$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \dfrac{6x-8}{x^2}$.

بكتابة الاقتران في صورة فرق بين كسرين $\quad y = \dfrac{6x-8}{x^2} = \dfrac{6x}{x^2} - \dfrac{8}{x^2}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية $\quad = 6x^{-1} - 8x^{-2}$

قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، والفرق $\quad \dfrac{dy}{dx} = -6x^{-2} + 16x^{-3}$

تعريف الأُسِّ السالب $\quad = \dfrac{-6}{x^2} + \dfrac{16}{x^3}$

- **مشتقة الاقتران: $y = (ax+b)^n$** (الدرس 1)

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

31) $y = (2x+4)^6$

32) $y = \sqrt{1-4x}$

33) $y = \dfrac{1}{\sqrt{7x+5}}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$.

بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} = (2x-3)^{-\frac{1}{2}}$

قاعدة مشتقة الاقتران المُركَّب $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{3}{2}} \times 2$

تعريف الأُسِّ السالب $\quad = -\dfrac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}$

- **الموقع والسرعة والتسارع للجسم المتحرك في مسار مستقيم** (الدرس 1)

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

34) أجد الاقتران $v(t)$ الذي يمثل سرعة الجسم في أيّ لحظة (t ثانية).

35) أجد سرعة الجسم عندما $t = 3$.

36) أجد الزمن t عندما تكون السرعة 6 m/s

37) أجد الاقتران $a(t)$ الذي يمثل تسارع الجسم، حيث t الزمن بالثانية.

38) أجد تسارع الجسم عندما $t = 5$.

مثال: يمثّل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = s'(3)$، التي تمثّل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

مشتقة اقتران الموقع	$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
تعريف اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
بتعويض $t = 3$	$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$
بالتبسيط	$= 14.7$

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته هي 14.7 m/s

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة. أفترض أن اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

المطلوب هو $a(5) = v'(5)$، التي تمثّل التسارع عندما $t = 5$.

مشتقة اقتران السرعة	$a(t) = v'(t) = 3.6t$
بتعويض $t = 5$	$a(5) = 3.6(5)$
بالتبسيط	$= 18$

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته هو 18 m/s^2

التمثيل البياني للاقترانات والتحويلات الهندسية (الدرس 2)

أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = x^2$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

41) $q(x) = x^2 + 5$

40) $h(x) = (x - 5)^2$

39) $g(x) = x^2 - 5$

44) $p(x) = \frac{1}{5}x^2$

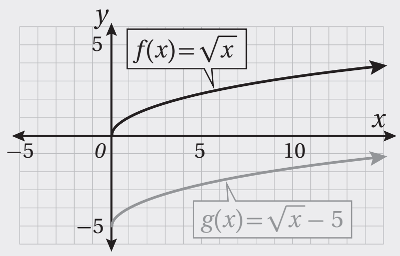
43) $r(x) = 5x^2$

42) $t(s) = (x + 5)^2$

مثال: أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x)=\sqrt{x}$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًا:

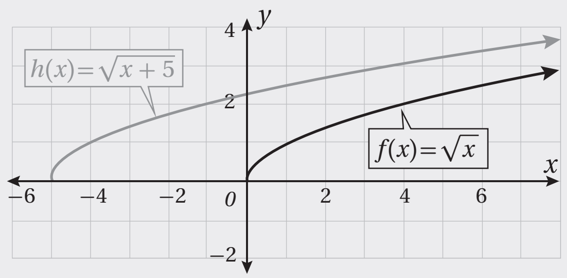
1) $g(x)=\sqrt{x}-5$

منحنى الاقتران: $g(x)=\sqrt{x}-5$ هو منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى الأسفل؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى g يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



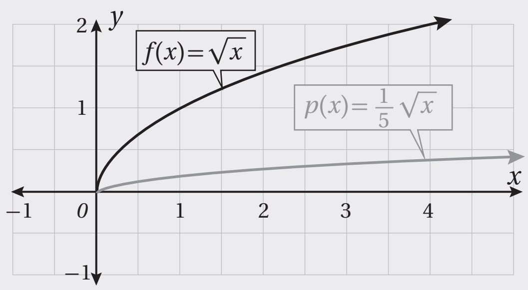
2) $h(x)=\sqrt{x+5}$

منحنى الاقتران: $h(x)=\sqrt{x+5}$ هو منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليسار؛ لذا فإنَّ الإحداثي x لكل نقطة على منحنى h يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



3) $p(x)=\frac{1}{5}\sqrt{x}$

منحنى الاقتران: $p(x)=\frac{1}{5}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{5}$؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران p ناتج من ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{5}$ كما في الشكل المجاور.



