الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   أيمن ناصر صندوقه   إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2022/7)، تاريخ 2022/11/8 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2022/109)، تاريـخ 2022/12/6 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 422 - 4

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/796)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتـاب الطالـب: الصـف الثانـي عشـر الفـرع الأدبـي: الفصـل الدراسـي الثانـي/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.– عمّـان: المركـز، 2023

(121) ص.

ر.إ.: 2023/2/796

الواصفات:/ الرياضيات/ / الكتب الدراسية/ / أساليب التدريس/ / التعليم الثانوي

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1443 هـ / 2022 م

أعيدت طباعته 1444 هـ / 2023 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســـعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراســـية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عناية كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انســـجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغْيَةَ إعداد الطلبة للدراســـة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعـــي أيضًا تقديم الموضوعات بطريقـــة منظمة جاذبة ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشـــادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاســـة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتســـبوها ســـابقًا، وتســـاعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتية تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المســـائل نهجٌ ناجعٌ في ترســـيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرســـي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة

4

التكامل

Integration

ما أهمية هذه الوحدة؟

التكامل عملية عكسية للتفاضل؛ لذا يُستعمَل في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي تتضمَّن مقاديرَ مُتغيِّرةً مع الزمن. وكذلك يُستعمَل لحساب المساحات المحصورة بين المنحنيات، فضلًا عن بعض الحسابات المالية مثل التكلفة الكلية للإنتاج، وبعض الحسابات المُتعلِّقة بالمجتمعات الحيوية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة، والاقترانات الأُسِّية الطبيعية، والاقترانات اللوغاريتمية الطبيعية، والاقترانات المثلثية.
- ✓ تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- ✓ حَلَّ معادلات مُختلِفة.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد التكامل المحدود والتكامل غير المحدود لكثيرات الحدود والاقترانات الأُسِّية، والمثلثية، واللوغاريتمية الطبيعية والمُتشعِّبة.
- ◄ إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x.
- ◄ إيجاد تكاملات عن طريق التعويض.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6–8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

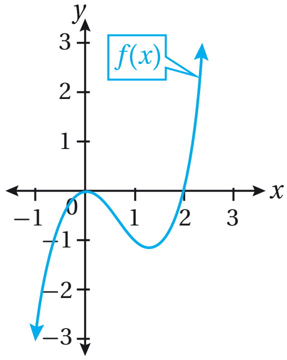
الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

فكرة الدرس
- تعرُّف التكامل بوصفه عملية عكسية للاشتقاق.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقتران القوَّة، والاقتران الثابت.

المصطلحات الاقتران الأصلي، التكامل غير المحدود، المُكامَل، ثابت التكامل، مُتغيِّر التكامل.

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، هل يُمكِنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمْتُ أنَّ مشتقته هي: $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟



الاقتران الأصلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان الاقتران معلومًا فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقته باستعمال قواعد الاشتقاق. ولكنْ، إذا كانت مشتقة الاقتران معلومة، فكيف يُمكِن معرفة الاقتران؟ في هذه الحالة، يتعيَّن استعمال طريقة عكسية تلغي المشتقة. وبكلمات أُخرى، إذا عُلِم الاقتران $f(x)$، فيجب إيجاد اقتران ما، وليكن: $F(x)$، بحيث $F'(x) = f(x)$، ويُسمّى $F(x)$ **اقترانًا أصليًّا** (primitive function) للاقتران $f(x)$.

فمثلًا، إذا كان: $f(x) = 3x^2$، فإنَّ الاقتران: $F(x) = x^3$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، لكنَّها ليست الصورة الوحيدة له؛ فقد يكون في صورة: $F(x) = x^3 + 1$، أو صورة: $F(x) = x^3 - 3$؛ لأنَّ مشتقة كلٍّ منهما تساوي $3x^2$ (مشتقة الحدِّ الثابت تساوي صفرًا).

بوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران: $f(x)= 3x^2$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C = x^3 + C$، حيث C ثابت.

أتذكَّر
يُرمَز إلى مشتقة الاقتران $F(x)$، بالنسبة إلى المُتغيِّر x، بالرمز $F'(x)$.

أتعلَّم
يوجد عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية للاقتران الواحد.

مفهوم أساسي **الاقتران الأصلي**

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران المتصل $f(x)$، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مثال 1

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1 $f(x) = 6x^5$

عندما أبحث عن اقتران مشــتقته $6x^5$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشــتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فــإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 6.

وبما أنَّ مشتقة x^6 تساوي $6x^5$، فإنَّ: $F(x) = x^6$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^6 + C$$

2 $f(x) = -3x^{-4}$

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $-3x^{-4}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -3.

وبما أنَّ مشتقة x^{-3} تساوي $-3x^{-4}$، فإنَّ: $F(x) = x^{-3}$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^{-3} + C$$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

أتحقَّق من فهمي

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 5x^4$

b) $f(x) = -9x^{-10}$

التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال الســابق أنَّه يُمكِــن كتابة العلاقة بين الاقتــران $f(x)$ والاقتران الأصلي له $G(x) = F(x) + C$ في صورة المعادلة الآتية:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

يُمكِن التعبير عن هذه المعادلة من دون استعمال رمز المشتقة كالآتي:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** (indefinite integral) للاقتران $f(x)$، ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** (integrand)، ويُسمّى C **ثابت التكامل** (constant of integration). أمّا dx فرمز يشير إلى أنَّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل** (variable of integration).

أتعلَّم

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنَّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:

المُكامَل ثابت التكامل

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

رمز التكامل مُتغيِّر التكامل

بما أنَّ: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، فهذا يعني أنَّ: $F'(x) = f(x)$. وبهذه العلاقة بين المشتقة والاقتران الأصلي، يُمكِن التوصُّل إلى قواعد أساسية للتكامل غير المحدود.

مفهوم أساسي

قواعد أساسية للتكامل غير المحدود

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت

1) $\int k\,dx = kx + C$

تكامل اقتران القوَّة

2) $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صحة التكامل بإيجاد مشتقة الاقتران الناتج من التكامل، ومقارنتها بالاقتران المُكامَل.

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 9\,dx$

تكامل الثابت

$$\int 9\,dx = 9x + C$$

أتعلَّم

لإيجاد تكامل اقتران القوَّة، أَتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

- أُضيف 1 إلى الأُسِّ.
- أضرب في مقلوب الأُسِّ الجديد.

2 $\int x^{10}\, dx$

$$\int x^{10}\, dx = \frac{1}{10+1} x^{10+1} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{11} x^{11} + C$$ بالتبسيط

3 $\int \sqrt{x}\, dx$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$ بالتبسيط

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$ الصورة الجذرية

أتعلَّم

قبل البَدْء بعملية التكامل، أُعيد أوَّلًا كتابة المُكامَل في صورة $x^{m/n}$، مُستذكِرًا العلاقة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

4 $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

$$\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx$$ تعريف الأُسِّ السالب

$$= \frac{1}{-3+1}\, x^{-3+1} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$ تعريف الأُسِّ السالب

أتذكَّر

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6\, dx$

b) $\int x^8\, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{1}{x^5}\, dx$

خصائص التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيف أجد تكاملًا غير محدود للاقتران الثابت، واقتران القوَّة. والآن سأتعرَّف خصائص تُسهِّل إيجاد تكامل الاقترانات التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (6x^2 + 2x)\ dx$

$$\int (6x^2 + 2x)\ dx = 6\int x^2\ dx + 2\int x\ dx$$
تكامل المجموع، واقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$
تكامل اقتران القوَّة

$$= 2x^3 + x^2 + C$$
بالتبسيط

2 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right)\ dx$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right)\ dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx - 3\int \frac{1}{x^5}\ dx$$
تكامل الفرق، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \int x^{-1/2}\ dx - 3\int x^{-5}\ dx$$
تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الأُسِّية

$$= 2x^{1/2} - 3\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right) + C$$
تكامل اقتران القوَّة

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$
بالتبسيط، والصورة الجذرية

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه كُتِب ثابت تكامل واحد فقط هو C الذي يُمثِّل مجموع الثابتين الناتجين من التكاملين.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \left(x^3 - 2x^{5/3}\right)\ dx$

b) $\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right)\ dx$

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل.

أتعلَّم

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة باستعمال خصائص الأسس، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أضرب المقدارين الجبريين أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+2)(x-2)\ dx$

بضرب المقدارين الجبريين
$$\int (x+2)(x-2)\ dx = \int (x^2-4)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت
$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

2) $\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام
$$\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx = \int \left(\frac{8x^3}{x} + \frac{5x}{x}\right)\ dx$$

بالتبسيط
$$= \int (8x^2+5)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت
$$= \frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

3) $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\ dx$

بتوزيع الضرب على الجمع
$$\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\ dx = \int (x^3+2)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وقاعدة تكامل الثابت
$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

أتعلَّم

لا توجد قاعدة لتكامل القسمة؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة باستعمال خصائص الأسس، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَقسِم كل حدٍّ في البسط على المقام أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}\ dx$

b) $\int (3x+2)(x-1)\ dx$

c) $\int x(x^3-7)\ dx$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = x^7$
2. $f(x) = -2x^6$
3. $f(x) = -10$
4. $f(x) = 8x$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5. $\int 6x \, dx$
6. $\int (7x - 5) \, dx$
7. $\int (3 - 4x) \, dx$
8. $\int \frac{10}{\sqrt{x}} \, dx$
9. $\int 2x^{3/2} \, dx$
10. $\int (2x^4 - 5x + 10) \, dx$
11. $\int (2x^3 - 2x) \, dx$
12. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3} \right) dx$
13. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

14. $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} \, dx$
15. $\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}} \, dx$
16. $\int (x - 1)^2 \, dx$
17. $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} \, dx$
18. $\int \sqrt{x}\,(x - 1) \, dx$
19. $\int (2x - 3)(3x - 1) \, dx$

مهارات التفكير العليا

20. **أكتشف الخطأ:** أوجدت رنيم ناتج التكامل: $\int (2x + 1)(x - 1) \, dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x + 1)(x - 1) \, dx = \int (2x + 1) \, dx \times \int (x - 1) \, dx$$
$$= (x^2 + x) \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) + C$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رنيم، ثم أُصحِّحه.

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

21. $\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^2 dx$
22. $\int (x - 1)(x - 3)(x + 5) \, dx$

23. **تبرير:** إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q \right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 2

الشرط الأوَّلي
Initial Condition

فكرة الدرس تعرُّف الشرط الأوَّلي، واستعماله لإيجاد قيمة ثابت التكامل.

المصطلحات الشرط الأوَّلي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق، و $S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0)= 0$.

الشرط الأوَّلي، وإيجاد قاعدة الاقتران

يتطلَّب حَلُّ بعض المسائل إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّقها، وهذا يعني ضرورة تحديد قيمة ثابت التكامل C. يُمكِن تحديد هذه القيمة بتعويض نقطةٍ تُحقِّق الاقتران الأصلي، وتعطى عادةً في المسألة، وتُسمّى **الشرط الأوَّلي** (initial condition).

أتذكَّر

للاقتران $f(x)$ عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية التي يُمكِن التعبير عنها بالصورة الآتية: $G(x) = F(x) + C$، حيث: $f(x) = F'(x)$.

مثال 1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)\ dx \qquad f(x) = \int f'(x)\ dx$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C \qquad \text{تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت}$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأوَّلي المعطى في المسألة، وهو النقطة $(2, 4)$ التي يمرُّ بها منحنى الاقتران، وتُحقِّق قاعدة الاقتران؛ أيْ أُعوِّض $x = 2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C \qquad \text{قاعدة الاقتران}$$

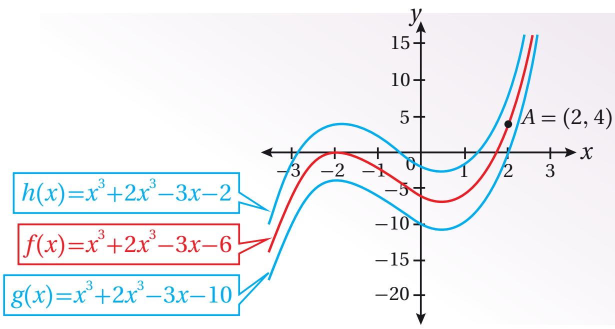
$$4 = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + C \qquad \text{بتعويض } x = 2, f(2) = 4$$

$$C = -6 \qquad \text{بحَلِّ المعادلة لـ } C$$

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور أنَّ الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي في المسألة هو: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$.



أتحقَّق من فهمي

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

يُستعمَل الشرط الأوَّلي كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

مثال 2 : من الحياة

التكلفة الحدِّية: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي JD 583.

أتذكَّر

تُمثِّل التكلفة الحدِّية مشتقة اقتران التكلفة، وترتبط بالتكاليف التي تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج، خلافًا للتكلفة الثابتة التي لا تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $C'(x)$.

$$C(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\, dx \qquad C(x) = \int C'(x)\, dx$$

$$= x^3 - 30x^2 + 400x + K \qquad \text{تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت}$$

أتعلَّم

بما أنَّ C يُمثِّل اقتران التكلفة، فإنَّني أستعمل K للتعبير عن ثابت التكامل.

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل K.

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + K \qquad \text{قاعدة الاقتران}$$

$$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400(1) + K \qquad \text{بتعويض } x = 1, C(1) = 583$$

$$K = 212 \qquad \text{بحَلِّ المعادلة لـ} K$$

إذن، اقتران التكلفة هو: $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$.

أتحقَّق من فهمي

التكلفة الحدِّية: يُمثِّـل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي 2200 JD.

الشرط الأوَّلي: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة.

مثال 3

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

بما أنَّ اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، فإنَّه يُمكِنني إيجاد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية عن طريق التكامل.

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع.

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$ بإيجاد تكامل اقتران السرعة

$$= \int (t+2)\ dt$$ بتعويض $v(t) = t + 2$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فإنَّ $s(0) = 11$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C:

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$ اقتران الموقع

أتذكَّر

اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، واقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع؛ أيْ إنَّ:

$s'(t) = v(t)$

$v'(t) = a(t)$

بتعويض $t = 0, s(0) = 11$ $\quad 11 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C$

بحَلِّ المعادلة $\quad C = 11$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع $\quad s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$

بتعويض $t = 8$ $\quad s(8) = \frac{1}{2}(8)^2 + 2(8) + 11$

بالتبسيط $\quad = 59$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة هو: 59 m

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

يُمكِن إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران التسارع له. ولكنْ، يجب في هذه الحالة توافر شرطين أوَّليين لحَلِّ المسألة، هما: إيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع، وإيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران السرعة.

مثال 4

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، وكانت سرعته هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الخطوة 1: أجد اقتران السرعة.

- بما أنَّ اقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع، فإنَّه يُمكِنني إيجاد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية عن طريق التكامل:

$$v(t) = \int a(t)\ dt$$ بإيجاد تكامل اقتران التسارع

$$= \int 6t\ dt$$ بتعويض $a(t) = 6t$

$$= 3t^2 + C_1$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

- أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ سرعة الجُسَيْم بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته هي 1 m/s، فإنَّ: $v(1) = 1$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

$$v(t) = 3t^2 + C_1$$ اقتران السرعة

$$1 = 3(1)^2 + C_1$$ بتعويض $t = 1, v(1) = 1$

$$C_1 = -2$$ بحَلِّ المعادلة

إذن، اقتران السرعة هو: $v(t) = 3t^2 - 2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الموقع.

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$ بإيجاد تكامل اقتران السرعة

$$= \int (3t^2 - 2)\ dt$$ بتعويض $v(t) = 3t^2 - 2$

$$= t^3 - 2t + C_2$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

- أجد قيمة ثابت التكامل C_2.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فإنَّ: $s(0) = 4$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2:

$$s(t) = t^3 - 2t + C_2$$ اقتران الموقع

$$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$$ بتعويض $t = 0, s(0) = 4$

$$C_2 = 4$$ بحَلِّ المعادلة

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = t^3 - 2t + 4$.

أتذكَّر

يُرمَز إلى ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع بالرمز C_1؛ نظرًا إلى وجود ثابت تكامل آخر سينتج من تكامل اقتران السرعة.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع	$s(t) = t^3 - 2t + 4$
بتعويض $t = 2$	$s(2) = (2)^3 - 2(2) + 4$
بالتبسيط	$= 8$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة هو: 8 m

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = x - 3;\ (2, 9)$

2) $f'(x) = x^2 - 4;\ (0, 7)$

3) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2;\ (1, 9)$

4) $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2;\ (4, 11)$

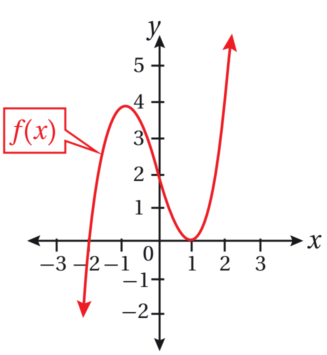
5) $f'(x) = (x+2)^2;\ (1, 7)$

6) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - x;\ (4, 0)$

7) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 5)$.

8) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \frac{x^2 + 10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5, 2)$.

9) يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



بالــون: عند نفخ بالون كروي الشــكل يصبح نصــف قُطْره y ســنتيمترًا بعد t ثانية.
إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t^{-\frac{2}{3}}, t > 0$، وكان نصــف قُطْــر البالون بعــد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 قاعدة العلاقة y بدلالة t.

11 نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

12 أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، وt عدد الســنوات منذ لحظــة زراعة الشــجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

13 يتحرَّك جُسَيْم في مســار مستقيم، وتعطى ســرعته بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

14 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَــيْم هو 3 m، وكانت ســرعته هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

15 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، ويعطى تســارعه بالاقتران: $a(t) = 9-2t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَــيْم حركته من نقطة الأصل بســرعة مقدارها 2 m/s، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا

16 تبرير: تعطى مشــتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a وb ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطــة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الدرس 3

التكامل المحدود
Definite Integral

فكرة الدرس

- إيجاد التكامل المحدود لاقترانات القوّة، والاقترانات المُتشعِّبة.
- إيجاد تكاملات باستعمال خصائص التكامل المحدود.

المصطلحات التكامل المحدود.

مسألة اليوم يُمثِّـل الاقتران: $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدِّية الشـهرية (بالدينار) لكل درّاجة نارية يُنتِجها أحد مصانع الدرّاجات، حيث x عدد الدرّاجات المُنتَجة شـهريًّا، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x درّاجة شهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 درّاجة إلى 600 درّاجة شهريًّا.

التكامل المحدود

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّ $\int f(x)\ dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، وتعلَّمْتُ أيضًا كيف أجد التكامل غير المحدود للاقتران الثابت واقتران القوَّة.

يُطلَق على: $\int_a^b f(x)\ dx$ اسم **التكامل المحدود** (definite integral) للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي له.