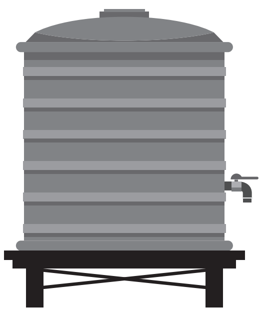
التكامل غير المحدود
Indefinite integrals

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x^6\,dx$ 2) $\int \frac{dx}{x^4}$ 3) $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{7}{x^2}\right)dx$ 4) $\int (x^2+x-1)\,dx$

5) $\int \frac{-7}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ 6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ 7) $\int (x^2+3)(x-1)\,dx$ 8) $\int (3-2x)^7\,dx$

9) $\int (x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})\,dx$ 10) $\int \frac{1}{\sqrt{x-4}}\,dx$ 11) $\int \left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}}-7\right)dx$ 12) $\int \sqrt[3]{(2x-5)^2}\,dx$



خزّان: يحتوي خزّان على **100** لتر من الماء. بدأ الماء بالتسرُّب من الخزّان، وبعد t ساعة أصبح حجم الماء المتبقي فيه V لترًا. إذا كانت المعادلة: $\frac{dV}{dt}=0.6t-10$ تُمثِّل مُعدَّل تسرُّب الماء من الخزّان باللتر لكل ساعة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13) حجم الماء في الخزّان بعد t ساعة.

14) حجم الماء في الخزّان بعد 10 ساعات.

تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{ax+3}}$، حيث a ثابت موجب:

15) أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.

16) إذا كان $f(0)=0$ و $f(a)=2\sqrt{2}-2$، فأُثبِت أنَّ $a=\sqrt{3}$.

17) **أكتشف الخطأ:** أوجدت كلٌّ من مرام وفرح ناتج التكامل: $\int (x+2)^2\,dx$ كالآتي:

إجابة مرام	إجابة فرح
$\frac{1}{3}(x+2)^3+c$	$\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+c$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أبرر إجابتي.

التكامل المحدود

Definite Integrals

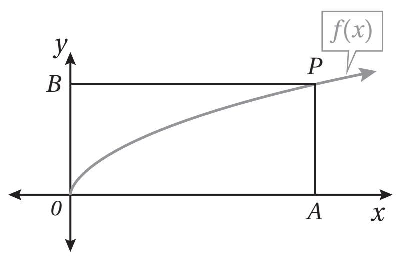
أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_{1}^{3} (3x^2 + 7)\, dx$
2. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 1)\, dx$
3. $\int_{1}^{8} (\sqrt[3]{x} - 2)\, dx$
4. $\int_{a}^{b} \frac{1}{2} x^2\, dx$
5. $\int_{0}^{27} \sqrt{3x}\, dx$
6. $\int_{-2}^{5} (2x^2 - 3x + 7)\, dx$

7. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x.

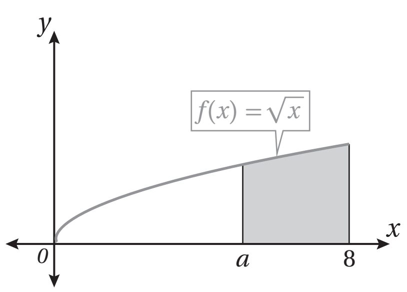
8. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$ و $x = 3$.

9. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$، والمحور x.



10. يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$. إذا علمْتُ أنَّ النقطة P تقع على منحنى الاقتران، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة OPA المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x تساوي ثلثي مساحة المستطيل $OAPB$.