يُعرَّف التكامل المحدود: $\int_a^b f(x)\ dx$ على النحو الآتي:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

حدود التكامل من a إلى b.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي.

أتذكَّر
$F(x)$ هو اقتـران أصلي للاقتران $f(x)$.

عند إيجاد التكامل المحدود لأيِّ اقتـران $f(x)$، أُلاحِظ إلغاء ثابت التكامل C، وهذا يعني أنَّ الناتج هو نفسه بصرف النظر عن الاقتران الأصلي المُستعمَل:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= [(F(b) + C)] - [(F(a) + C)] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتــران $f(x)$ متصلاً علــى الفترة $[a, b]$، وكان $F(x)$ يُمثِّــل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

يُمكِن التعبير عن الفرق: $F(b) - F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

أتعلَّم

أستعمل الرمز: $F(x)\Big|_a^b$ بعــد الانتهاء مــن عملية التكامل.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1 $\displaystyle\int_0^1 (2x-5)\ dx$

$$\int_0^1 (2x-5)\ dx = (x^2-5x)\Big|_0^1$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= ((1)^2-5(1))-((0)^2-5(0))$$ بالتعويض

$$= -4$$ بالتبسيط

أتذكَّر

لا يَلــزم إضافــةُ ثابــت التكامل عنــد إيجاد ناتج التكامل المحدود.

2 $\displaystyle\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx$

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx = \int_{-4}^3 (4x-3x^2)\ dx$$ بتوزيع الضرب على الجمع

$$= (2x^2-x^3)\Big|_{-4}^3$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2(3)^2-(3)^3)-(2(-4)^2-(-4)^3)$$ بالتعويض

$$= -105$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\displaystyle\int_1^4 (8x-\sqrt{x})\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)\ dx$

يُمكِن إيجاد قيمة مجهولة في تكامل محدود، مِثْل حدٍّ من حدوده، إذا عُلِمت قيمة هذا التكامل كما في المثال الآتي.

مثال 2

إذا كان: $\int_{1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

التكامل المعطى	$\int_{1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$
الصورة الأُسِّية	$\int_{1}^{k} x^{-1/2}\, dx = 3$
تكامل اقتران القوَّة	$2x^{1/2} \Big\|_{1}^{k} = 3$
الصورة الجذرية	$2\sqrt{x} \Big\|_{1}^{k} = 3$
بالتعويض	$2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$
بالتبسيط	$2\sqrt{k} - 2 = 3$
بجمع 2 لطرفي المعادلة	$2\sqrt{k} = 5$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$\sqrt{k} = \frac{5}{2}$
بتربيع طرفي المعادلة	$k = \frac{25}{4}$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_{0}^{k} 6x^2\, dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

خصائص التكامل المحدود

تعرَّفْتُ سابقًا خصائص التكامل غير المحدود. والآن سأتعرَّف بعض خصائص التكامل المحدود.

خصائص التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

التكامل عند نقطة

3) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

التبديل بين حدَّي التكامل

4) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

تجزئة التكامل

5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

أتعلَّم

فـي خاصيـة تجزئـة التكامـل، لا يُشـترَط أنْ تكون $a < c < b$.

مثال 3

إذا كان: $\int_0^5 f(x)\, dx = 10$، $\int_0^5 g(x)\, dx = -4$، $\int_5^7 f(x)\, dx = 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\int_0^5 (4 f(x) + g(x))\, dx$

$\int_0^5 (4 f(x) + g(x))\, dx = \int_0^5 4 f(x)\, dx + \int_0^5 g(x)\, dx$ تكامل المجموع

$= 4 \int_0^5 f(x)\, dx + \int_0^5 g(x)\, dx$ تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$= 4(10) + (-4)$ بالتعويض

$= 36$ بالتبسيط

2 $\int_5^0 5g(x)\, dx$

$\int_5^0 5g(x)\, dx = -\int_0^5 5g(x)\, dx$ بالتبديل بين حدَّي التكامل

$= -5 \int_0^5 g(x)\, dx$ تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$= -5 \times -4$ بالتعويض

$= 20$ بالتبسيط

3 $\int_{0}^{7} f(x)\ dx$

$$\int_{0}^{7} f(x)\ dx = \int_{0}^{5} f(x)\ dx + \int_{5}^{7} f(x)\ dx$$ بتجزئة التكامل

$$= 10 + 3$$ بالتعويض

$$= 13$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 7$, $\int_{4}^{1} f(x)\ dx = 2$, $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 5$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\ dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$

c) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\ dx$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيف أستعمل خاصية التجزئة في إيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل هذه الخاصية في إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعِّبة إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ إذ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال 4

1 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{1}^{4} f(x)\ dx$.

$$\int_{1}^{4} f(x)\, dx = \int_{1}^{2} 12\, dx + \int_{2}^{4} 3x^2\ dx$$ قاعدة تجزئة التكامل

$$= 12x \Big|_{1}^{2} + x^3 \Big|_{2}^{4}$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 12(2) - 12(1) + \left((4)^3 - (2)^3\right)$$ بالتعويض

$$= 68$$ بالتبسيط

أتعلَّم

بما أنَّ الاقتران قد تشعَّب عندما $x = 2$، فإنَّني أُجزِّئ التكامل في هذه الحالة؛ لأنَّ فترة التكامل تحوي نقطة التشعُّب.

2 إذا كان: $f(x) = |x-1|$، فأجد قيمة: $\int_0^5 f(x)\,dx$.

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & , x<1 \\ x-1 & , x\geq 1 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^5 (x-1)\,dx$$ قاعدة تجزئة التكامل

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^5$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوّة

$$= \left(\left(1-\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(0-\frac{1}{2}(0)^2\right)\right)+\left(\left(\frac{1}{2}(5)^2-5\right)-\left(\frac{1}{2}(1)^2-1\right)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{17}{2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x<1 \\ 2x & , x\geq 1 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |x-3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^4 f(x)dx$.

أتذكَّر

يُطلَق على إعادة كتابة اقتران القيمة المُطلَقة في صورة اقتران مُتشعِّب **إعادةُ تعريف اقتران القيمة المُطلَقة**، ويكون ذلك بدراسة إشارة المقدار داخل القيمة المُطلَقة.

التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلًا، مُعدَّل تغيُّر $f(x)$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x هو $f'(x)$. ولكنْ، يكون مُعدَّل التغيُّر $f'(x)$ معلومًا في بعض الأحيان، ويتعيَّن معرفة مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x=a$ إلى $x=b$، الذي يُعبَّر عنه بالمقدار: $f(b)-f(a)$، عندئذٍ يُمكِن استعمال التكامل المحدود لإيجاد مقدار التغيُّر على النحو الآتي:

مفهوم أساسي

إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

تبرز الحاجة إلى معرفة مقدار التغيُّر في كثير من التطبيقات الاقتصادية، مثل الحاجة إلى معرفة مقدار الزيادة في أرباح شركة زادت مبيعاتها من عدد مُعيَّن من القطع إلى عدد آخر.

مثال 5 : من الحياة

التغيُّر في الأرباح: يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

صيغة مقدار التغيُّر

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\,dx$$

بتعويض $a = 1000, b = 1100$

$$P(1100) - P(1000) = \int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

بالتعويض

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2) - (165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

بالتبسيط

$$= 6000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز، فإنَّ أرباح الشركة ستزيد شهريًّا بمقدار JD 6000.

أتحقَّق من فهمي

مُعتمِدًا المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5، أجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2 \, dx$

2) $\int_{-3}^{-2} 6 \, dx$

3) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3) \, dx$

4) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x} \, dx$

5) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

6) $\int_{-2}^{3} (-x^2 + 4x - 5) \, dx$

7) $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2) \, dx$

8) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2) \, dx$

9) $\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2} \, dx$

10) $\int_{1}^{4} x^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$

11) $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/3}) \, dx$

12) $\int_{1}^{9} \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 dx$

13) $\int_{-1}^{4} |6 - 3x| \, dx$

14) $\int_{3}^{5} |x-2| \, dx$

15) $\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \, dx$

16) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \leq 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x) \, dx$.

17) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & , x < 0 \\ x + 5 & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x) \, dx$.

إذا كان: $\int_{1}^{2} f(x) \, dx = -4, \int_{1}^{5} f(x) \, dx = 6, \int_{1}^{5} g(x) \, dx = 8$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

18) $\int_{2}^{2} g(x) \, dx$

19) $\int_{5}^{1} (g(x) - 2) \, dx$

20) $\int_{1}^{2} (3f(x) + x) \, dx$

21) $\int_{2}^{5} f(x) \, dx$

22) $\int_{1}^{5} \left(f(x) - g(x)\right) dx$

23) $\int_{1}^{5} \left(4f(x) + g(x)\right) dx$

24 إذا كان: $\int_{1}^{m} (6x - 10)\ dx = 4$، فأجد قيمة الثابت m.

25 تغيُّـر التكلفة: يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشـركات، حيـث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشـركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشـهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كـم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

مهارات التفكير العليا

27 أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_{0}^{2} (x^2 + x)\ dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_{0}^{2} (x^2 + x)\ dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$= -\frac{14}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أُصحِّحه.

28 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{1} x^n (1-x)\ dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$، حيث $n > 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

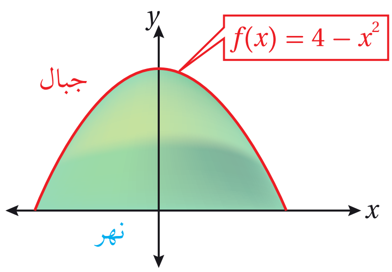
29 تحدٍّ: إذا كان: $\int_{1}^{5} (2ax + 7)\ dx = 4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس 4

المساحة
Area

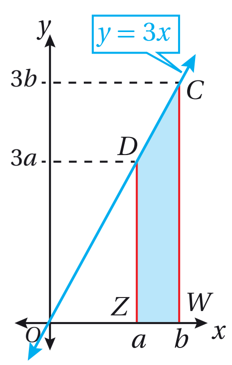
فكرة الدرس إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x.

مسألة اليوم يُمثِّل الجزء المُظلَّل بالأخضر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها سلسلة من الجبال، ويُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحدَّ الفاصل بين سلسلة الجبال والمنطقة الزراعية، ويُمثِّل المحور x حافة النهر الذي يُطِلُّ على المنطقة الزراعية. أجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية، علمًا بأنَّ x و y مَقيسان بالكيلومتر.



المساحة

في الشكل المجاور، يُمكِن إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المستقيم $y = 3x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، وذلك بطرح مساحة ΔOZD من مساحة ΔOWC كما يأتي:



$$\frac{1}{2}(3b^2) - \frac{1}{2}(3a^2)$$

أُلاحِظ أنَّه يُمكِن التعبير عن الصيغة السابقة بالمقدار: $\frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$، ثم التعبير عن المساحة بين المستقيم $y = 3x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$ بالتكامل الآتي:

$$\int_a^b 3x\, dx = \frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$$

وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد المساحة باستعمال التكامل.

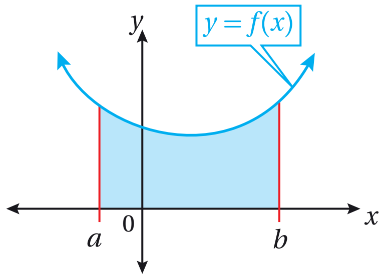
أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ ارتفاع المثلث معطى بالقيمة الآتية: $y = 3x$.

سأتعلَّم في هذا الدرس حالة من حالات إيجاد المساحة باستعمال التكامل، هي: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x. وهذه الحالة تنقسم إلى ثلاث حالات، هي:

- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور.
- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور.
- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور



يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، وتقع فوق المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx\ ; a < b$$

مثال 1

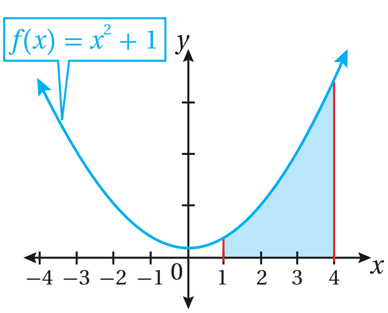
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 4]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$x^2 + 1 = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 + 1$



بما أنَّ $x^2 + 1 \neq 0$، فإنَّ منحنى الاقتران لا يتقاطع مع المحور x كما في الشكل المجاور.

أُفكِّر

لماذا $x^2 + 1 \neq 0$، مُبرِّرًا إجابتي؟

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع فوق المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

$A = \int_a^b f(x)\ dx$ قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

$= \int_1^4 (x^2 + 1)\ dx$ بالتعويض $f(x) = x^2 + 1, a = 1, b = 4$

$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_1^4$ تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$= \left(\frac{1}{3}(4)^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)$ بالتعويض

$= 24$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 24 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 3$.

أتعلَّم

يُمكِن تحديد أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x في فترة ما لا يقطع فيها محور x، من دون تمثيله بيانيًّا، عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر x في تلك الفترة في الاقتران؛ فإذا كانت النتيجة موجبة دلَّ ذلك على أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، وتقع أسفل المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx\ ;\ a < b$$

أتعلَّم

بما أنَّ المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها تقع أسفل المحور x، فإنَّ قيمة التكامل الناتج ستكون عددًا سالبًا؛ لذا يُختار معكوس ناتج التكامل؛ لأنَّ المساحة لا يُمكِن أنْ تكون سالبة.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 5$، و $x = 2$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[2, 5]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$x^2 - 8x = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 - 8x$

$x(x - 8) = 0$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

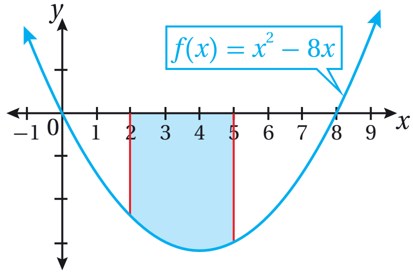
$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 8 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 8$ بحَلِّ المعادلة لـ x

أتعلَّم

تحديد نقاط التقاطع مع المحور x يساعد على تحديد إذا كانت المنطقة فوق المحور x أو أسفل هذا المحور.

إذن، الإحداثي x لنقطتي تقاطع الاقتران $f(x)$ مع المحور x ليس ضمن الفترة المعطاة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$ قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

$$= -\int_2^5 (x^2 - 8x)\,dx$$ بالتعويض $f(x) = x^2 - 8x,\ a = 2,\ b = 5$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^5$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(5)^3 - 4(5)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)^2\right)\right)$$ بالتعويض

$$= 45$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 45 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

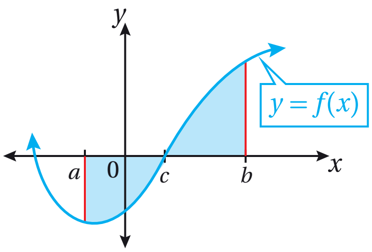
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

أتعلَّم

يُمكِن تحديد أنَّ منحنى الاقتران هو أسفل المحور x في فترة ما لا يقطع فيها محور x، من دون تمثيله بيانيًّا، عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر x في تلك الفترة في الاقتران؛ فإذا كانت النتيجة سالبة دلَّ ذلك على أنَّ منحنى الاقتران هو أسفل المحور x.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

قد يقع جزء من المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x أسفل هذا المحور، ويقع الجزء الآخر المُتبقّي منها فوقه كما في الشكل المجاور. وفي هذه الحالة، يُمكِن إيجاد المساحة بين منحنى هذا الاقتران والمحور x بتحديد المقطع x للاقتران، ثم إيجاد المساحة باستعمال القاعدة الآتية:



$$A = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 12$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 3$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 3]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

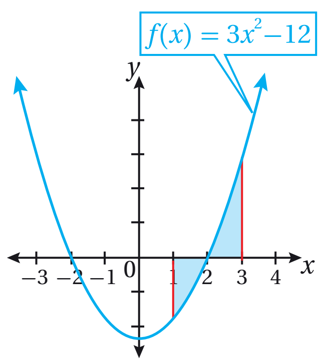
$3x^2 - 12 = 0$ بتعويض $f(x) = 3x^2 - 12$

$x^2 - 4 = 0$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

$(x+2)(x-2) = 0$ بتحليل الفرق بين مربعين

$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = -2 \qquad x = 2$ بحَلِّ كل معادلة لـ x



إذن، $x = 2$ يقع ضمن الفترة $[1, 3]$ كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المُتبقِّي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

$$A = -\int_1^2 (3x^2 - 12)\, dx + \int_2^3 (3x^2 - 12)\, dx$$ بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$= -(x^3 - 12x)\Big|_1^2 + (x^3 - 12x)\Big|_2^3$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= (12x - x^3)\Big|_1^2 + (x^3 - 12x)\Big|_2^3$$ بالتبسيط

$$= (12(2) - 2^3) - (12(1) - 1^3) + (3^3 - 12(3)) - (2^3 - 12(2))$$ بالتعويض

$$= 12$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = -3$.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

أُلاحِظ أنَّ المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها بين منحنى الاقتران والمحور x في الأمثلة السابقة محدودة بالمستقيمين: $x = a$، و $x = b$. ولكنْ، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنى الاقتران والمحور x، فإنَّه يَلزم عندئذٍ إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع الاقتران مع المحور x؛ لأنَّها تُمثِّل حدود التكامل.

مثال 4

1 **أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ — بمساواة الاقتران بالصفر

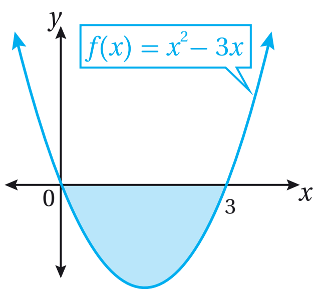
$x^2 - 3x = 0$ — بتعويض $f(x) = x^2 - 3x$

$x(x - 3) = 0$ — بإخراج العامل المشترك الأكبر

$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$x = 3$ — بحَلِّ المعادلة لـ x

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو: $x = 0, x = 3$، كما في الشكل المجاور، وهذان الإحداثيان يُمثِّلان حدَّي التكامل.



أتعلَّم

بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقطع المحور x عندما $x = 0$، و $x = 3$، من دون وجود مستقيمات تُحدِّد المنطقة المطلوبة، فإنَّه يتعيَّن إيجاد التكامل المحدود من 0 إلى 3.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسـفل المحور x كما في الشكل السابق؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور	$A = -\int_a^b f(x)\,dx$
بالتعويض $f(x) = x^2 - 3x, a = 0, b = 3$	$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$
تكامل اقتران القوّة	$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^3$
بالتعويض	$= -\left(\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2\right)\right)$
بالتبسيط	$= 4\frac{1}{2}$

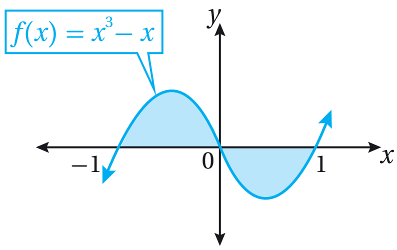
إذن، المساحة هي: $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

2 **أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

أُساوي أوّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقتران بالصفر	$f(x) = 0$
بتعويض $f(x) = x^2 - x$	$x^3 - x = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$x(x^2 - 1) = 0$
بتحليل الفرق بين مربعين	$x(x+1)(x-1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = -1 \quad \text{or} \quad x = 1$



إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو: $x = -1, x = 0,$ $x = 1$، كما في الشكل المجاور، وهذه الإحداثيات تُمثِّل حدود التكامل.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المُتبقِّي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \left(-\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right)$$ بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{1}{2}$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

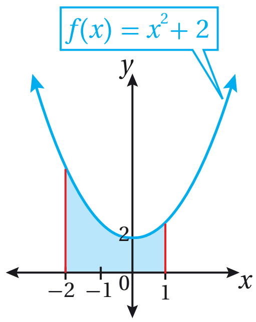
أتحقَّق من فهمي

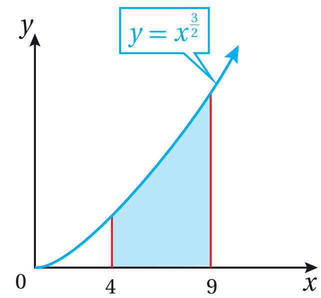
a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

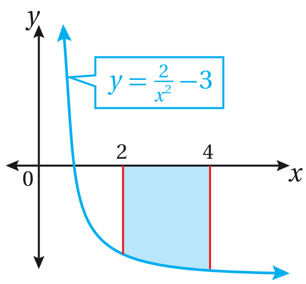
b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

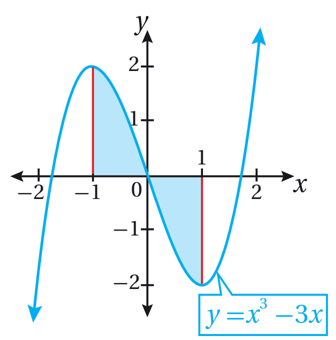
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

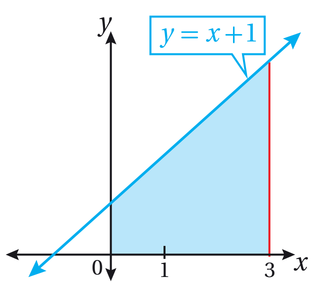
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

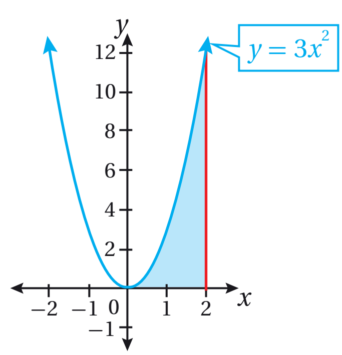
1


2


3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و$x = 2$.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

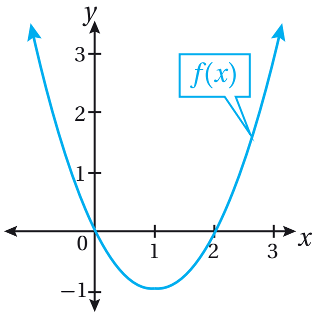
9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$.

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5-x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و$x = 5$.

12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = (x+1)(x-4)$، والمحور x.

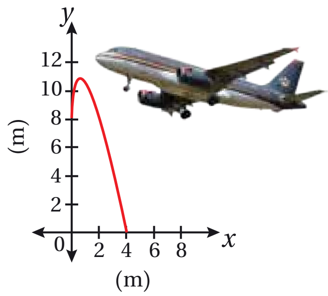
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$:



13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

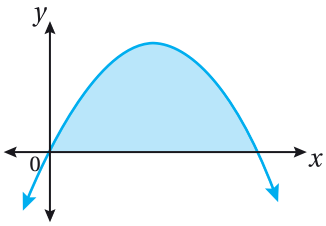
14 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$.

15 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.



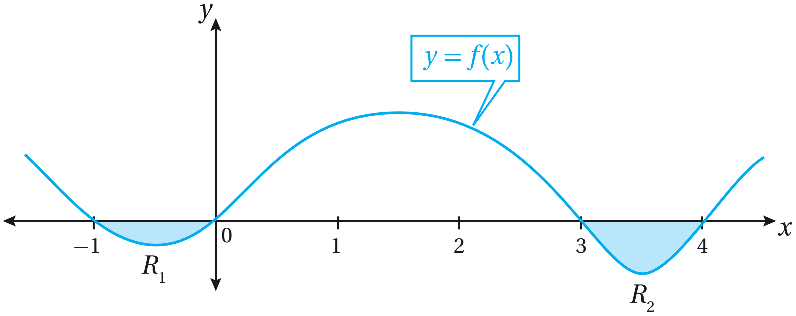
16 يُبيِّـن التمثيل البياني المجاور شـكل السـطح العلوي لجناح طائـرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \le x \le 4$. أجد مســاحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

مهارات التفكير العليا



17 تحدٍّ: يُبيِّن الشــكل المجــاور منحنى الاقتــران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتــران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

18 تبرير: يُبيِّن الشــكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مســاحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومســاحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.



معمل برمجية جيوجبرا

تطبيقات التكامل: المساحة

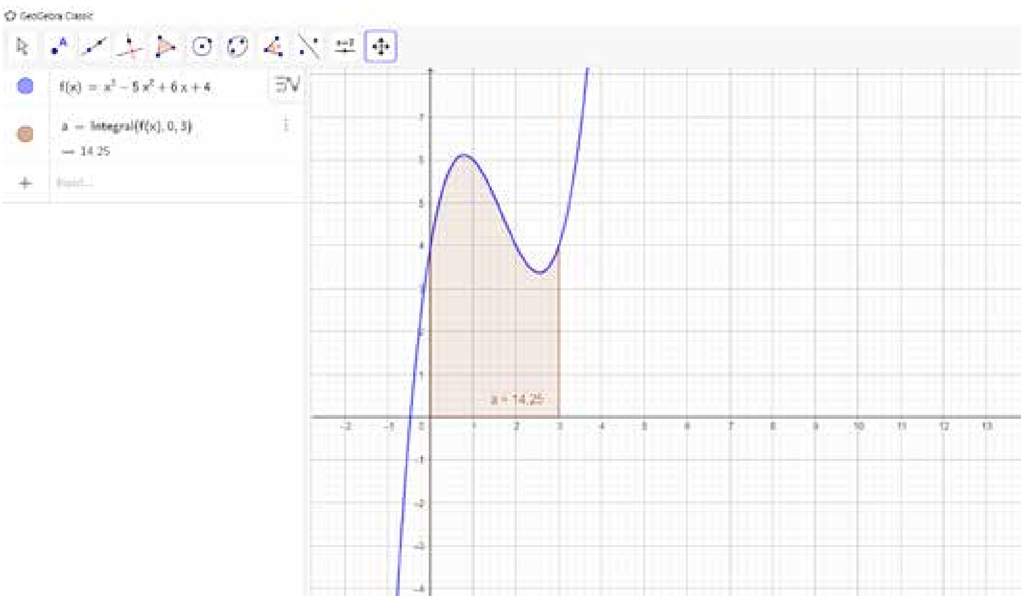
Applications of integration: Area

أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x بوصفها تكاملًا محدودًا، مراعيًا تحويل إشارة الناتج السالبة إلى موجبة إذا وقعت المنطقة أسفل المحور x، وتقسيم هذه المنطقة إلى جزأين إذا كان أحدهما واقعًا فوق المحور x، والجزء الآخر تحته، ثم حساب مساحة كل جزء على حِدَة، ثم جمع المساحتين معًا.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x

نشاط

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$.



1 أكتب الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال (Enter).

2 لإيجاد المساحة بين الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$، أكتب في شريط الإدخال الصيغة الآتية: Integral (f(x), 0, 3) ، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال (Enter).

3 أُلاحِظ تظليل المنطقة المطلوبة، وظهور قيمة التكامل على الشكل. وبذلك، فإنَّ مساحة المنطقة هي: 14.25 وحدة مربعة.

أتدرَّب

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$.

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -\sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيم $x = 9$.

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

فكرة الدرس إيجـاد تكاملات تتضمَّن اقترانات أُسِّية طبيعية، واقترانات جيب، واقترانات جيب تمام، ولوغاريتمات طبيعية، واقترانات في صورة: $f(ax+b)$.

مسألة اليوم يتغيَّر عدد الطلبة الذين يلتحقون بإحدى الجامعات الجديدة سنويًّا بمُعدَّل: $P'(t)=\frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$، حيث $P(t)$ عدد الطلبة المُلتحِقين بالجامعة، و t الزمن بالسنوات منذ تأسيس الجامعة. أجد عدد الطلبة الذين درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها، علمًا بأنَّ عددهم عند تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان؛ ما يساعد على إيجاد صيغ مباشرة لتكامل اقترانات ناتجة من اشتقاق اقترانات مشهورة، مثل: الاقتران الأُسِّي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام.

فمثلًا، إذا كان: $f(x)=\cos x$، فإنَّ: $f'(x)=-\sin x$، وهذا يعني أنَّ:

$$\int (-\sin x)\, dx=\cos x+C$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\int \sin x\ dx=-\cos x+C$$

يُمكِن إيجاد صيغة تكامل كلٍّ من الاقتران الأُسِّي الطبيعي واقتران جيب التمام بطريقة مُشابِهة.

مفهوم أساسي **تكامل اقترانات أساسية**

إذا كان e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int e^x\ dx=e^x+C$

2) $\int \sin x\ dx=-\cos x+C$

3) $\int \cos x\ dx=\sin x+C$

أتذكَّر

- $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^x + 8)\, dx$

$$\int (e^x + 8)\, dx = e^x + 8x + C$$ تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي، وتكامل الثابت

2) $\int (5\cos x + \sqrt{x})\, dx$

$$\int (5\cos x + \sqrt{x})\, dx = \int (5\cos x + x^{1/2})\, dx$$ بكتابة $\sqrt{x}$ في صورة أُسِّية

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$ تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$ الصورة الجذرية

3) $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (4\sin x - x^{-2})\, dx$$ تعريف الأُسِّ السالب

$$= -4\cos x + x^{-1} + C$$ تكامل $\sin x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= -4\cos x + \frac{1}{x} + C$$ تعريف الأُسِّ السالب

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$

b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$

c) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

أتذكَّر

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

$\int k\, dx = kx + C$.

أتذكَّر

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

- $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$
- $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

تكامل الاقتران: $\frac{1}{x}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ، وهذا يعني أنَّ: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$.

بما أنَّ $\ln x$ مُعرَّف فقط عندما يكون $x > 0$، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \qquad , x > 0 \;\ldots\ldots (1)$$

ولكنَّ $\ln(-x)$ مُعرَّف عندما يكون $x < 0$.

باستعمال قاعدة السلسلة، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنَّ:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C \qquad , x < 0 \;\ldots\ldots (2)$$

بدمج النتيجتين 1 و 2، فإنَّه يُمكِن التوصُّل إلى القاعدة الآتية:

مفهوم أساسي

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx = \ln|x| - 6\cos x + C$$

تكامل $\frac{1}{x}$ ، وتكامل $\sin x$ المضروب في ثابت

2 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$$

تكامل e^x المضـــروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

3 $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x} \right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x} \right) dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4 \ln |x| + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8\, e^x \right) dx$　　b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x} \right) dx$　　c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}\, dx$

تكامل اقترانات أساسية في صورة: $f(ax + b)$

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد تكامل اقتران القوَّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام، واقتران $\frac{1}{x}$. والآن سأتعلَّم كيف أجد تكاملاتها إذا كانت في صورة: $f(ax + b)$؛ ذلك أنَّ كُلًّا منها ناتج من اشتقاق اقتران أصلي باستعمال قاعدة السلسلة.

مفهوم أساسي

تكامل اقترانات في صورة: $f(ax + b)$

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، و e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int (ax + b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int e^{ax + b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax + b} + C$

3) $\int \sin (ax + b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + C$

4) $\int \cos (ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \sin (ax + b) + C$

5) $\int \frac{1}{ax + b}\, dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C,\ x \neq -\frac{b}{a}$

أتذكَّر

- $\frac{d}{dx}((ax+b)^n) = n\,a(ax+b)^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}(\cos (ax+b)) = -a \sin (ax+b)$
- $\frac{d}{dx} \sin (ax+b) = a \cos (ax+b)$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (2x+7)^5\, dx$

$$\int (2x+7)^5\, dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} (2x+7)^6 + C$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{12} (2x+7)^6 + C$$ بالتبسيط

2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx = \int (4x-2)^{-1/2}\, dx$$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$= \frac{2}{4} (4x-2)^{1/2} + C$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{2} (4x-2)^{1/2} + C$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4x-2} + C$$ الصورة الجذرية

3) $\int 2e^{4x+3}\, dx$

$$\int 2e^{4x+3}\, dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$ تكامل e^{ax+b} المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$$ بالتبسيط

4) $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

$$\int 2\sin(4x+3)\, dx = -2 \times \frac{1}{4} \cos(4x+3) + C$$ تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{2} \cos(4x+3) + C$$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صحة الحَلِّ باشتقاق ناتج التكامل، ومقارنة ناتج الاشتقاق بالاقتران المُكامَل.

5 $\int \left(5\cos(2x+3)+\sqrt[3]{x}\right) dx$

$\int\left(5\cos(2x+3)+\sqrt[3]{x}\right)dx = \int\left(5\cos(2x+3)+x^{1/3}\right) dx$ بكتابة $\sqrt[3]{x}$ في صورة أُسِّية

$= 5 \times \frac{1}{2}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ تكامل $\cos\,(ax+b)$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$= \frac{5}{2}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$ الصورة الجذرية

6 $\int \frac{1}{8x-1}\, dx$

$\int \frac{1}{8x-1}\, dx = \frac{1}{8}\ln|8x-1| + C$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6\ dx$

b) $\int \sqrt{2x+1}\ dx$

c) $\int 4\cos(3x-7)\ dx$

d) $\int (\sin 5x + e^{2x})\ dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\ dx$

f) $\int \frac{5}{3x+2}\ dx$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C، ويُمكِن بها أيضًا تحديد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة، علمًا بأنَّ الشرط الأوَّلي يُستعمَل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

مثال 4 : من الحياة

بيئة: في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبيَّن أنَّ مُعدَّل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُنمذَج بالاقتران: $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$، حيث $R(t)$ عدد البراميل المُنتَجة (بالآلاف) في السنة، وt عدد السنوات منذ بَدْء ضَخِّ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخِّ من البئر، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

معلومة

يُعَدُّ حقل الغَوّار في المملكة العربية السعودية أكبر حقل نفط في العالَم، وتبلغ طاقة إنتاجه القصوى بحسب بعض الدراسات نحو 3.8 ملايين برميل من النفط يوميًّا.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $R'(t)$.

$R(t) = \int R'(t)\ dt$ $\qquad R(t) = \int \left(\frac{100}{t+1} + 5\right) dt$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل الثابت $\qquad = 100 \ln |t+1| + 5t + C$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران $\qquad R(t) = 100 \ln |t+1| + 5t + C$

بتعويض $t = 0, R(0) = 0$ $\qquad 0 = 100 \ln |0+1| + 5(0) + C$

بحَلِّ المعادلة لـ C $\qquad C = 0$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل عدد براميل النفط المُنتَجة (بالآلاف) في السنة هو: $R(t) = 100 \ln |t+1| + 5t$.

الخطوة 3: أجد $R(9)$.

قاعدة الاقتران $\qquad R(t) = 100 \ln |t+1| + 5t$

بتعويض $t = 9$ $\qquad R(9) = 100 \ln |9+1| + 5(9)$

باستعمال الآلة الحاسبة $\qquad \approx 275$

إذن، عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخِّ من البئر هو: 275 ألف برميل تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنَّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

تكامل اقترانات في صورة: $k\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة أنَّ: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$، وهذا يُمثِّل قاعدة يُمكِن استعمالها لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات، مثل الاقترانات التي تُكتَب في صورة: $k\dfrac{f'(x)}{f(x)}$؛ أيِ الاقترانات التي يُمكِن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام؛ وذلك بملاحظة أنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

أتعلَّم

يُمكِن التعبير عن المفهوم الأساسي المجاور بالكلمات على النحو الآتي: إذا كان المُكامَل كسرًا بسطه هو مشتقة مقامه، فإنَّ التكامل هو لوغاريتم القيمة المُطلَقة للمقام.

تكامل اقترانات في صورة: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، حيث $f(x) \neq 0$ فإنَّ:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx$

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx = \ln|x^3+5| + C$$

تكامل $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ البسط $(3x^2)$ هو مشتقة المقام: $\frac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2$.

أتعلَّم

بما أنَّ البسط $(6x)$ هو أحد مضاعفات مشتقة المقام:

$\left(\frac{d}{dx}(x^2+9) = 2x\right)$، فإنَّني أُعيد كتابة $\frac{6x}{x^2+9}$ في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2 $\int \frac{6x}{x^2+9}\, dx$

$$\int \frac{6x}{x^2+9}\, dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}\, dx$$ بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= 3 \ln |x^2+9| + C$$ بالتبسيط

3 $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\, dx$

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times(x-1)}{x^2-2x+2}\, dx$$ بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\, dx$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 -2x +2| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

4 $\int \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\, dx = \ln |e^x -1| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx$

b) $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\, dx$

c) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\, dx$

d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\, dx$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

يُمكِنني إيجاد التكامل المحدود لكلٍّ من الاقترانات الخاصة التي تعلَّمْتُ إيجاد تكاملاتها غير المحدودة في هذا الدرس.

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1 $\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\ dx$

$$\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\ dx = (-2e^{-3x} + 3x^4)\Big|_0^1$$ تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي المضروب في ثابت، واقتران القوَّة

$$= (-2e^{-3(1)} + 3(1)^4) - (-2e^{-3(0)} + 3\,(0)^4)$$ بالتعويض

$$= -2e^{-3} + 5$$ بالتبسيط

أتذكَّر

$e^0 = 1$

2 $\int_{-1}^2 (x+1)^3\ dx$

$$\int_{-1}^2 (x+1)^3\ dx = \frac{1}{4}(x+1)^4\Big|_{-1}^2$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{4}\left((2+1)^4 - (-1+1)^4\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{81}{4}$$ بالتبسيط

3 $\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\ dx$

$$\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\ dx = -\frac{1}{2}\ln|7-2x|\Big|_2^3$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|7-2(3)| - \ln|7-2(2)|\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$ بالتبسيط

أتذكَّر

$\ln 1 = 0$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^2 (4e^{2x} + 7)\ dx$

b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\ dx$

c) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\ dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) dx$

2) $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right) dx$

3) $\int (e^x+1)^2\, dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x+2)\, dx$

5) $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right) dx$

6) $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right) dx$

7) $\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right) dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx$

9) $\int (\sin(2x-3)+e^{6x-4})\, dx$

10) $\int 4\cos(6x+1)\, dx$

11) $\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$

12) $\int \left(e^{6x}+(1-2x)^6\right) dx$

13) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

14) $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$

15) $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\, dx$

16) $\int \frac{e^x+7}{e^x}\, dx$

17) $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\, dx$

18) $\int \left(4x^3+2+3\sin(5-3x)\right) dx$

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\, dx$

20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\, dx$

21) $\int \frac{1+xe^x}{x}\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22) $\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right) dx$

23) $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\, dx$

24) $\int_3^4 (2x-6)^4\, dx$

25) يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

26) $f'(x) = 5e^x;\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$

27) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2};\ (1, -1)$

28) $f'(x) = e^{-x} + x^2;\ (0, 4)$

29) إذا كان ميـل المماس لمنحنـى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقـة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e, e^2).