11. أجد حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 5$، والمحورين الإحداثيين، والمستقيم $x = 3$، حول المحور x.



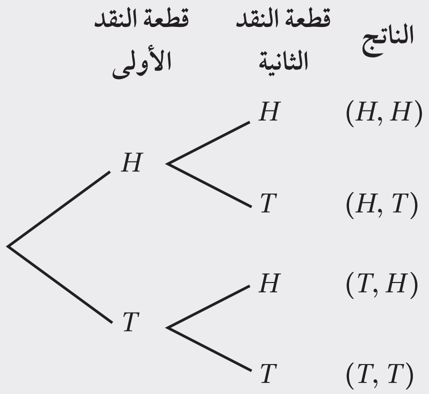
12. دارت المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيمين $x = 0$، و $x = 8$، حول المحور x. إذا كان حجم جزء المجسَّم الواقع إلى يمين $x = a$ يساوي حجم الجزء الواقع إلى يسارها، فأجد قيمة a.

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

استعمال مُخطَّط الشجرة لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

1 أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد عشوائيًّا.

مثال: أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعتي نقد عشوائيًّا.



أُلاحِظ من مُخطَّط الشجرة أنَّ لهذه التجربة 4 نواتج مُمكِنة.

إذن، الفضاء العيني هو:

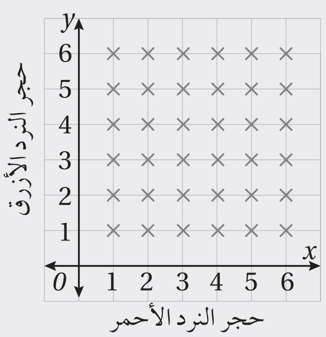
$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$

استعمال مُخطَّط الاحتمال لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

2 دُوِّر قرص مُؤشِّرٍ مقسّم إلى 3 قطاعات متطابقة؛ أولها أحمر (R)، وثانيها أزرق (B)، وثالثها أبيض (W)، ثم دُوِّر قرص مُؤشِّرٍ مقسّم إلى 4 قطاعات متطابقة، كُتِب عليها الأعداد: 1, 2, 3, 4. أستعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

مثال: أستعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي حجري نرد عشوائيًّا؛ أحدهما لونه أحمر، والآخر لونه أزرق.

أرسم محورين، ثم أكتب على أحدهما نواتج رمي حجر النرد الأحمر، ثم أكتب على المحور الآخر نواتج رمي حجر النرد الأزرق، كما في الشكل المجاور الذي يُمثِّل فيه تقاطعُ خطوط مُخطَّط الاحتمال الفضاءَ العيني للتجربة.



إيجاد احتمال الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة (الدرس 1)

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى خضراء (G)، و8 قطع حلوى حمراء (R)، جميعها مُتماثِلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة أُخرى عشوائيًّا ليأكلها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

3 اختيار الطفل قطعتي حلوى مُتماثِلتي اللون.

4 اختيار الطفل قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

مثال: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، جميعها مُتماثِلة. سُحِبت كرة من الكيس عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحِبت كرة أُخرى عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

a) سحب كرة خضراء في المرَّة الأولى، ثم سحب كرة حمراء في المرَّة الثانية.

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

b) سحب كرتين مختلفتي اللون.

$$P(G \cap R) + P(R \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$

إيجاد متمّمة الحادث (الدرس 2)

5 إذا كان احتمال أن تصل حافلة في موعدها يساوي $\frac{9}{11}$، فما احتمال أن تتأخر الحافلة؟

6 إذا كان احتمال إصابة شخص بالسكّري $\frac{1}{4}$، فما احتمال عدم الإصابة؟

7 كان احتمال خسارة الفريق المباراة 0.4، فما احتمال ألّا يخسر الفريق المباراة؟

8 إذا كان احتمال اختيار طالبة من الصف السابع ترتدي نظّارة يساوي $\frac{1}{9}$، فما احتمال اختيار طالبة لا ترتدي نظّارة؟