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

31 أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

طب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm^2.

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات التفكير العليا

34 أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x}\,dx$، وكان حَلُّه على النحو المجاور.
أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أُصحِّحه.

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{2\times 1}{2x}\,dx$$
$$= \int \frac{2}{2x}\,dx$$
$$= \ln|2x| + C$$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

35 $\int \sqrt{e^x}\,dx$

36 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$

37 $\int (x^2+2x+1)^5\,dx$

38 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int (x-1)^3\,dx$	$\int \frac{1}{x+1}\,dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$	$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

فكرة الدرس إيجاد تكاملات باستعمال طريقة التعويض.

المصطلحات التكامل بالتعويض.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/ cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

التكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ التكامل يُستعمَل في إيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامَل، وذلك بالبحث عن اقتران ينتج من مشتقته الاقتران المُكامَل. غير أنَّه لا يُمكِن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات بصورة مباشرة، مثل: $\int 2x(x^2-3)^5\, dx$؛ لذا يتعيَّن استعمال طرائق أُخرى للتكامل، مثل **التكامل بالتعويض** (integration by substitution)، وهي طريقة تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل.

أتذكَّر

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب، أو تكامل القسمة.

يُمكِن إيجاد: $\int 2x(x^2-3)^5\, dx$ باستعمال مُتغيِّر جديد، وليكن u، بدلًا من المُتغيِّر x، باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أفترض أنَّ u هو المقدار المرفوع إلى الأُسِّ 5؛ أيْ إنَّ: $u = x^2 - 3$.

الخطوة 2: أجد مشتقة u، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3: أحُلُّ المعادلة لـ dx: $dx = \frac{du}{2x}$.

الخطوة 4: أستعمل المُتغيِّر u بدلًا من المُتغيِّر x في التكامل.

أتعلَّم

عند استعمال التعويض لحَلِّ التكامل، فإنَّ التكامل الجديد يجب أنْ يكون كله بدلالة المُتغيِّر الجديد.

$$\int 2x(x^2-3)^5\,dx = \int 2x(u)^5 \times \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2-3, dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int u^5\,du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{6}u^6 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{6}(x^2-3)^6 + C$$ بتعويض $u = x^2 - 3$

أُلاحِظ من: $\int 2x(x^2-3)^5\ dx$ أنَّ $(2x)$ هو مشتقة (x^2-3).

بوجه عام، يُمكِن حَلُّ أيِّ تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة: $\int f(g(x))\,g'(x)dx$.

أتذكَّر

يُمكِنني التحقُّق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي مُستعمِلًا قاعدة السلسلة، ومقارنة الناتج بالاقتران المُكامَل:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}(x^2-3)^6 + C\right)$$
$$= \frac{1}{6} \times 6 \times (x^2-3)^5 \times 2x$$
$$= 2x\,(x^2-3)^5$$

مفهوم أساسي — **التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة**

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I، وكان f اقترانًا متصلًا على I، فإنَّ:

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\ dx = \int f(u)\ du$$

أتعلَّم

بوجه عام، إذا احتوى المُكامَل على اقتران مضروب في مشتقته، فيُمكِن حَلُّ التكامل بتعويض الاقتران.

يُمكِن تلخيص خطوات حَلِّ التكامل بالتعويض كما يأتي:

مفهوم أساسي — **خطوات حلِّ التكامل بالتعويض**

الخطوة 1: أُحدِّد التعويض u الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل.

الخطوة 2: أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة u و du، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: أجد التكامل الجديد.

الخطوة 4: أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي، عن طريق التعويض.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 3x^2 (x^3+1)^7 \, dx$

أفترض أنَّ: $u = x^3 + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int 3x^2 (x^3+1)^7 \, dx = \int 3x^2 (u)^7 \times \frac{du}{3x^2}$$ بتعويض $u = x^3 + 1, dx = \frac{du}{3x^2}$

$$= \int u^7 \, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{8} u^8 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{8} (x^3+1)^8 + C$$ بتعويض $u = x^3 + 1$

2 $\int 2x\sqrt{x^2+6} \, dx$

أفترض أنَّ: $u = x^2 + 6$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+6} \, dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2 + 6, dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int \sqrt{u} \, du$$ بالتبسيط

$$= \int u^{1/2} \, du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{2}{3} (x^2+6)^{3/2} + C$$ بتعويض $u = x^2 + 6$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+6)^3} + C$$ الصورة الجذرية

أتعلَّم

يجب عكس عملية التعويض بعد إجراء التكامل.

أتذكَّر

يُمكِنني التحقُّق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي، ومقارنة الناتج بالاقتران المُكامَل.

3 $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \implies dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = \int \cos x\, e^{u} \times \frac{du}{\cos x}$$ بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int e^{u}\, du$$ بالتبسيط

$$= e^{u} + C$$ تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي

$$= e^{\sin x} + C$$ بتعويض $u = \sin x$

4 $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies dx = x\, du$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\, dx$$ بإعادة كتابة المُكامَل

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x\, du$$ بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\, du$

$$= \int u\, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$ بتعويض $u = \ln x$

أُفكِّر

هل يُمكِن تعويض: $u = \cos x$؟ أُبرِّر إجابتي.

أتعلَّم

كتابة المُكامَل بصورة أُخرى تُسهِّل عملية التعويض.

5 $\int x^4 \sin (x^5 - 8)\ dx$

أفترض أنَّ: $u = x^5 - 8$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$$

$$\int x^4 \sin (x^5 - 8)\ dx = \int x^4 \sin (u) \times \frac{du}{5x^4}$$ بتعويض $u = x^5 - 8,\ dx = \frac{du}{5x^4}$

$$= \int \frac{1}{5} \sin u\ du$$ بالتبسيط

$$= -\frac{1}{5} \cos u + C$$ تكامل $\sin u$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{5} \cos (x^5 - 8) + C$$ بتعويض $u = x^5 - 8$

6 $\int \sin^3 x \cos x\ dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \sin^3 x \cos x\ dx = \int u^3 \times \cos x \times \frac{du}{\cos x}$$ بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int u^3\ du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$ بتعويض $u = \sin x$

أتذكَّر

$\sin^3 x = (\sin x)^3$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\ dx$

b) $\int x\, e^{x^2+1}\ dx$

c) $\int \frac{4x + 8}{\sqrt{2x^2 + 8x}}\ dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

e) $\int x^3 \cos (x^4 - 5)\ dx$

f) $\int \cos^4 x \sin x\ dx$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C، ويُمكِن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة.

مثال 2 : من الحياة

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-136\, x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر الحذاء، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر الحذاء الواحد JD 30 عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $p'(x)$.

$$p(x) = \int p'(x)\, dx$$

$$p(x) = \int \frac{-136\, x}{\sqrt{9+x^2}}$$

أفترض أنَّ: $u = 9 + x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بتعويض $u = 9 + x^2,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$p(x) = \int \frac{-136\, x}{\sqrt{9+x^2}}\, dx = \int \frac{-136\, x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= -68 \int u^{-1/2}\, du$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= -136\, u^{1/2} + C$$

الصورة الجذرية

$$= -136\sqrt{u} + C$$

بتعويض $9 + x^2 = u$

$$= -136\sqrt{9+x^2} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + C$$

بتعويض $x = 4,\ p(4) = 30$

$$30 = -136\sqrt{9+(4)^2} + C$$

بالتبسيط

$$30 = -680 + C$$

بحَلِّ المعادلة

$$C = 710$$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل سعر الحذاء هو: $p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + 710$.

أتعلَّم

بما أنَّ x يُمثِّل عدد الأحذية المَبيعة بالمئات، فإنَّ العدد 400 في المسألة يعني أنَّ $x = 4$.

أتحقَّق من فهمي

تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعــة (بالمئات) من المُنتَــج. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300\,x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في ســعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ ســعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجــد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، همــا: إيجاد التكامل أوَّلًا ثم تعويض حدود التكامــل، أو تغيير حدود التكامل عنــد تغيير مُتغيِّر التكامل، وهــذه الطريقة هي أكثر تفضيلًا.

مفهوم أساسي

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

إذا كان g' متصلًا على $[a, b]$، وكان f متصلًا على مدى $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\, g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 4x(x^2+1)^3\ dx$

- أفترض أنَّ: $u = x^2 + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies dx = \frac{du}{2x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي	الحدُّ السفلي
$x = 2 \implies u = (2)^2 + 1 = 5$	$x = 1 \implies u = (1)^2 + 1 = 2$

$$\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)^3\ dx = \int_{2}^{5} 4x\,(u)^3\ \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2+1,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$= 2\int_{2}^{5} u^3\ du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\,u^4\Big|_{2}^{5}$$ تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2}(5^4 - 2^4)$$ بالتعويض

$$= 304.5$$ بالتبسيط

2 $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\ dx$

- أفترض أنَّ: $u = x^2 + 2x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x+2 \implies dx = \frac{du}{2x+2}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي	الحدُّ السفلي
$x = 1 \implies u = (1)^2 + 2(1) = 3$	$x = 0 \implies u = (0)^2 + 2(0) = 0$

$$\int_{0}^{1}(x+1)\sqrt{x^2+2x}\ dx = \int_{0}^{3}(x+1)\sqrt{u}\ \frac{du}{2x+2}$$ بتعويض $u = x^2+2x,\ dx = \frac{du}{2x+2}$

$$= \int_{0}^{3}(x+1)\sqrt{u}\ \frac{du}{2(x+1)}$$ بإخراج 2 عاملًا مشتركًا من المقام

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{3}\sqrt{u}\ du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{1/2}\ du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{1}{3}\,u^{3/2}\Big|_{0}^{3}$$ تكامل اقتران القوّة

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{0}^{3}$$ الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{0^3}\right)$$ بالتعويض

$$= \sqrt{3}$$ بالتبسيط

3 $\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي	الحدُّ السفلي
$x = 3 \Longrightarrow u = (3)^2 = 9$	$x = -1 \Longrightarrow u = (-1)^2 = 1$

$$\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx = \int_{1}^{9} 8x\, e^{u} \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$= 4\int_{1}^{9} e^{u}\, du$$ بالتبسيط

$$= 4\, e^{u}\Big|_{1}^{9}$$ تكامل الاقتران الأسِّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= 4(e^{9} - e^{1})$$ بالتعويض

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_{0}^{1} x^2\, (x^3 - 1)^4\, dx$

b) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2 - x^4)^7}\, dx$

c) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$

2 $\int x^2\, (2x^3 + 5)^4\, dx$

3 $\int 3x\sqrt{x^2 + 7}\, dx$

4 $\int x^6\, e^{1 - x^7}\, dx$

5 $\int \frac{x^4}{(x^5 + 9)^3}\, dx$

6 $\int (3x^2 - 1)\, e^{x^3 - x}\, dx$

7 $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$

8 $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

9 $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\,dx$

10 $\int \sin^5 2x \cos 2x\,dx$

11 $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

12 $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

13 $\int e^x\,(2+e^x)^5\,dx$

14 $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

15 $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^2 (2x-1)\,e^{x^2-x}\,dx$

17 $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

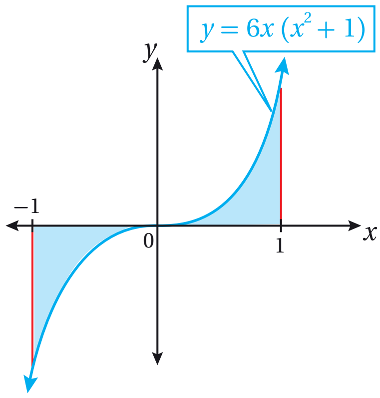
18 $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

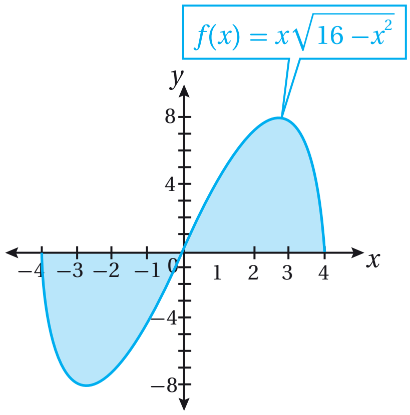
19 $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$

20 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

21 $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22


23


في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

24 $f'(x) = x e^{4-x^2};\ (-2, 1)$

25 $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2};\ (0, -1)$

26 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

27 **زراعـة:** يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4 + 8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعره الآن JD 5000.

28 **سكّان:** أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى المدن يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4 + e^{0.2t}}}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2015م، و $P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

مهارات التفكير العليا

29 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int x(x^3 + 1)\, dx$	$\int x \cos x^2\, dx$	$\int 3x^2 e^{1+x^3}\, dx$	$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\, dx$

30 **أكتشف الخطأ:** أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\, dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\, dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^1 4u^3\, du$$
$$= u^4 \Big|_0^1$$
$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

31 **تحدٍّ:** إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\, dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$، فأجد قيمة الثابت k.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$ d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

2 إذا كان: $\int_0^2 kx\ dx = 6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

3 قيمة: $\int_0^3 (-x^2+3x)\ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

4 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\ dx$ هي:

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

5 قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

6 التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x - x^2)\ dx$

b) $\int_0^4 (4x - x^2)\ dx$

c) $\int_1^0 (4x - x^2)\ dx$

d) $\int_0^1 (4x - x^2)\ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7 $\int 3x^{-1/2}\ dx$

8 $\int (8x - 10x^2)\ dx$

9 $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

10 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

11 $\int (5x^2 - 2e^{7x})\ dx$

12 $\int (2x + 3e^{4x+5})\ dx$

13 $\int \frac{x^2-6}{2x}\ dx$

14 $\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$

15 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\ dx$

16 $\int 2x\, e^{x^2-1}\ dx$

17 $\int 4e^{x}(3+e^{2x})\ dx$

18 $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\ dx$

19 $\int x\sin(3+x^2)\ dx$

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\ dx$

21 $\int \left(x-\sin(7x+2)\right)\ dx$

22 $\int (e^{3x}-e^{-3x})\ dx$

23 $\int \frac{2}{1-5x}\ dx$

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=4x-2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

25 **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x)=4x-1.2x^2$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(20)=30000$.

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t)=\cos(3t-\pi)$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\ dx=4, \int_{-5}^{5} f(x)\ dx=10, \int_{-5}^{-1} g(x)\ dx=11$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx$

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\ dx$

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x)-g(x))\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2-4x+1)\ dx$

31 $\int_{1}^{3} \frac{x^3+2x^2}{x}\ dx$

32 $\int_{1}^{5} |3-x|\ dx$

33 $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\ dx$

34 $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\ dx$

35 $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}\ dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\ dx$

37 $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\ dx$

38 إذا كان: $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & , x<0 \\ 4-x & , x\geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$.

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2;\ (0, 6)$

41 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{20}}{x^2};\ (1, 400)$

42 $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2};\ (1, 1)$

43 $f'(x) = 5e^x - 4;\ (0, -1)$

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5};\ (2, 10)$

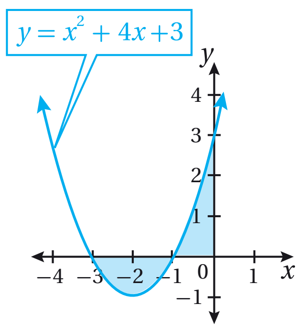
45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

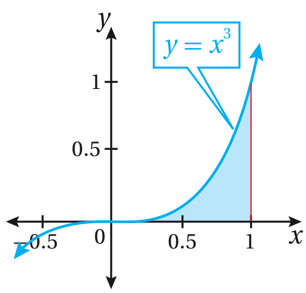
47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

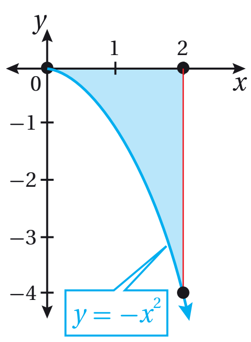
48



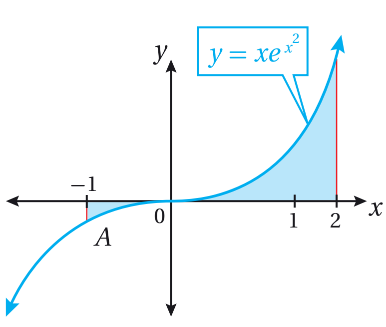
49



50



51



الوحدة
5

الإحصاء والاحتمالات
Statistics and Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل التوزيعات الاحتمالية لنمذجة التجارب العشوائية والظواهر الطبيعية؛ ما يساعد على تفسير هذه الظواهر، والتوصُّل إلى استنتاجات دقيقة بخصوصها. ويُعَدُّ توزيع ذي الحدَّين والتوزيع الطبيعي اللذان تُقدِّمهما هذه الوحدة من أهم التوزيعات الاحتمالية؛ لِما لهما من استعمالات في المجالات العلمية والحياتية المختلفة. فمثلًا، يُستعمَل التوزيع الطبيعي لنمذجة كتل المواليد الجُدُد، وضغط الدم في جسم الإنسان، وعلامات الطلبة في الاختبارات.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- حساب التوافيق والتباديل.
- إيجاد احتمال حادث ما في تجربة عشوائية.
- المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.
- التوقُّع لكلٍّ من التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.
- منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (15–17) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التوزيع الهندسي
Geometric Distribution

فكرة الدرس تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي.

المصطلحات تجربة بيرنولي، التجربة الاحتمالية الهندسية.

مسألة اليوم ترغب عُلا أنْ تستقلَّ سيّارة أُجْرة للذهاب إلى عملها. إذا كانت 5% من السيّارات المارَّة بالشارع أمام منزلها هي سيّارات أُجْرة، ومثَّل X عدد السيّارات التي ستمرُّ أمام عُلا حتى تشاهد أوَّل سيّارة أُجْرة، فأجد احتمال أنْ تشاهد عُلا سيّارة أُجْرة أوَّل مَرَّة عند مرور السيّارة السابعة من أمام منزلها.

تجربة بيرنولي

تجربة بيرنولي (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبَّر عن أحدهما بالنجاح، ويُعبَّر عن الآخر بالفشل. فمثلًا، تجربة إلقاء قطعة النقد مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي؛ لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعَدُّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

بوجه عام، يُمكِن النظر إلى أيِّ تجربة عشوائية بوصفها تجربة بيرنولي، بافتراض أنَّ حدثًا مُعيَّنًا من الفضاء العيني للتجربة هو النجاح، بصرف النظر عن العدد الفعلي لعناصر ذلك الحدث. فمثلًا، عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، يُمكِن عَدُّ هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أقل من 5 هو النجاح، وأنَّ أيَّ عدد (ناتج) آخر هو الفشل.

أتعلَّم

لأيِّ تجربة عشوائية، يكون الحادث (A) والحادث (B) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يُؤثِّر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أوَّل نجاح اسم **التجربة الاحتمالية الهندسية** (geometric probability experiment).

مفهوم أساسي

التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشـــروط الأربعة الآتية في تجربة عشـــوائية ما، فإنَّها تُعَــدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

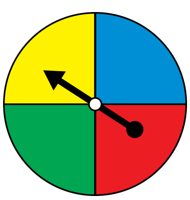
أتعلَّم

بوجــه عــام، إذا كانــت المحــاولات مســتقلة، فهذا لا يعنــي بالضرورة ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1 **تدوير ســلمى المُتكرِّر لمُؤشِّــر القرص المجاور الذي ينقســم إلى 4 قطاعات مُتطابِقة، ثم توقُّفها عند اســتقرار رأس السهم على اللون الأحمر.**



أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية:

1. اشــتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (تدوير مُؤشِّر القرص مَرّات عِدَّة حتى توقُّف رأس الســهم على اللون الأحمر). وبما أنَّ تدوير المُؤشِّر في كل مَرَّة لا يُؤثِّر في نتيجة تدويره في المَرّات الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (توقُّف رأس السهم على اللون الأحمر)، أو الفشل (توقُّف رأس السهم على أيِّ لون آخر).
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{4}$.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

أُفكِّر

لماذا كان احتمال توقُّف رأس الســهم على اللون الأحمــر هــو $\frac{1}{4}$؟ أُبرِّر إجابتي.

2 **سحب كمال 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 4 كرات حمراء، و5 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.**

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية.

تتضمَّن هذه التجربة محاولات مُتكرِّرة (سحب 3 كرات). وبما أنَّ نتيجة سحب كل كرة تتأثَّر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم إرجاع الكرات المسحوبة إلى الصندوق، فإنَّ هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا 4 مَرّات، ثم كتابة الأعداد الظاهرة.

b) إلقاء حنان قطعة نقد منتظمة بشكل مُتكرِّر، ثم التوقُّف عند ظهور الصورة.

أُفكِّر

في الفرع 2 من المثال، إذا سُحِبت الكرات الثلاث على التوالي مع الإرجاع، فهل يُمثِّل ذلك تجربة احتمالية هندسية؟ أُعيد الحَلَّ في هذه الحالة.

المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية، وأنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim Geo(p)$$

حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: ... ,3 ,2 ,1؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

أتذكَّر

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

مفهوم أساسي

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فـإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, ...\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

حيث:

x: عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 2

إذا كان: $X \sim Geo(0.8)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $P(X=3)$

$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$P(X = 3) = (0.8)\,(1- 0.8)^{2}$ بتعويض $x = 3, p = 0.8$

$= 0.032$ بالتبسيط

2) $P(X \leq 2)$

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ احتمال الحوادث المتنافية

$= (0.8)\,(1-0.8)^{0} + (0.8)\,(1-0.8)^{1}$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$= 0.96$ بالتبسيط

أتذكَّر

إذا كان A و B حادثيـــن متنافيين في تجربة عشوائية، فإنَّ احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالي وقوعهما: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3) $P(X > 3)$

المطلوب هو إيجاد $P(X > 3)$، وهذا يعني أنَّ:

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \cdots$$

بما أنَّ إيجاد $P(X>3)$ يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات (الكسور)، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ احتمال المُتمِّمة

$=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ احتمال الحوادث المتنافية

$=1-(0.8+0.8(0.2)+0.8(0.2)^2)$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$=0.008$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتذكَّر

احتمال وقوع مُتمِّمة الحادث A هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A: $P(\bar{A})=1-P(A)$.

طريقة بديلة:

إذا كان: $X\sim Geo(p)$، فإنَّ: $P(X>x)=(1-p)^x$.

يُمكِن أيضًا حساب $P(X>3)$ باستعمال القانون أعلاه على النحو الآتي:

$P(X>x)=(1-p)^x$ قانون حساب $P(X>x)$ في التوزيع الهندسي

$P(X>3)=(1-0.8)^3$ بتعويض $x=3,\ p=0.8$

$=(0.2)^3=0.008$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X\sim Geo(0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X=2)$

b) $P(X\leq 3)$

c) $P(X>4)$

يُمكِن استعمال التوزيع الهندسي في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3 : من الحياة

فرن غاز: يكرِّر أحمد محاولة تدوير مَقْبِض الاشتعال في فرن مطبخ – بعد حدوث عطل فيه – حتى يتمكَّن من تشغيل الفرن لطهي الطعام. إذا كان احتمال اشتعال الفرن في كل محاولة هو $\frac{1}{3}$، ومثَّل X عدد محاولات أحمد حتى يشتعل الفرن، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة.**

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$

بتعويض $n=4, p=\frac{1}{3}$: $P(X=4)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$

بالتبسيط $=\frac{8}{81}$

إذن، احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة هو $\frac{8}{81}$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ X هو مُتغيِّر عشوائي هندسي لتحقُّق الشروط الأربعة.

2 **احتمال أنْ يحاول أحمد إشعال الفرن أكثر من 4 مَرّات.**

المطلوب هو إيجاد $P(X>4)$، وهذا يعني أنَّ:

$$P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+\cdots$$

بما أنَّ إيجاد $P(X>4)$ يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات (الكسور)، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

احتمال المُتمِّمة $P(X>4)=1-P(X\leq 4)$

احتمال الحوادث المتنافية $=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4))$

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي $=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$

باستعمال الآلة الحاسبة $=\frac{16}{81}$

إذن، احتمال أنْ يحاول أحمد إشعال الفرن أكثر من 4 مَرّات هو $\frac{16}{81}$.

أُفكِّر

كيف أجد هذا الاحتمال بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

صناعة: **في دراسة لقسم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبيَّن أنَّ 10% من الأواني الفخارية عيبًا مصنعيًّا. إذا مثَّل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

a) احتمال أنْ يكون الإناء العاشر هو أوَّل إناء مَعيب يجده مُراقِب الجودة.

b) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 3 أوانٍ حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب.

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ التوقُّع $E(X)$ للمُتغيِّر العشوائي X هو الوسط الحسابي لِقِيَمه الناتجة من تكرار التجربة نفسها عددًا كبيرًا من المَرّات (عند اقتراب العدد من ∞)، وأنَّه يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر X في احتمال وقوعها.

يُمكِن التعبير عن ذلك بالرموز على النحو الآتي:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

رموز رياضية

يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — **التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي**

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

أتعلَّم

تشير القاعدة المجاورة إلى أنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي يساوي مقلوب الاحتمال الثابت لجميع المحاولات؛ أيْ إنَّه إذا كان احتمال ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقد منتظمة هو $\frac{1}{2}$ ، فإنَّه من المُتوقَّع ظهور الصورة أوَّل مَرَّة بعد إلقاء قطعة النقد مَرَّتين.

مثال 4 : من الحياة

رياضة: **تتدرَّب لينا على مسابقة رمي السهام. إذا كان احتمال إصابتها الهدف هو 0.2، فكم سهمًا يُتوقَّع أنْ تُطلِق لينا حتى تصيب الهدف أوَّل مَرَّة؟**

بما أنَّ لينا ستستمر في إطلاق الأسهم حتى تصيب الهدف أوَّل مَرَّة، فإنَّه يُمكِن استعمال توقُّع المُتغيِّر العشوائي الهندسي الآتي: $X \sim Geo(0.2)$:

$E(X) = \frac{1}{p}$ صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$= \frac{1}{0.2}$ بتعويض $p = 0.2$

$= 5$ بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع أنْ تُطلِق لينا 5 أسهم حتى تصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

أُفكِّر

إذا افترضْتُ أنَّ لينا أطلقت 5 سهام ولم تصب الهدف، فهل يعني ذلك أنَّ نسبة 0.2 غير صحيحة أو أنَّها فقط مصادفة؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

لعبة: قرَّر ريّان إلقاء حجر نرد منتظم بشــكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند ظهور العدد 4. كم مَرَّة يُتوقَّع أنْ يرمي ريّان حجر النرد؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1. عدد الأسـئلة التي ستجيب عنها أسماء إجابة صحيحة من بين 25 سـؤالًا من نوع الاختيار من مُتعدِّد، لكلٍّ منها 5 بدائل، واحد منها فقط صحيح، في حال الإجابة عن الأسئلة جميعها بصورة عشوائية.

2. رمي لاعب كرة سـلَّة الكرة نحو الهدف بشـكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند إحراز الهدف أوَّل مَـرَّة، علمًا بأنَّ احتمال إحرازه الهدف في كل مَرَّة هو 0.3

إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

3. $P(X=2)$
4. $P(X \leq 3)$
5. $P(X \geq 3)$
6. $P(3 \leq X \leq 5)$
7. $P(X < 4)$
8. $P(X > 4)$
9. $P(1 < X < 3)$
10. $P(4 < X \leq 6)$
11. $P(X < 1)$

12. أُلقِـي حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مُرقَّمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشـكل مُتكرِّر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرّات.

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

13. $X \sim Geo(0.3)$
14. $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$
15. $X \sim Geo(0.45)$

صناعة: وجد مصنع لوحدات الإنارة المكتبية أنَّ احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة مَعيبة هو 0.10. إذا مثَّل X عدد وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16 احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة الخامسة هي أوَّل وحدة مَعيبة يجدها مُراقِب الجودة.

17 احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

18 العدد المُتوقَّع من وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

لعبة: اتفقت ليلى وزميلاتها على ألّا تُشارِك أيٌّ منهن في لعبة حتى ترمي حجر نرد منتظمًا، ويظهر الرقم 6. إذا أرادت ليلى المشاركة في اللعبة، وكان X يُمثِّل عدد مَرّات رميها حجر النرد حتى ظهور العدد 6، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

19 احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد 3 مَرّات لكي تشارك في اللعبة.

20 احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد أكثر من 3 مَرّات لكي تشارك في اللعبة.

مهارات التفكير العليا

21 أكتشف الخطأ: أرادت لانا حَلَّ السؤال الآتي:

"عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{2}{5}$. إذا أُلقِيت قطعة النقد بصورة مُتكرِّرة حتى تظهر الصورة أوَّل مَرَّة، فما احتمال ظهور الصورة أوَّل مَرَّة عند إلقاء قطعة النقد في المَرَّة الثانية؟". وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$P(X=2) = \frac{2}{5}\left(1-\frac{2}{5}\right)^2$$
$$= \frac{18}{125}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ لانا، ثم أُصحِّحه، مُبرِّرًا إجابتي.

22 تبرير: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X \leq 3) = \frac{819}{1331}$، فأجد $P(X > 3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 تحدٍّ: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X=1) = 0.2$، فأجد التوقُّع $E(X)$.

الدرس 2

توزيع ذي الحدَّين
Binomial Distribution

فكرة الدرس • تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين.

المصطلحات التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين.

مسألة اليوم يستطيع أحد حُرّاس المرمى المحترفين صدَّ أيِّ ركلة جزاء باحتمال 20%. إذا تعيَّن على حارس المرمى التصدّي لـ 5 ركلات جزاء في إحدى المباريات، فما احتمال أنْ يتمكَّن من صدِّ ركلتين منها فقط؟

التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المستقلة اسم **التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين** (binomial probability experiment).

مفهوم أساسي — التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إلقاء 10 قطع نقدية منتظمة ومتمايزة، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية ذات الحدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء 10 قطع نقدية). وبما أنَّ نتيجة إلقاء أيٍّ من القطع النقدية لا تُؤثِّر في نتيجة إلقاء القطع النقدية الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.

2) فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة).

3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$.

4) وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة، هو 10.

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

2 سحب 5 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 8 كرات حمراء، و7 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

تتضمَّن هذه التجربة محاولات مُتكرِّرة (سحب 5 كرات). وبما أنَّ نتيجة سحب كل كرة تتأثَّر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم إرجاع الكرات المسحوبة إلى الصندوق، فإنَّ هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

أُفكِّر

في الفرع 2 من المثال، إذا سُحِبت الكرات الخمس على التوالي مع الإرجاع، فهل يُمثِّل ذلك تجربة احتمالية ذات حدَّين؟ أُعيد الحَلَّ في هذه الحالة.

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

b) اختيار 7 طلبة عشوائيًّا من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين، وتوزيعه الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim B(n, p)$$

حيث n و p معاملا المُتغيِّر العشوائي.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: $0, 1, 2, \dots, n$؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

أتعلَّم

في المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين، من المُمكِن أنَّ $x = 0$، وهذا يدلُّ على عدم إحراز أيِّ نجاح عند تكرار المحاولة n مَرَّة.

إذن، إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فــإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطــى التوزيــع الاحتمالــي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

رموز رياضية

يُمكِن اســتعمال أيٍّ من الرمــوز الآتية للتعبير عن توافيــق n مــن العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة: $C(n, r), \binom{n}{r}, {}_nC_r$

أتعلَّم

تُســتعمَل التوافيق $\binom{n}{r}$ لإيجــاد عــدد المَــرّات التــي يُمكِن بهــا اختيار r شــيئًا من بين n شــيئًا. وقد اســتُعمِلت التوافيق في قاعدة احتمال توزيع ذي الحدَّين لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأماكــن التي حدث فيها النجاح.

مثال 2

إذا كان: $X \sim B(4, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X = 2)$

معاملا المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين هما: $n = 4, p = 0.3$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} (0.3)^2 (0.7)^2$$ بتعويض $n = 4, r = 2, p = 0.3$

$$= 0.2646$$ باستعمال الآلة الحاسبة

2 $P(X > 2)$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4)$$ صيغة الجمع للحوادث المتنافية

$$= \binom{4}{3} (0.3)^3 (0.7)^1 + \binom{4}{4} (0.3)^4 (0.7)^0$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$= 0.0837$$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّيــن يأخــذ قِيَمًــا معدودةً؛ لذا، فإنَّه يُســمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلًا.

3 $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$$ احتمال المُتمِّمة

$$= 1 - P(X = 4)$$ $P(X > 3) = P(X = 4)$

$$= 1 - \binom{4}{4} (0.3)^4 (0.7)^0$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$= 0.9919$$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X = 4)$ b) $P(X \leq 2)$ c) $P(X > 2)$

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد المطلوب في الفرع 3 من المثال بطريقة أُخرى؟ إنْ وُجِدت طريقة أُخرى، فأيُّ الطريقتين أسهل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُمكِن استعمال التوزيع ذي الحدَّين في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3 : من الحياة

صيانة: وَفقًا لنموذج تقييم الخدمة الإلكتروني في إحدى شركات صيانة الأجهزة الكهربائية المنزلية، تبيَّن رضا 75% من الزبائن عن خدمات الشركة. إذا قدَّمت الشركة خدماتها لـ 10 زبائن في أحد الأيام، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة.**

يُمكِن النظر إلى عملية صيانة 10 أجهزة منزلية بوصفها تجربة احتمالية ذات حدَّين؛ لأنَّ صيانة كل جهاز تُعَدُّ محاولة مُتكرِّرة ومستقلة، ولأنَّ عدد هذه المحاولات مُحدَّد، وهو 10، ولأنَّه يُمكِن فرز النتائج المُمكِنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (رضا الزبون)، أو الفشل (عدم رضا الزبون). وبما أنَّ احتمال رضا الزبون في كل محاولة هو 0.75، فإنَّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو 0.75

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الزبائن الراضين عن خدمات الشركة، فإنَّ:

$$X \sim B(10, 0.75)$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ احتمال رضا 4 زبائن عن خدمات الشركة هو $P(X=4)$:

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين $$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

بتعويض $n=10, r=4, p=0.75$ $$P(X=4)=\binom{10}{4}(0.75)^4(0.25)^{10-4}$$

باستعمال الآلة الحاسبة $$\approx 0.0162$$

إذن، احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة هو 0.0162 تقريبًا.

2 احتمال رضا 3 زبائن على الأقل عن خدمات الشركة.

إنَّ احتمال رضا 3 زبائن على الأقل عن خدمات الشركة هو $P(X\geq 3)$:

احتمال المُتمِّمة $$P(X\geq 3)=1-P(X<3)$$

صيغة الجمع للحوادث المتنافية $$=1-\big(P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\big)$$

$$=1-\left(\binom{10}{2}(0.75)^2(0.25)^8+\binom{10}{1}(0.75)^1(0.25)^9+\binom{10}{0}(0.75)^0(0.25)^{10}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة $$\approx 0.9996$$

إذن، احتمال رضا 3 زبائن على الأقل عن خدمات الشركة هو 0.9996 تقريبًا.

أُفكِّر

هل يُمكِن حَلُّ الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

طقس: **في دراسة تناولت حالة الطقس مدَّة طويلة في إحدى المدن، تبيَّن أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ يوم فيها ماطرًا هو $\frac{2}{7}$. إذا اختيرت 5 أيام عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

a) احتمال أنْ تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة.

b) احتمال أنْ يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا.

التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — **التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = np$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتذكَّر

يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

مثال 4 : من الحياة

ضبط الجودة: **بعد إجراء مسح لمُنتَج صنعته إحدى الشركات، تبيَّن أنَّ نسبة القطع المَعيبة في هذا المُنتَج هي 8%. إذا اختارت لجنة الرقابة الحكومية 50 قطعة من هذا المُنتَج عشوائيًّا، فأجد عدد القطع التي يُتوقَّع أنْ تكون مَعيبة من هذه العيِّنة.**

إذا مثَّل X عدد القطع المَعيبة من المُنتَج من بين القطع الخمسين التي اختارتها لجنة الرقابة الحكومية، فإنَّ: $X \sim B(50, 0.08)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد العدد المُتوقَّع من القطع المَعيبة على النحو الآتي:

$$E(X) = np \quad \text{صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين}$$

$$= 50 \times 0.08 \quad \text{بتعويض } n = 50, p = 0.08$$

$$= 4 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، يُتوقَّع وجود 4 قطع مَعيبة ضمن هذه العيِّنة.

معلومة

تتمثَّل أبرز مهام مؤسسة المواصفات والمقاييس الأردنية في التأكُّد أنَّ مختلف المُنتَجات مُطابِقة للقواعد المُعتمَدة، والتحقُّق من توافر عنصر الأمان عند استعمالها، وذلك بفحص عيِّنات منها، وتعرُّف درجة مطابقتها للمواصفات.