9 إذا كان احتمال فوز فريق كرة القدم الذي يشجّعه عليّ $\frac{2}{7}$، فما احتمال ألاّ يفوز الفريق؟

10 إذا كان احتمال اختيار طالب من الصفّ السابع وحيد الوالدين $\frac{2}{5}$، فما احتمال أن يكون لديه إخوة؟

مثال:

a) إذا كان احتمال اختيار طالب من الصفّ السابع لديه دراجة هوائية يساوي $\frac{6}{10}$، فما احتمال اختيار طالب ليس لديه دراجة هوائية؟

1

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ليس لديه دراجة　　لديه دراجة

P (ليس لديه دراجة) $= 1 - P$ (لديه دراجة)

$= 1 - \frac{6}{10}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{2}{5}$

b) إذا كان احتمال أن يهطل المطر غدًا يساوي 0.7، فما احتمال ألّا يهطل المطر غدًا؟

1

0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

لا يهطل المطر　　يهطل المطر

P (لا يهطل المطر) $= 1 - P$ (يهطل المطر)

$= 1 - 0.7$

$= 0.3$

إيجاد احتمال الحوادث المتنافية (الدرس 2)

في تجربة اختيار عدد عشوائيًّا من بين الأعداد: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12:

11 ما احتمال اختيار عدد فردي، ويقبل القسمة على 4؟

12 ما احتمال اختيار عدد فردي، أو عدد يقبل القسمة على 4؟

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة:

a) ما احتمال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5؟

أفترض أنَّ (A) هو حادث ظهور عدد زوجي، وأنَّ (B) هو حادث ظهور عدد يقبل القسمة على 5

وبذلك، فإنَّ: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{5\}$

بمـا أنَّ $\{2, 4, 6\} \cap \{5\} = \phi$، فـإنَّ (A) و(B) حادثان متنافيان. إذن، احتمـال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5 هو صفر. وبالرموز: $P(A \cap B) = 0$

b) ما احتمال ظهور عدد زوجي، أو عدد يقبل القسمة على 5؟

(A) و(B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال وقوع (A) أو (B) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

وبالرموز:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ صيغة احتمال حادثين متنافيين

$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ بإيجاد احتمالات كلٍّ من الحادثين، والتعويض

$= \frac{2}{3}$ بالجمع، ثم التبسيط

إيجاد احتمال الحوادث المتنافية الشاملة (الدرس 2)

13 قرص دائريّ مقسّم إلى 3 قطاعات غير متطابقة، وملوّنة بالأحمر والأصفر والأزرق. إذا كان الجدول المجاور يبيّن احتمال توقّف المؤشر عند كلّ لون من هذه الألوانِ، فأجد قيمة x.

اللون	الأزرق	الأحمر	الأصفر
الاحتمال	0.3	0.4	x

14 قرص دائريّ مقسّم إلى 6 قطاعات غير متطابقة، وهي مرقّمة بالأرقام: 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1. إذا كان الجدول المجاور يبيّن احتمال توقّف المؤشّر عند كلّ رقم من هذه الأرقام، فأجد قيمة x.

الرقم	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

مثال: قرص دائريّ مقسّم إلى 4 قطاعات غير متطابقة، وملوّنة بالأخضر والزهريّ والأزرق والأصفر. إذا كان الجدول الآتي يبيّن احتمال توقّف المؤشّر عند كلّ لون من هذه الألوان، فأجد قيمة x.

اللون	الأخضر	الزهريّ	الأصفر	الأزرق
الاحتمال	0.3	0.4	x	$2x$

بما أنّ حوادث توقّف مؤشّر القرص على الألوان الأربعة هي حوادث متنافية وشاملة، فإنّ مجموع احتمالاتها هو 1:

$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$ مجموع الحوادث الشاملة

$0.7 + 3x = 1$ بجمع الثوابت، وجمع المتغيّرات

$3x = 0.3$ بطرح 0.7 من الطرفين

$x = 0.1$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

التباديل والتوافيق
Permutations and Combinations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\frac{8!}{4!}$