أتحقَّق من فهمي

اتصالات: **بعد إجراء مسح لمشتركي إحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشترك عشوائيًّا لاستطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تُقدِّمها الشركة، فأجد عدد الإناث المُتوقَّع في هذه العيِّنة.**

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ تباين المُتغيِّر العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم X عن وسطها الحسابي $E(X)$، وأنَّه يُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز σ^2.

ومن ثَمَّ، إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد تباينه باستعمال الصيغة الآتية:

أتذكَّر

$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$= \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(X))^2$

مفهوم أساسي — التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$، ويعطى التباين للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 5

إذا كان: $X \sim B(20, 0.7)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **التوقُّع $E(X)$.**

صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين	$E(X) = np$
بتعويض $n = 20, p = 0.7$	$= 20 \times 0.7$
بالتبسيط	$= 14$

2 **التباين $\text{Var}(X)$.**

صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين	$\text{Var}(X) = np(1-p)$
بتعويض $n = 20, p = 0.7$	$= 20(0.7)(0.3)$
بالتبسيط	$= 4.2$

أتذكَّر

يُرمَز إلى الانحراف المعياري بالرمز σ، ويساوي التباين مربع الانحراف المعياري.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوقُّع $E(X)$.

b) التباين $\text{Var}(X)$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1. إلقاء قطعة نقد 80 مَرَّة، ثم تسجيل عدد مَرّات ظهور الكتابة.
2. إلقاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي ظهر فيها العدد 4 على الوجه العلوي لحجر النرد.
3. إطلاق أسهم بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثم التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة.
4. إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معاملاه: $n = 17, p = 0.64$، فأُعبِّر عن هذا المُتغيِّر بالرموز.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

7. $P(X < 3)$
6. $P(X = 5)$
5. $P(X = 2)$

إذا كان: $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10. $P(0 \leq X < 2)$
9. $P(X > 1)$
8. $P(X = 1)$

مساجد: بعد إجراء مسح للمُصلّين في أحد مساجد العاصمة عمّان، تبيَّن أنَّ 60% من هؤلاء المُصلّين تقلُّ أعمارهم عن 50 عامًا. إذا اختير 12 مُصلِّيًا من مرتادي هذا المسجد عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11. احتمال أنْ تقلَّ أعمار 7 منهم فقط عن 50 عامًا.
12. احتمال أنْ يقلَّ عُمُر اثنين منهم على الأكثر عن 50 عامًا.

أجد التوقُّع والتباين لكل مُتغيِّر عشوائي ممّا يأتي:

13 $X \sim B(5, 0.1)$

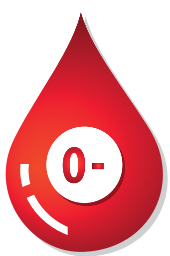
14 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

إذا كان احتمال إصابة شخص ما بأعراض جانبية بعد أخذه مطعومًا مُعيَّنًا هو 12%، وقرَّر طبيب إعطاء 50 شخصًا هذا المطعوم، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 3 أشخاص فقط ممَّن أخذوا المطعوم.

16 العدد المُتوقَّع للأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية.

17 التباين للمُتغيِّر العشوائي X.

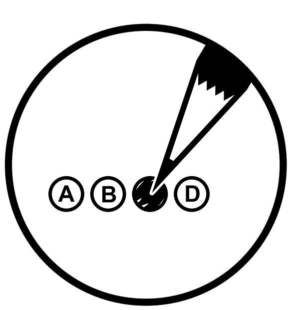


18 فصيلة الدم: تبلغ نسبة حاملي فصيلة الدم $O-$ من سكّان الأردن نحو 4% تقريبًا. أجد عدد الأشخاص الذين يَلزم إشراكهم في عيِّنة عشوائية من السكّان، ويُتوقَّع أنْ يكون منهم 10 أشخاص من حاملي فصيلة الدم $O-$.

مهارات التفكير العليا

19 تبرير: إذا كان: $X \sim B(3, p)$، وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$، فأجد $P(X = 2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

20 تبرير: إذا كان: $X \sim B(100, p)$، وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، مُبرِّرًا إجابتي.



21 تحدٍّ: يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 4 بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76 من 100؟

الدرس 3

التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

فكرة الدرس

- تعرُّف منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية.

المصطلحات

المنحنى الطبيعي، القاعدة التجريبية، المُتغيِّر العشوائي المتصل، المُتغيِّر العشوائي المنفصل، التوزيع الطبيعي.

مسألة اليوم

تتبع أطوال أشجار السرو في إحدى الغابات الحرجية توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 18.5 m، وانحرافه المعياري 2.5 m. إذا اختيرت شجرة سرو عشوائيًّا من تلك الغابة، فما احتمال أنْ يتراوح طولها بين 21 m و 16 m؟

أتذكَّر

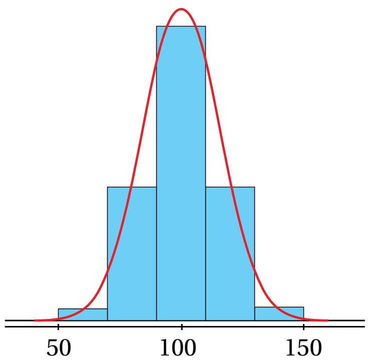
البيانات العددية المنفصلة هي بيانات تأخذ قِيَمًا قابلةً للعدِّ، مثل: عدد الإخوة، وعدد الكتب. أمّا البيانات العدديــة المتصلــة فهي بيانات قِيَمها المُمكِنة غير قابلــة للعدِّ، لكنَّهــا قابلة للقيــاس، مثــل: الطول، والكتلة.

المنحنى الطبيعي

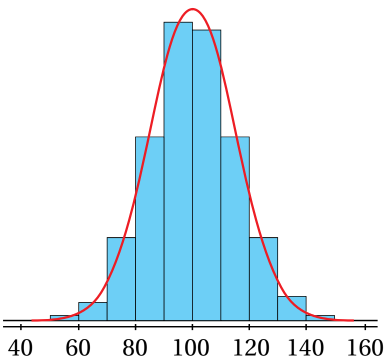
تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ البيانات العددية هي بيانات يُمكِن رصدها في صـورة أرقام، ويُمكِن أيضًا قياسها، وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعديًّا وتنازليًّا.

تُصنَّف البيانات العددية إلــى نوعين، هما: البيانات المنفصلــة، والبيانات المتصلة. ويُمكِن استعمال المدرجات التكرارية لتمثيل البيانات العددية المتصلة بيانيًّا.

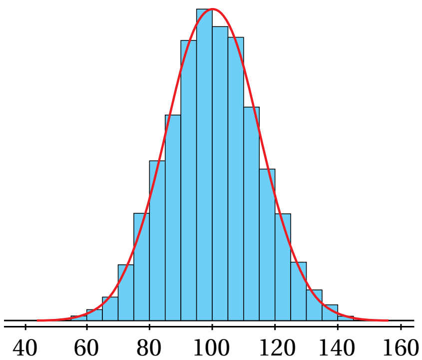
تُبيِّـن المدرجـات التكراريـة الآتيـة كتـل مجموعـة مـن الأشـخاص اختيـروا عشـوائيًّا مـن مدينـة مـا:



$n = 100$



$n = 1000$



$n = 10000$

أُلاحِظ أنَّ زيادة حجم العيِّنة، وتقليص أطوال الفئات، يجعلان المدرج التكراري أكثر تناسقًا وقربًا من المنحنى المرسوم باللون الأحمر، الذي يُسمّى **المنحنى الطبيعي** (normal curve). يُستعمَل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًّا في كثير من المواقف الحياتية.

بوجه عام، فإنَّ للمنحنى الطبيعي خصائص تُميِّزه عن غيره من المنحنيات الأُخرى؛ ما يُفسِّر سبب استعماله كثيرًا في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة.

مفهوم أساسي

خصائص المنحنى الطبيعي

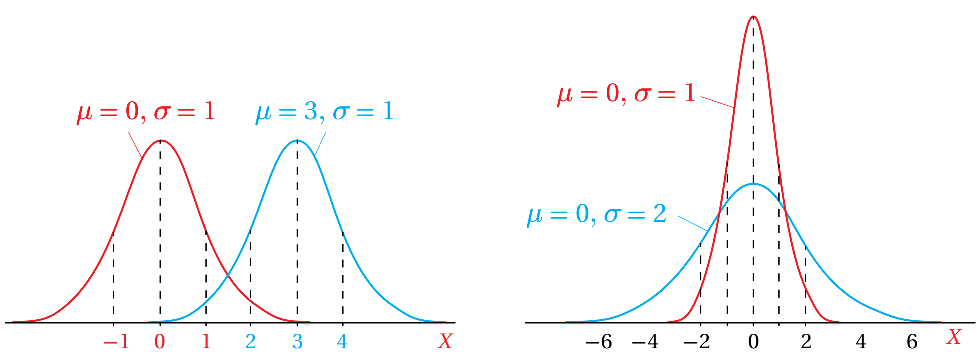
يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

أتعلَّم

يجب أنْ يكون عدد البيانات كبيرًا جدًّا لكي يتخذ تمثيلها البياني شكل المنحنى الطبيعي.

يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي μ، والانحراف المعياري σ للبيانات. فمثلًا، في الشكل (a) التالي، يُمكِن ملاحظة أنَّ التغيُّر في الوسط الحسابي يؤدّي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي. أمّا في الشكل (b) فيُلاحَظ أنَّ زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشارًا وتوسُّعًا.



(a) (b)

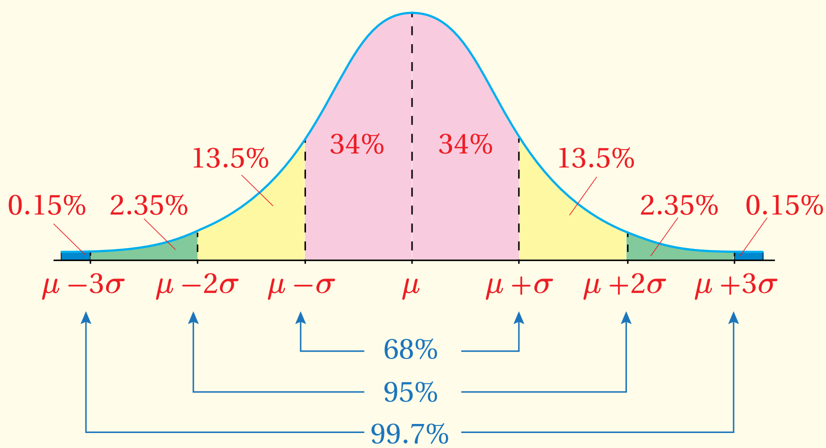
أتعلَّم

أُلاحِظ من الشكل (a) أنَّ زيادة الوسط الحسابي من 0 إلى 3 تسبَّبت في انسحاب المنحنى إلى اليمين 3 وحدات، علمًا بأنَّ σ متساوية، في حين أنَّ زيادة الانحراف المعياري من 1 إلى 2 في الشكل (b) أدَّت إلى توسُّع المنحنى أفقيًّا، من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في مركز البيانات.

تُمثِّل المساحة التي تقع بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين، ويُمكِن اســتعمال **القاعـــدة التجريبية** (empirical rule) الآتية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض قِيَم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي:

مفهوم أساسي **القاعدة التجريبية**

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شــكل المنحنى الطبيعي، وكان وســطها الحسابي μ، وانحرافها المعياري σ، فإنَّ:



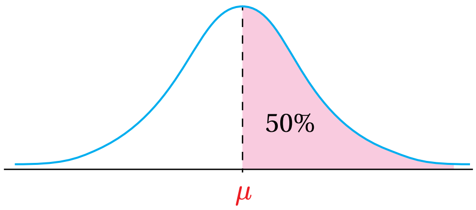
- 68% مــن البيانــات تقريبًــا تقــع بيــن $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$؛ أيْ إنَّ 68% مــن البيانــات لا يزيــد البُعْــد بينهــا وبيــن الوســط الحســابي علــى قيمــة الانحــراف المعيــاري.
- 95% مــن البيانـــات تقريبًـــا تقـــع بيـــن $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$؛ أيْ إنَّ 95% مـــن البيانـــات لا يزيــد البُعْــد بينهــا وبيــن الوســط الحســابي علــى مثلــي قيمــة الانحـــراف المعيـــاري.
- 99.7% مــن البيانـــات تقريبًـــا تقـــع بيـــن $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$؛ أيْ إنَّ 99.7% مـــن البيانـــات لا يزيــد البُعْــد بينهــا وبيــن الوســط الحســابي علــى ثلاثــة أمثــال قيمــة الانحـــراف المعيـــاري.

مثال 1

إذا اتخذت كتل مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

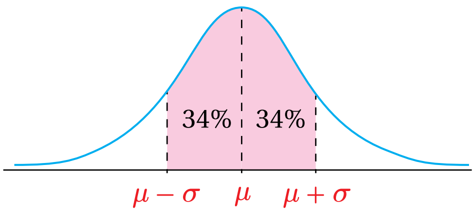
1 **النسبة المئوية للطلبة الذين تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي.**

بما أنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 50% تقريبًا من الطلبة تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي كما في الشكل المجاور.



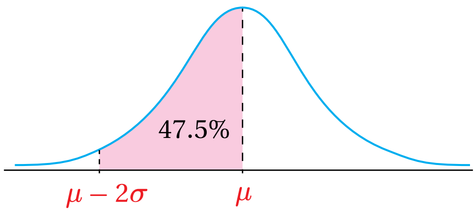
2 **النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين كتلهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.**

68% تقريبًا هي النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين كتلهم وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد كما في الشكل المجاور.



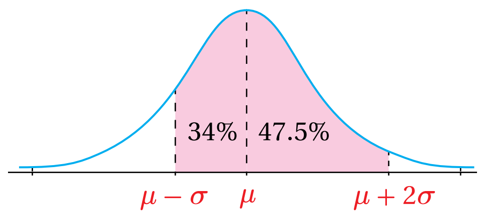
3 **النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.**

بما أنَّ 95% من المشاهدات في المنحنى الطبيعي تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$، وأنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 47.5% تقريبًا من الطلبة تقلُّ كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين كما في الشكل المجاور.



4 **النســبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.**

بما أنَّ 47.5% تقريبًا من الطلبة تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، وأنَّ 34% تقريبًا من الطلبة تقلُّ كتلهم عن الوســط الحســابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، فإنَّ 81.5% تقريبًا من الطلبة تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقــدار لا يزيد على انحرافيــن معياريين، أو تقــلُّ عنه بمقدار لا يزيــد على انحراف معياري واحد.



أتحقَّق من فهمي

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

b) النســبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوســط الحسابي على انحراف معياري واحد.

c) النســبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوســط الحســابي بمقــدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

d) النســبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية.

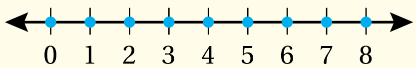
يوجد نوعان من المُتغيِّرات العشوائية، هما: **المُتغيِّر العشوائي المنفصل** (discrete random variable)، و**المُتغيِّر العشوائي المتصل** (continuous random variable).

مفهوم أساسي

المُتغيِّرات العشوائية المتصلة والمنفصلة

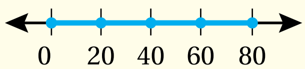
- المُتغيِّر العشوائي المنفصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

مثال: عدد السيّارات التي ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



- المُتغيِّر العشوائي المتصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة من الأعداد الحقيقية.

مثال: سرعة أوَّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



أتعلَّم

يُعَدُّ كلٌّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلًا؛ لأنَّ كُلًّا منهما يأخذ قِيَمًا معدودةً، مثل: عدد مرّات إصابة الهدف، وعدد السيّارات.

إذا ارتبط المُتغيِّر العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي **التوزيع الطبيعي** (normal distribution)، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث:

μ: الوسط الحسابي.

σ: الانحراف المعياري.

أتعلَّم

يُرمَز إلى التوزيع الطبيعي بالحرف N؛ وهو الحرف الأوَّل من الكلمة الإنجليزية (Normal) التي تعني طبيعي.

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّ المساحة الواقعة بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي تُمثِّل النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. وبما أنَّ المساحة أسفل المنحنى الطبيعي هي 1، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال بعض قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية، بافتراض أنَّ المساحة أسفل المنحنى كاملة تُمثِّل احتمال الحادث الأكيد.

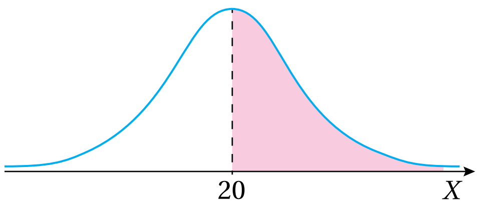
أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإنَّ: $0 \le P(A) \le 1$.

مثال 2

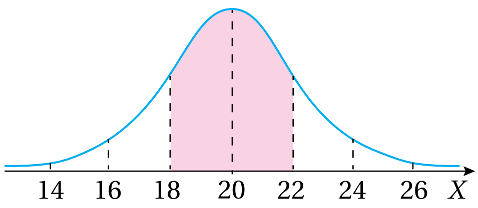
إذا كان: $X \sim N(20, 4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X > 20)$



بما أنَّ الوسط الحسابي هو 20، والمنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ: $P(X > 20) = P(X > \mu) = 0.5$ كما في الشكل المجاور.

2 $P(18 < X < 22)$



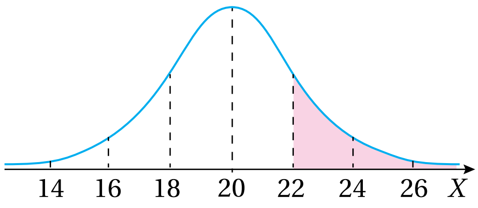
تبعد كلٌّ من القيمة 18 والقيمة 22 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي. وبما أنَّ 68% من البيانات لا يزيد بُعْدها عن الوسط الحسابي بمقدار قيمة الانحراف المعياري، فإنَّ:

$P(18 < X < 22) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$.

أتعلَّم

بما أنَّ $\sigma^2 = 4$، فإنَّ $\sigma = 2$؛ أيْ إنَّ الانحراف المعياري لهذا التوزيع الطبيعي هو 2.

3 $P(X > 22)$



بما أنَّ القيمة 22 تبعد انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي، فإنَّ المطلوب هو إيجاد احتمال القِيَم التي يزيد بُعْدها عن الوسط الحسابي بمقدار يزيد على انحراف معياري واحد.

وبما أنَّ 16% من البيانات تُحقِّق ذلك، فإنَّ:

$P(X > 22) = P(X > \mu + \sigma) = 0.16$.