2 ${}_7P_3$

3 ${}_7C_3$

4 ${}_9C_0$

5 ${}_5P_5$

6 $\frac{6! \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3}$

7 لدى أحمد 3 أزواج مختلفة من الأحذية، و4 بناطيل مختلفة، و4 قمصان مختلفة، و3 ربطات عنق مختلفة. بكم طريقةً مختلفة يُمكِن أنْ يظهر أحمد مُرتدِيًا زوجًا من الأحذية، وبنطالًا، وقميصًا، مع ربطة عنق، أو من دونها؟

8 اجتمع في قاعة 20 شخصًا، ثم بادر كلٌّ منهم إلى مصافحة جميع الأشخاص الآخرين الموجودين في القاعة. كم مصافحةً شهدتها هذه القاعة؟

9 في متحف 20 لوحة فنية، منها 8 لوحات لفنّان واحد، والبقية لفنّانين آخرين. إذا اختار المسؤول عن المتحف 4 لوحات عشوائيًّا لعرضها في أحد المعارض، فما عدد طرائق اختيار اللوحات الأربع إذا كان بينها لوحتان على الأكثر من لوحات الفنّان صاحب اللوحات الثماني؟

10 **سباق:** شارك كلٌّ من أحمد، وسلمان، وزياد في سباق 400 m مع 7 متسابقين آخرين. ما احتمال أنْ يفوز هؤلاء الثلاثة بالمراكز الثلاثة الأولى من السباق؟

11 نظر محمد في برنامج توزيع الدروس ليوم الخميس، فوجده يحوي 6 حصص للمباحث الآتية: الرياضيات، واللغة العربية، والفيزياء، واللغة الإنجليزية، والتربية الإسلامية، والكيمياء. إذا حُدِّد ترتيب هذه الحصص في البرنامج عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون الحصتان الأُوليان هما الفيزياء واللغة الإنجليزية بأيِّ ترتيب مُمكِن؟

رتّب فؤاد 4 كؤوس مختلفة ودرعين مختلفتين عشوائيًّا في صف واحد ضمن خزانة عرض. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

12 أنْ تكون الكؤوس الأربع متجاورة.

13 أنْ يكون الدرعان في وسط الصف.

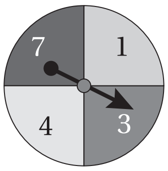
المُتغيِّرات العشوائية

Random Variables

أجد مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. سحب 6 كرات عشوائيًّا من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات خضراء، و 5 كرات زرقاء، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

2. إطلاق 8 طلقات على هدف ثابت، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X عدد مرّات إصابة الهدف.



3. تدوير مُؤشِّر القرص المجاور مرَّتين، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X مجموع الرقمين اللذيْنِ توقَّف عليهما المُؤشِّر.

4. سُحِب بالونان عشوائيًّا مع الإرجاع من كيس فيه 8 بالونات حمراء، وبالون واحد أصفر، و3 بالونات بيضاء. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البالونات الصفراء المسحوبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

يُبيِّن الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	1	2	5	7
$P(Y=y)$	b	0.4	$2b$	0.12

5. أجد قيمة b.

6. أجد ناتج: $P(Y \geq 2)$.

7. أجد ناتج: $P(1 < Y \leq 7)$.

8. أجد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-1	0	2	3
$P(X=x)$	0.15	0.25	0.35	0.25

سُئِل طلبة إحدى المدارس عن عدد الهواتف المحمولة في منازلهم، فكانت الإجابات كما في الجدول الآتي:

عدد الهواتف المحمولة (x)	1	2	3	4	5	6
عدد الطلبة (f)	35	55	105	140	110	75

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الهواتف المحمولة:

9. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

10. أجد التوقُّع $E(X)$.