أتعلَّم

نسبة 16% ناتجة من:

$13.5\% + 2.35\% + 0.15\%$

أو من: $50\% - 34\%$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim N(55, 121)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X < 55)$ b) $P(55 < X < 66)$ c) $P(X > 77)$

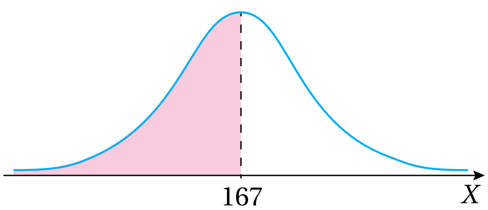
يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي لنمذجة كثير من المواقف الحياتية، وإيجاد احتمالات مرتبطة بها باستعمال القاعدة التجريبية.

مثال 3 : من الحياة

أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 167 cm، وانحرافه المعياري 8 cm. إذا اختيرت امرأة عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

> **أتعلَّم**
>
> في ما يختصُّ بالتوزيع الطبيعي، فإنَّ إشارة المساواة لا تُؤثِّر في قِيَم الاحتمال؛ أيْ إنَّ: $P(X \leq a) = P(X < a)$.

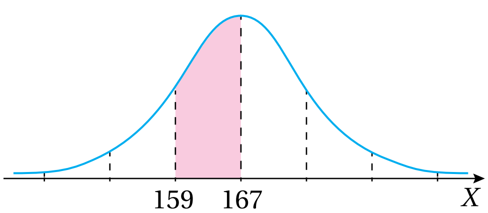
1 **احتمال أنْ يكون طول المرأة أقل من 167 cm**



بما أنَّ الوسط الحسابي هو 167، والمنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ:

$P(X < 167) = P(X < \mu) = 0.5$.

2 **احتمال أنْ يتراوح طول المرأة بين 159 cm و 167 cm**



تبعد القيمة 159 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي. وبما أنَّ 34% من البيانات تقلُّ عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، فإنَّ:

$P(159 < X < 167) = P(\mu - \sigma < X < \mu) = 0.34$.

أتحقَّق من فهمي

أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال الرجال في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 178 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يكون طول الرجل أكثر من 178 cm

b) احتمال أنْ يتراوح طول الرجل بين 171 cm و 192 cm

إذا اتخذت علامات الطلبة في اختبار لمبحث التاريخ شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

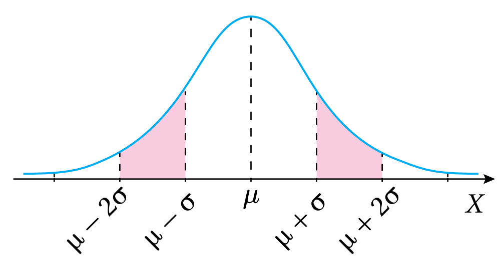
2 النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

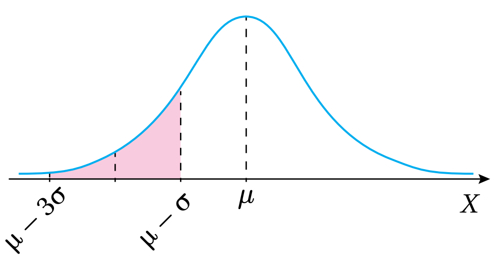
4 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

أُحدِّد النسبة المئوية لمساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل كل توزيع طبيعي ممّا يأتي:

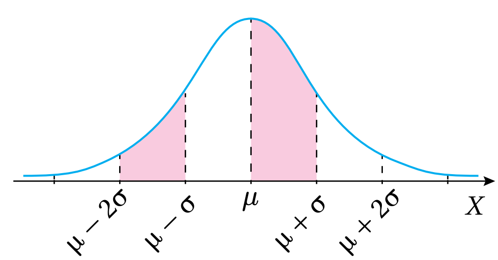
6



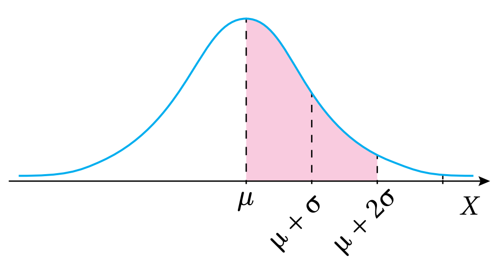
5



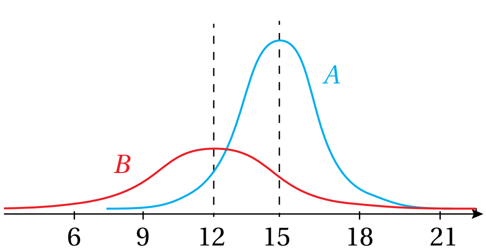
8



7



9 يُمثِّل كلٌّ من المنحنيين المجاورين توزيعًا طبيعيًّا. أُقارِن بين هذين التوزيعين من حيث: قِيَم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



إذا كان: $X \sim N(79, 144)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 $P(X > 91)$

11 $P(67 < X < 91)$

10 $P(X < 79)$

15 $P(X < 43)$

14 $P(43 < X < 115)$

13 $P(X > 103)$

صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أطوال أقطار رؤوس مثاقب (بالملّيمتر) تُنتِجها آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16) $P(X > 30)$

17) $P(29.6 < X < 30.4)$

18) $P(29.2 < X < 30)$

19) $P(29.2 < X < 30.4)$

صناعة: يُنتِج مصنعٌ أكياسَ أسمنت تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 50 kg، وانحرافه المعياري 2 kg. إذا اختير كيس أسمنت عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

20) احتمال أنْ تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg.

21) احتمال أنْ تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg.

مهارات التفكير العليا

22) أكتشف الخطأ: قال يوسف: "إنَّ $X \sim N(4^2, t^2)$ مُتغيِّر عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 4، وانحرافه المعياري t^2 ".
أكتشف الخطأ في قول يوسف، ثم أُصحِّحه.

23) تبرير: يدلُّ المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد σ^2، مُبرِّرًا إجابتي.

24) تحدٍّ: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68، وانحرافه المعياري 15. إذا لم ينجح في الاختبار 16% من الطلبة، فأجد علامة النجاح.

الدرس 4

التوزيع الطبيعي المعياري
Standard Normal Distribution

فكرة الدرس

- تعرُّف التوزيع الطبيعي المعياري، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول.

المصطلحات التوزيع الطبيعي المعياري.

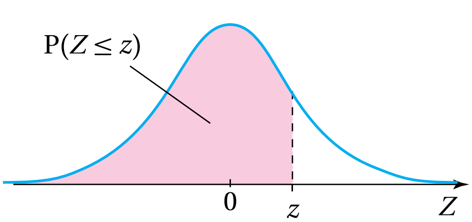
مسألة اليوم سجَّلت محطَّة رصد جوي درجات الحرارة في منطقة قطبية باردة. وكانت درجات الحرارة هذه تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 0°C، وانحرافه المعياري 1. إذا اختير أحد الأيام عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون درجة الحرارة المُسجَّلة في المحطَّة أكثر من 2.64°C في ذلك اليوم؟

التوزيع الطبيعي المعياري

يُطلَق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0، وانحرافه المعياري 1 اسم **التوزيع الطبيعي المعياري** (standard normal distribution)، ويُمكِن التعبير عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري بالرموز على النحو الآتي:

$$Z \sim N(0, 1)$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المُتماثِل حول الوسط الحسابي 0.



تُمثِّل مساحة المنطقة المُظلَّلة احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري Z التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z، أو $P(Z \leq z)$.

أتعلَّم

يُستعمَل الحرف X عادة للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، ويُستعمَل الحرف Z للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري.

أتعلَّم

عند استعمال المُتغيِّر العشوائي المتصل X، فإنَّ إشارة المساواة لا تُؤثِّر في قيمة الاحتمال؛ لأنَّ المساحة (الاحتمال) أسفل نقطة واحدة على المنحنى هي صفر. فمثلًا: $P(X \leq x) = P(X < x)$.

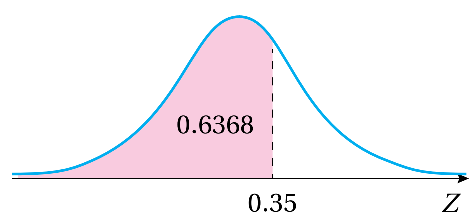
إذن، $P(Z < z)$ تساوي المساحة إلى يسار القيمة المعيارية z، وهي المساحة التي يُمكِن إيجادها باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

يُبيِّن الشكل التالي جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يحتوي فيه العمود الأوَّل من جهة اليسار على منزلة أجزاء العشرة في قيمة z المعيارية، ويحتوي فيه الصف الأوَّل على منزلة أجزاء المئة في قيمة z المعيارية، وتُمثِّل القيمة المُقابِلة لكلٍّ من هاتين القيمتين في الجدول المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع **يسار** قيمة z المعيارية، أو $P(Z < z)$.

فمثلًا، لإيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار $z = 0.35$، أجد القيمة المُقابِلة لكلٍّ من 0.3 في العمود الأوَّل، و 0.05 في الصف الأوَّل، وهذه القيمة تساوي $P(Z < 0.35)$.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	[illegible]	[illegible]	0.7088
[illegible]	[illegible]	0.7291	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



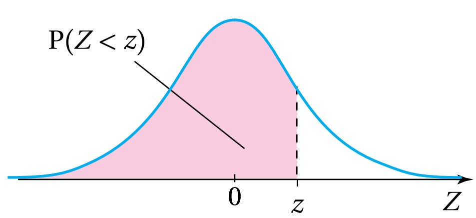
ملحوظة: توجد نسخة كاملة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في الملحق المُرفَق بنهاية الكتاب.

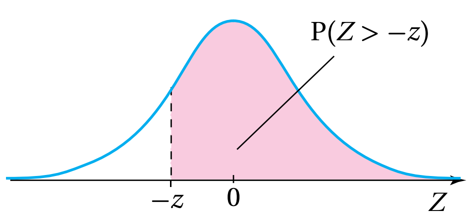
أتعلَّم

تُعَدُّ القاعدة المجاورة نتيجةً لتماثل منحنى التوزيع الطبيعي حول الوسط الحسابي.

يُبيِّن الجدول السابق احتمال القِيَم التي تقلُّ عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z، ويُمكِن أيضًا إيجاد احتمال القيمة التي تزيد على (أو تساوي) القيمة المعيارية $(-z)$ من الجدول مباشرة؛ لأنَّ مساحة المنطقة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي التي تقع يمين القيمة المعيارية $(-z)$ مساوية لمساحة المنطقة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي التي تقع يسار القيمة المعيارية (z).

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$





مثال 1

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(Z < 1.34)$

$P(Z < 1.34) = 0.9099$ باستعمال الجدول

2 $P(Z > -2.01)$

$P(Z > -2.01) = P(Z < 2.01)$ باستعمال الخصائص

$= 0.9778$ باستعمال الجدول

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 0.69)$

b) $P(Z < 3.05)$

c) $P(Z > -1.67)$

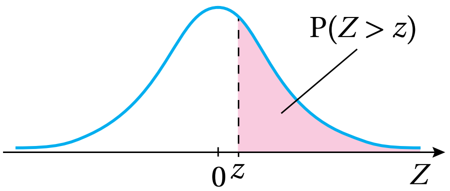
d) $P(Z > -2.88)$

أتعلَّم

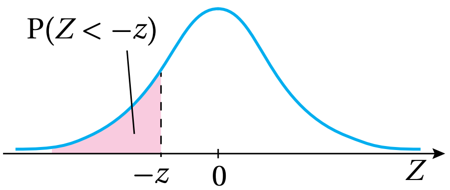
يحتوي جدول التوزيع الطبيعي على احتمالات تُقابِل قِيَم z الموجبة فقط؛ لذا، يجب أنْ أُحوِّل جميع قِيَم z السالبة إلى ما يُقابِلها من قِيَم موجبة.

يُمكِن استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، إضافةً إلى الجدول، لإيجاد احتمال القِيَم التي تزيد على (أو تساوي) القيمة المعيارية z، أو احتمال القِيَم التي تقلُّ عن (أو تساوي) القيمة المعيارية ($-z$)، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

- $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$



- $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$



أتعلَّم

تُعَدُّ القاعدتان المجاورتان صحيحتين؛ لأنَّ المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري كاملة هي 1، ولأنَّها تُمثِّل احتمال الحادث الأكيد.

مثال 2

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(Z > 1.25)$

$P(Z > 1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8944$ باستعمال الجدول

$= 0.1056$ بالتبسيط

2 $P(Z < -0.62)$

$P(Z < -0.62) = 1 - P(Z < 0.62)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.7324$ باستعمال الجدول

$= 0.2676$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z > 2.56)$

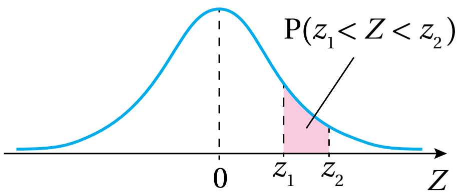
b) $P(Z > 1.01)$

c) $P(Z < -0.09)$

d) $P(Z < -1.52)$

يُمكِن أيضًا استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، لإيجاد احتمال القِيَم التي تقع بين قيمتين معياريتين، وذلك بطرح احتمال القيمة المعيارية الصغرى من احتمال القيمة المعيارية الكبرى:

- $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



مثال 3

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(0.47 < Z < 1.1)$

باستعمال الخصائص	$P(0.47 < Z < 1.1) = P(Z < 1.1) - P(Z < 0.47)$
باستعمال الجدول	$= 0.8643 - 0.6808$
بالتبسيط	$= 0.1835$

2 $P(-1.5 < Z < 2.34)$

باستعمال الخصائص	$P(-1.5 < Z < 2.34) = P(Z < 2.34) - P(Z < -1.5)$
باستعمال الخصائص	$= P(Z < 2.34) - (1 - P(Z < 1.5))$
باستعمال الجدول	$= 0.9904 - (1 - 0.9332)$
بالتبسيط	$= 0.9236$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(0 < Z < 0.33)$

b) $P(-1 < Z < 1.25)$

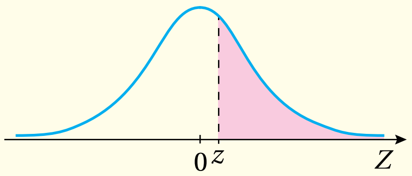
في ما يأتي مُلخَّص للحالات المذكورة في الأمثلة السابقة:

مُلخَّص المفهوم

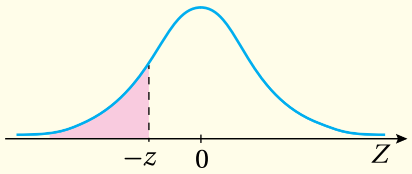
إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

1 $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$



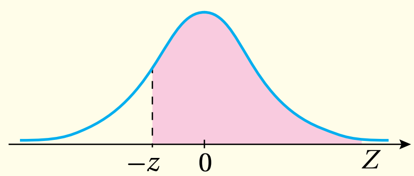
2 $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$



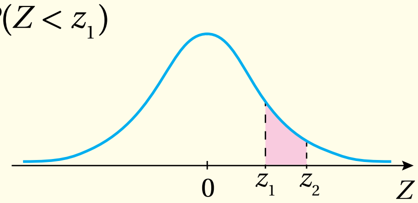
مُلخَّص المفهوم إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري (يتبع)

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

3 $P(Z > -z) = P(Z < z)$



4 $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

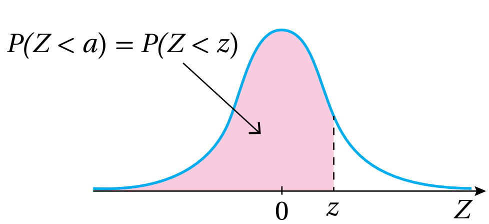
تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي المعياري، ولكنَّ الاحتمال قد يكون معلومًا في بعض الأحيان، وتكون قِيَم المُتغيِّر العشوائي Z هي المجهولة. وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

مثال 4

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\mathbf{P(Z < a) = 0.8212}$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a موجبة، وأنَّه يُمكِن استبدال القيمة z بها.



ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة z أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

بالرجـوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِـل الاحتمال 0.8212 هي 0.92 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	[illegible]		[illegible]	[illegible]	0.8599

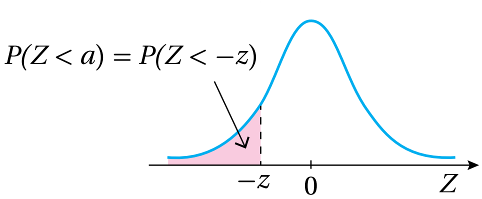
الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $z = a$، فإنَّ $a = 0.92$.

2 $P(Z < a) = 0.32$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a سالبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنها بالقيمة $-z$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المسـاحة التي تقع يسـار القيمة $-z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أسـتعين بخصائـص التوزيع الطبيعـي، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.32 = 1 - P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z < -z) = 0.32$

$$P(Z < z) = 0.68$$ بحَلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجـوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ القيمة الدقيقة للاحتمـال 0.6800 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقل منها، وهي 0.6772

ومن ثَمَّ، فإنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال هي 0.46 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

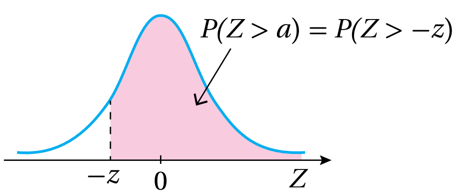
الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = -z$، فإنَّ قيمة a هي -0.46.

3 $P(Z > a) = 0.9406$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a سالبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنها بالقيمة $-z$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة $-z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.9406 = P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z > -z) = 0.9406$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال 0.9406 هي 1.56:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

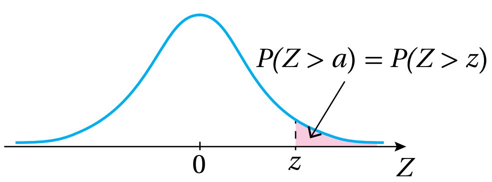
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	[illegible]	[illegible]	0.9573	0.9582	0.9591	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9633

الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = -z$، فإنَّ قيمة a هي -1.56.

4 $P(Z > a) = 0.015$

أُلاحِــظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المســاحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أســفل منحنـى التوزيع الطبيعي.