الوحدة 9: المتتاليات والمتسلسلات

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد حدود متتالية معطى حدها العام (الدرس 1)

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية معطى حدها العام في ما يأتي:

3) $4n+2$

2) n^2-1

1) $3n+1$

مثال: أجد أول أربعة حدود للمتتالية التي حدها العام: $2n-1$

$n=3$ $\quad 2(3)-1=5$

$n=1$ $\quad 2(1)-1=1$

$n=4$ $\quad 2(4)-1=7$

$n=2$ $\quad 2(2)-1=3$

إيجاد الحد العام للمتتاليات (الدرس 1)

أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

6) $5, 8, 13, 20, 29, \ldots$

5) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

4) $3, 10, 17, 24, 31, \ldots$

مثال: أجد الحد العام للمتتالية: $2, 9, 28, 65,\ldots$

أُلاحِــظ أنَّ المتتالية لم تنتج من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها، أو من ضرب حدودها في عدد ثابت، وأنَّها لم تنتج من تربيع كل حد.

أُفسِّر المتتالية عن طريق تكعيب رتبة كل حد n^3:

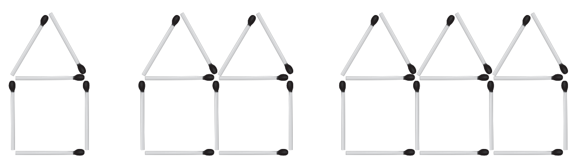
n^3	...	64	27	8	1
?	...	65	28	9	2

أُلاحِظ أنَّ المتتالية المطلوبة تنتج عند إضافة 1 إلى كل مكعب رتبة أيٍّ من الحدود.

إذن، الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = n^3 + 1$

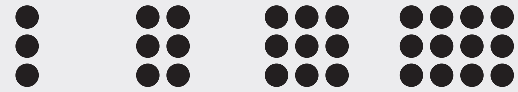
التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية (الدرس 1)

7) يمثّــل عدد أعــواد الثقاب في نماذج النمط الهندســي المجاور متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



النموذج (3) النموذج (2) النموذج (1)

مثال: يمثّل عدد النقاط في نماذج النمط الهندسي المجاور متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



النموذج (4) النموذج (3) النموذج (2) النموذج (1)

بالنظر إلى هذا النمط، أُلاحِظ أنَّ عدد النقاط يشكّل المتتالية الآتية:

$$\underset{1\times3}{3},\ \underset{2\times3}{6},\ \underset{3\times3}{9},\ \underset{4\times3}{12},\ \ldots$$

بالنظر إلى الحدود الأولى من المتتالية، أُلاحِظ أنَّ كل حد فيها يساوي حاصل ضرب رتبته في العدد 3

إذن، الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n$

إكمال نمط عددي معطى (الدرس 2)

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

8) $4, 6, 8, 10,\ldots$

9) $3, 6, 9, 12, \ldots$

10) $2, 4, 8, 16, \ldots$

مثال: أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

a) 7, 14, 21, 28,…

بطرح أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّ كل حد يزيد على الحد السابق بمقدار 7

إذن، تتزايد المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49,\ldots$$

+7 +7 +7 +7 +7 +7

b) 8, 16, 32, 64, ….

بقسمة أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّه يُمكِن إيجاد أيِّ حد بضرب الحد السابق له في 2، وأنَّ الحدود الثلاثة التالية هي:

$$8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,\ldots$$

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

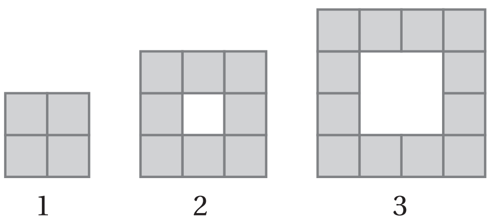
أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1) $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$
2) $a_n = -3n^2$
3) $a_n = (n+1)^2$
4) $a_n = n(n-1)$
5) $a_n = 1 + (-1)^n$
6) $a_n = n^n$

أكتب كُلًّا ممّا يأتي من دون استعمال رمز المجموع:

7) $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$
8) $\sum_{k=1}^{9} k(k+3)$
9) $\sum_{k=1}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُمثِّل نمطًا هندسيًّا، أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



10) أكتب الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد المربعات المُلوَّنة في كل شكل.

11) أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد المربعات المُلوَّنة في أول عشرين شكلًا من هذا النمط، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

12) إذا كان طول ضلع كل مربع مُلوَّن هو وحدة واحدة، فأجد الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل مساحة المربعات البيضاء وسط كل شكل.