وبما أنَّ قيمة الاحتمــال أقل من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a موجبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنهــا بالقيمة z. ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المســاحة التي تقع يمين القيمة z أســفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ باستعمال الخصائص

$0.015 = 1 - P(Z < z)$ بتعويض $P(Z > z) = 0.015$

$P(Z < z) = 0.985$ بحلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال 0.9850 هي 2.17:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854

الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = z$، فإنَّ $a = 2.17$.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(Z < a) = 0.9788$

b) $P(Z < a) = 0.25$

c) $P(Z > a) = 0.9738$

d) $P(Z > a) = 0.2$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1) $P(Z < 0.68)$

2) $P(Z < 1.54)$

3) $P(Z > 0.27)$

4) $P(0.49 < Z < 2.9)$

5) $P(-0.08 < Z < 0.8)$

6) $P(0 < Z < 1.07)$

7) $P(Z < -1.25)$

8) $P(Z > -1.99)$

9) $P(-0.5 < Z < 0)$

10) $P(Z < 0.43)$

11) $P(Z > 3.08)$

12) $P(Z < -2.03)$

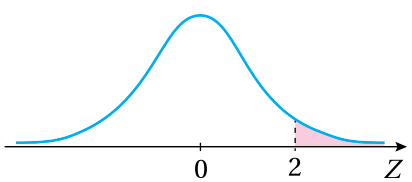
13) $P(Z > 2.2)$

14) $P(-0.72 < Z < 3.26)$

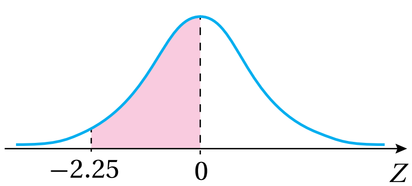
15) $P(1.5 < Z < 2.5)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

16)



17)



أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $P(Z < a) = 0.7642$

19) $P(Z < a) = 0.13$

20) $P(Z > a) = 0.8531$

21) $P(Z > a) = 0.372$

مهارات التفكير العليا

22) أكتشف الخطأ: عبَّرت روان عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري على النحو الآتي:

$N\text{~}Z(1, 0^2)$ ✗

أكتشف جميع الأخطاء التي وقعت فيها روان، ثم أُصحِّحها.

23) تحدٍّ: إذا كان $a > 0$، فأُثبِت أنَّ: $P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$.

تبرير: أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

24) $P(0 < Z < a) = 0.45$

25) $P(-a < Z < a) = 0.1272$

الدرس 5

احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

Probability of Normal Random Variable Using the Table

فكرة الدرس • إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مسألة اليوم يتبع ضغط الدم الانقباضي (mmHg) للبالغين توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 127، وانحرافه المعياري 16. إذا اختير شخص بالغ عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون ضغط دمه الانقباضي أقل من 123 mmHg؟

تحويل قيَم التوزيع الطبيعي إلى قيَم معيارية

تعلَّمْتُ في الدرسين السابقين إيجاد احتمالات مُتغيِّرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقِيَم مُحدَّدة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$، باستعمال القاعدة التجريبية، وإيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول. والآن سأتعلَّم إيجاد احتمال أيِّ مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ لأيِّ قيمة، وذلك بتحويله إلى مُتغيِّر عشوائي طبيعي معياري.

يُمكِن استعمال الصيغة الآتية لتحويل قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي X إلى قِيَم معيارية Z:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

بطرح الوسط الحسابي من قيمة x، ثم القسمة على الانحراف المعياري.

أتذكَّر

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

مثال 1

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 64، وانحرافه المعياري 5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{x = 70}$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$ صيغة قِيَم z

$$z = \frac{70 - 64}{5}$$ بتعويض $\mu = 64, \sigma = 5, x = 70$

$$= 1.2$$ بالتبسيط

2 $x = 55$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ صيغة قِيَم z

$z = \frac{55 - 64}{5}$ بتعويض $\mu = 64, \sigma = 5, x = 55$

$= -1.8$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 15، وانحرافه المعياري 4، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $x = 24$

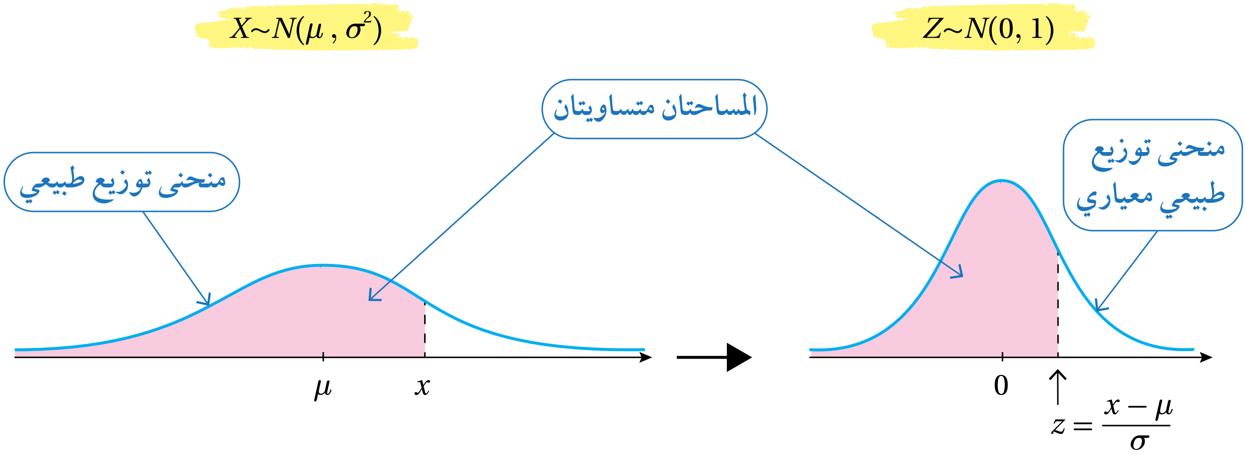
b) $x = 10$

أتذكَّر

يؤدّي التغيُّر في الوسط الحسابي إلى انسحاب أفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي. أمّا التغيُّر في الانحراف المعياري فيُؤثِّر في انتشار المنحنى الطبيعي وتوسُّعه.

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

إنَّ طرح الوسط الحسابي من جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلًا من μ، وإنَّ قسمتها جميعًا على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلًا من σ، وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معياريًّا، ويتحوَّل المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(\mu , \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$، عندئذٍ يُمكِن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أيٍّ من قِيَمه.



مثال 2

إذا كان: $X \sim N(36, 8^2)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(X < 42)$

$P(X < 42) = P\left(Z < \frac{42 - \mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم z

$= P\left(Z < \frac{42 - 36}{8}\right)$ بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$

$= P(Z < 0.75)$ بالتبسيط

$= 0.7734$ باستعمال الجدول

أتذكَّر

القيمة المعيارية z التي تُقابِل $x = 42$ في هذه الحالة هي 0.75

2 $P(X > 28)$

$P(X > 28) = P\left(Z > \frac{28 - \mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم z

$= P\left(Z > \frac{28 - 36}{8}\right)$ بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$

$= P(Z > -1)$ بالتبسيط

$= P(Z < 1)$ باستعمال الخصائص

$= 0.8413$ باستعمال الجدول

3 $P(X > 46)$

$P(X > 46) = P\left(Z > \frac{46 - \mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم z

$= P\left(Z > \frac{46 - 36}{8}\right)$ بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$

$= P(Z > 1.25)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 1.25)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8944$ باستعمال الجدول

$= 0.1056$ بالتبسيط

4 $P(24 < X < 56)$

$$P(24 < X < 56) = P\left(\frac{24-\mu}{\sigma} < Z < \frac{56-\mu}{\sigma}\right)$$ صيغة قِيَم z

$$= P\left(\frac{24-36}{8} < Z < \frac{56-36}{8}\right)$$ بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$

$$= P(-1.5 < Z < 2.5)$$ بالتبسيط

$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -1.5)$$ باستعمال الخصائص

$$= P(Z < 2.5) - (1 - P(Z < 1.5))$$ باستعمال الخصائص

$$= 0.9938 - 1 + 0.9332$$ باستعمال الجدول

$$= 0.927$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim N(7, 0.25)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < 7.7)$

b) $P(X > 6.1)$

c) $P(X > 8.2)$

d) $P(6 < X < 7.1)$

أتعلَّم

عند إيجاد $\frac{x-\mu}{\sigma}$، أُقرِّب الإجابة إلى أقرب منزلتين عشريتين؛ لأتمكَّن من استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

للتوزيع الطبيعي كثير من التطبيقات الحياتية التي نلجأ فيها إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري لتسهيل إجراء الحسابات المطلوبة.

مثال 3 : من الحياة

زراعة: تتبع كتل ثمار الجوّافة في إحدى مَزارع غور الأردن توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 70 g، وانحرافه المعياري 4 g:

1 **أجد نسبة ثمار الجوّافة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 80 g**

أفترض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يدلُّ على كتلة حبَّة الجوّافة:

$$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-\mu}{\sigma}\right)$$ صيغة قِيَم z

معلومة

تُزرَع فاكهة الجوّافة في مناطق عِدَّة من المملكة، أبرزها: منطقة سحم الكفارات، ومنطقة بني كنانة في محافظة إربد.

$= P\left(Z > \frac{80-70}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 70, \sigma = 4$

$= P(Z > 2.5)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 2.5)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.9938$ باستعمال الجدول

$= 0.0062$ بالتبسيط

إذن، نسبة ثمار الجوّافة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 80 g هي 0.0062

2 **إذا وُضِع في شـــاحنة 4500 ثمرة جوّافة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في هذه الشاحنة.**

الخطوة 1: أجد نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g

$P(X < 65) = P\left(Z < \frac{65-\mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم z

$= P\left(Z < \frac{65-70}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 70, \sigma = 4$

$= P(Z < -1.25)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 1.25)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8944$ باستعمال الجدول

$= 0.1056$ بالتبسيط

إذن، نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g هي 0.1056

الخطوة 2: أجد عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في الشاحنة.

أفتـــرض أنَّ n هو العدد المطلوب من ثمار الجوّافة، ثم أجده بضرب عدد ثمار الجوّافة الكلي الموجود بالشاحنة N في نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g:

$n = N \times P$ مفهوم النسبة

$= 4500 \times 0.1056$ بتعويض $N = 4500, P = 0.1056$

≈ 475 بالتبسيط

إذن، عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في الشاحنة هو 475 حبَّة جوّافة تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

زراعة: تتبع كتـــل ثمار البندورة في إحدى المَزارع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 90 g، وانحرافه المعياري 5 g:

a) أجد نسبة ثمار البندورة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 80 g

b) إذا احتوى صندوق على 200 حبَّة بندورة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 100 g في هذا الصندوق.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان X مُتغيِّرًا عشـــوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 224، وانحرافه المعياري 6، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $x = 239$

2) $x = 200$

3) $x = 224$

إذا كان: $X \sim N(30, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

4) $P(X < 35)$

5) $P(X > 38)$

6) $P(35 < X < 40)$

7) $P(X < 20)$

8) $P(15 < X < 32)$

9) $P(17 < X < 19)$

إذا كان: $X \sim N(154, 144)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

10) $P(X < 154)$

11) $P(X > 160)$

12) $P(140 < X < 155)$

قياس: يتبع محيط خصر 1200 شخص توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 78 cm، وانحرافه المعياري 5 cm:

13) أجد نسبة الأشخاص الذين يقلُّ محيط الخصر لكلٍّ منهم عن 70 cm

14) أجد عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكلٍّ منهم بين 70 cm و 80 cm

بطّاريات: تُنتِج إحدى الشركات بطّاريات من نوع AA، ويتبع عُمُر هذه البطّاريات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 25 ساعة، وانحرافه المعياري 1.5 ساعة. إذا اختيرت بطّارية عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 احتمال أنْ يكون عُمُر البطّارية أكثر من 28 ساعة.

16 احتمال أنْ يكون عُمُر البطّارية أكثر من 20 ساعة.

17 احتمال أنْ يتراوح عُمُر البطّارية بين 22 ساعة و25 ساعة.

إدارة السير: في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68.5 km/h، وانحرافه المعياري 5 km/h. إذا كانت السرعة القصوى المُحدَّدة على هذا الطريق هي 70 km/h، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1300 سيّارة، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

درجة المخالفة	السرعة
الأولى	(75–85) km/h
الثانية	أكثر من (85) km/h

18 أجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدَّدة على الطريق في هذا اليوم.

19 إذا كان نظام المراقبة على هذا الطريق يرصد مخالفات من درجتين بحسب مقدار تجاوز الحدِّ الأقصى للسرعة كما في الجدول المجاور، فأجد عدد المخالفات التي سُجِّلت من كل درجة في هذا اليوم.

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** إذا كان: $X\sim N(\mu\ ,\sigma^2)$، وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x = 14$ هي $z = 3.2$، والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X.

21 **تحدٍّ:** إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي هو 73، وانحرافه المعياري هو 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل مُعدَّل للطلبة الخمسين؟

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $X \sim B(4, 0.4)$، فإنَّ: $P(X = 3)$ يساوي:

a) 0.1536 b) 0.0384
c) 0.064 d) 0.3456

2 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معامله $n = 320$، وتوقُّعه 60، فإنَّ المعامل p هو:

a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{13}{16}$
c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{16}$

3 إذا كان: $X \sim B(8, 0.1)$، فإنَّ: $P(X < 2)$ إلى أقرب 4 منازل عشرية يساوي:

a) 0.3826 b) 0.8131
c) 0.4305 d) 0.1488

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان توقُّعه 8، وتباينه $\frac{20}{3}$، فإنَّ المعامل n هو:

a) 32 b) 64
c) 56 d) 48

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68% b) 95%
c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كانت علامات 2000 طالب في أحد الاختبارات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 83، وانحرافه المعياري 4، فإنَّ عدد الطلبة الذين تقلُّ علاماتهم عن 80 هو تقريبًا:

a) 453 b) 1547
c) 1567 d) 715

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 $P(X = 4)$ 8 $P(3 < X \leq 5)$

9 $P(X > 4)$ 10 $E(X)$

إذا كان: $X \sim B(6, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X = 2)$ 12 $P(X > 4)$

13 $P(2 \leq X < 3)$ 14 $E(X)$

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

15 $P(Z < 1.93)$ 16 $P(Z < 0.72)$

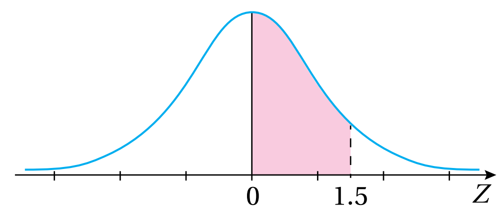
17 $P(Z > -1.04)$ 18 $P(-1.7 < Z < 3.3)$

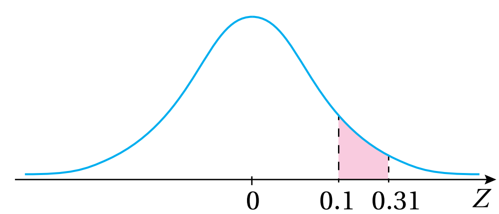
إذا كان: $X \sim N(55, 16)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

19 $P(X \leq 50)$ 20 $P(50 < X < 58)$

21 $P(56 < X < 59)$ 22 $P(X > 55)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

23 

24 

25 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشوائيًّا من إنتاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمام منزلها. إذا كان احتمال أنْ تمرَّ أيُّ سيّارة زرقاء من أمام منزلها هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 احتمال عدم مرور أيِّ سيّارة زرقاء من بين أوَّل 5 سيّارات مَرَّت أمام المنزل.

27 احتمال مرور أكثر من 3 سيّارات حتى شاهدت نور أوَّل سيّارة زرقاء.

أجد القيمة a التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

28 $P(Z < a) = 0.638$

29 $P(Z > a) = 0.6$

تعبئة: **يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ الحِمَّص في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 250 g، وانحرافه المعياري 4 g:**

30 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 260 g

31 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تتراوح كتلة كلٍّ منها بين 240 g و 250 g

في دراسة لإحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين يستعملون هواتفهم المحمولة لإجراء مكالمتين فقط يوميًّا. إذا اختير 20 شخصًا من المشتركين عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 احتمال أنْ يُجري 4 منهم فقط مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

33 احتمال أنْ يُجري اثنان منهم على الأقل مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

34 تُنتِج إحدى الشركات قوارير زيت، ويُفترَض أنْ تحوي كل قارورة منها 500 mL من الزيت، وأنْ يتبع حجم الزيت في هذه القوارير توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 506 mL، وانحرافه المعياري 3 mL. إذا احتوى صندوق على 100 قارورة توضَع عشوائيًّا، فأجد عدد القوارير في هذا الصندوق التي تحوي كلٌّ منها أقل من 500 mL من الزيت.

ملحقات

رموز رياضية

دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
توافيق n من العناصر أُخِذ منها r كل مرَّة.	$\binom{n}{r}$ ، ${}_nC_r$
احتمال الحادث A	$P(A)$
احتمال مُتمِّمة الحادث A	$P(\bar{A})$
الوسط الحسابي	μ
الانحراف المعياري	σ
التباين	σ^2
تكامل غير محدود	$\int$
تكامل محدود	$\int_a^b$
مشتقة الاقتران $f(x)$	$f'(x)$

الجبر

العمليات الحسابية

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

الأسس والجذور

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$ (إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة حيث $n>1$)

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, y \neq 0$$ (إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة حيث $n>1$)

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث: $a \neq 0$، فإنَّ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

التفاضل

قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقات الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, x > 0$$

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

التكامل

قواعد أساسية للتكامل

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad , x \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

خصائص التكامل غير المحدود

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

خصائص التكامل المحدود

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$، و$b > 0$، $b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$ (الأساس: b، الأُسُّ: y)

إذا وفقط إذا

الصورة الأُسِّية: $b^y = x$ (الأساس: b، الأُسُّ: y)

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$، و$b > 0$، $b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

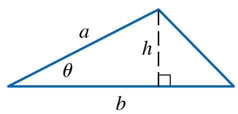
- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A، والمحيط C، والحجم V)

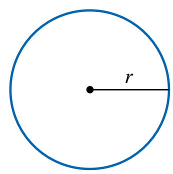
- المثلث:

$$A = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$



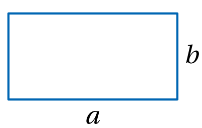
- الدائرة:

$$A = \pi r^2$$
$$C = 2\pi r$$



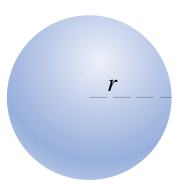
- المستطيل:

$$A = ab$$



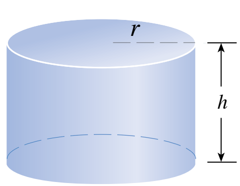
- الكرة:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$A = 4\pi r^2$$



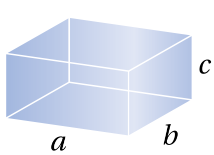
- الأسطوانة:

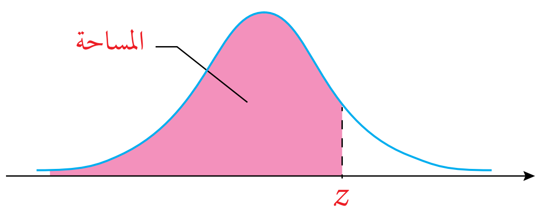
$$V = \pi r^2 h$$
$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



- متوازي المستطيلات:

$$V = abc$$
$$A = 2ab + 2ac + 2bc$$





جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998