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

13) $-1 + 4 - 9 + \ldots + 36$
14) $10.8 + 10.5 + 10.2 + 9.9$
15) $3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{8}$
16) $1000 + 100 + 10 + \ldots + \frac{1}{100}$

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحد العشرين منها:

1) $a_6 = -8$, $a_{15} = -62$
2) $a_{11} = 43, d = 5$
3) $25, 26.5, 28, 29.5, \ldots$

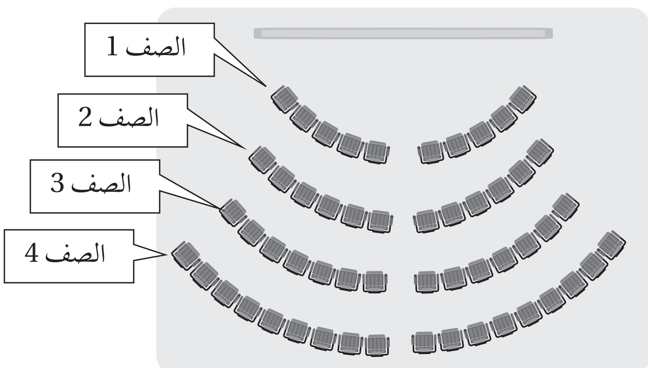
إذا كانت المتتالية: ... ,41 ,34 ,27 ,20 حسابية، فأجد:

4) الحد 100 من المتتالية.
5) أكبر حد أقل من 200
6) مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية.

أجد مجموع الحدود الثلاثين الأولى لكلٍّ ممّا يأتي:

7) متسلسلة حدها العام $1 + 6n$
8) متتالية حدها العام $8n + 5$

مسارح: مسرح في صفه الأول 10 مقاعد، وفي صفه الثاني 12 مقعدًا، وفي صفه الثالث 14 مقعدًا، وهكذا حتى الصف الأخير منه:



9) أُبيِّن أنَّ عدد المقاعد في صفوف المسرح يُشكِّل متتالية حسابية.
10) أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.
11) إذا كان في المسرح 14 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا في المسرح؟

متسلسلة حسابية مجموع حدودها العشرين الأولى 730، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى 1545:

12) أجد الحد الأول من المتسلسلة.
13) ما أساس المتسلسلة؟
14) أجد عدد حدود المتسلسلة التي تقل عن 101

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1) $729, 243, 81, 27, 9, \ldots$

2) $-0.8, 3.2, -12.8, 51.2, -204.8, \ldots$

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية:

3) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots$

4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

متتالية هندسية حدها الثالث $\frac{8}{3}$، وحدها الخامس $\frac{32}{27}$:

6) أجد الحد الأول من المتتالية.

7) ما المجموع اللانهائي لحدود المتتالية؟

8) متتالية هندسية لانهائية متقاربة، حدها الأول a، ومجموعها ka، حيث $k > 1$. أجد حدها الثاني بدلالة الثابتين: a و k.

9) إذا كان الحد الأول لمتسلسلة هندسية لانهائية متقاربة x، وأساسها $3x$، ومجموعها 8، فما قيمة x؟

10) **حواسيب:** اشترت رغد حاسوبًا، واتفقت مع البائع على أنْ تدفع من ثمنه JD 100 في الشهر الأول، ثم تدفع في بقية الشهور ما نسبته 80% من قيمة دُفعة الشهر السابق، مدَّة عام كامل. كم دينارًا سعر الحاسوب؟

بدأ ماهر العمل في إحدى الشركات، وبلغ راتبه الشهري في السنة الأولى JD 500؛ على أنْ يزداد الراتب بنسبة 3% سنويًّا بعد العام الأول:

11) أكتب قاعدة يُمكِن استعمالها لتحديد راتب ماهر بعد (n) من السنوات.

12) كم دينارًا سيبلغ راتبه الشهري في العام الخامس؟

13) إذا استمر ماهر في العمل بهذه الشركة 10 سنوات، فما مجموع رواتبه في هذه السنوات؟