المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د محمد صبح صبابحة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2024/4)، تاريـخ 2024/6/6 م، وقرار مجلـس التربيـة والتعليم رقـم (2024/64) تاريـخ 2024/6/26 م بـدءًا من العـام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 791 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/375)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات، كتاب الطالب: الصف الحادي عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الثانية، مزيدة ومنقحة

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

الطبعة الأولى (التجريبية) 1445 هـ / 2024 م
أعيدت طباعته 1446 هـ / 2025 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاريّ، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقــد روعي في إعداد كتــب الرياضيات للمرحلة الثانويــة تضمينها الموضوعات الرياضيــة الأكثر أهمية واســتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراسة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعــات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشــادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاســة مــن دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها ســابقًا وتســاعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومســائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّة فقد تضمّن كتابا الطالــب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات 6

الدرس 1 الاقترانات المتشعّبة 8

الدرس 2 التحويلات الهندسية للاقترانات 19

الدرس 3 المتتاليات والمتسلسلات 30

اختبار نهاية الوحدة 46

الوحدة 2 النهايات والمشتقّات 48

الدرس 1 النهايات والاتّصال 50

الدرس 2 الاشتقاق 66

الدرس 3 القِيَم العظمى والصغرى 77

قائمة المحتويات

الدرس 4 المشتقّة الثانية وتطبيقاتها 86

الدرس 5 تطبيقات القِيَم القصوى 95

الدرس 6 قاعدة السلسلة 106

اختبار نهاية الوحدة 116

الوحدة 3 الاحتمالات 118

الدرس 1 التباديل والتوافيق 120

الدرس 2 المُتغيِّرات العشوائية 133

اختبار نهاية الوحدة 144

الوحدة

1

الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات
Functions, Sequences, and Series

ما أهمّية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات المتشعّبة واقترانات القيمة المطلقة؛ لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل حساب أثمان المياه والكهرباء وفق شرائح الاستهلاك المختلفة، أو حساب ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المتعدّدة. ويُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال المتتاليات والمتسلسلات؛ ما يساعد على تحليل تلك المواقف وفهمها.

تعلّمت سابقًا:

- تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس.
- إكمال نمط عددي معطى.
- إيجاد الحدّ العام لكلّ من: المتتالية الخطية، والمتتالية التربيعية، والمتتالية التكعيبية.
- التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا.
- تمثيل الاقترانات بيانيًّا باستعمال تحويلات الانسحاب والتمدّد والانعكاس.
- المتسلسلات، وعلاقتها بالمتتاليات.
- المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (16–6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

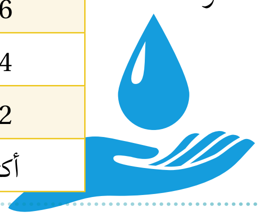
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرّف الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا، وتحديد مجال كلّ منهما ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعّب، اقتران القيمة المطلقة، رأس الاقتران.

مسألة اليوم يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟

شرائح الاستهلاك مقرّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JD/m^3
0 – 18	0.361
19 – 36	0.450
37 – 54	0.550
55 – 72	1.000
أكثر من 72	1.200



الاقتران المتشعب

أُلاحظ في المسألة السابقة، أنّه لا يُمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمّية المياه المستهلكة x يمكن من خلالها حساب ثمن المياه لأي قِيَم x؛ لذا، نحتاج إلى معادلة خاصّة بكلّ واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمّى الاقتران المعرّف بقواعد مختلفة عند أجزاء مختلفة في مجاله **اقترانًا متشعّبًا** (piecewise function).

أتذكّر

مجال أيّ اقترانٍ هو مجموعة القيم التي يأخذُها المُتغيِّر x، ومداه هو مجموعة القيم التي يأخذُها المُتغيِّر y.

مثال 1

إذا كان
$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , -3 \le x < 1 \\ x^2 & , x \ge 1 \end{cases}$$

1 أُحدّد مجال $f(x)$

أُلاحظ أنّ الاقتران معرّف بقاعدتين؛ الأولى $f(x) = -2x+1$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-3 \le x < 1$، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$. إذن: مجال $f(x)$ هو الفترة $[-3 , \infty)$

لغة الرياضيات

تُسمّى النقطة التي تتغيّر عندها قاعدة الاقتران المُتشعِّب نقطةَ التشعُّب، فمثلًا: في الاقتران $f(x)$ المجاور، يُسمّى العدد 1 الإحداثي x لنقطة التشعّب.

2 أجد قيمة $f(-2)$.

بما أنّ $-3 < -2 < 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الأولى.

$f(x) = -2x + 1$ القاعدة الأولى

$f(-2) = -2(-2) + 1$ بتعويض $x = -2$

$= 5$ بالتبسيط

3 أجد قيمة $f(1)$.

بما أنّ $1 \leq 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الثانية.

$f(x) = x^2$ القاعدة الثانية

$f(1) = (1)^2$ بتعويض $x = 1$

$= 1$ بالتبسيط

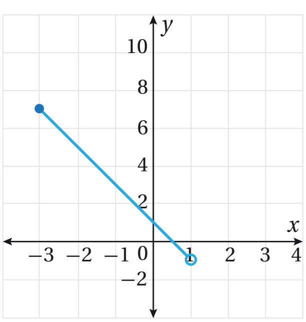
4 أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الخطوة 1: أُمثّل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$، عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أُعيّن النقطتين $(-3, 7)$, $(1, -1)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أنّ العدد (-3) يُحقّق المتباينة $-3 \leq x < 1$؛ أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-3, 7)$، أمّا العدد (1) فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أُنهي التمثيل بدائرة غير مظلّلة عند النقطة $(1, -1)$.



الخطوة 2: أُمثّل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$ هو جزء من منحنى قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى، أنشئ جدول قِيَم؛ لأرسم الجزء من منحنى القطع المكافئ، الذي يقع يمين العدد 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

أتذكّر

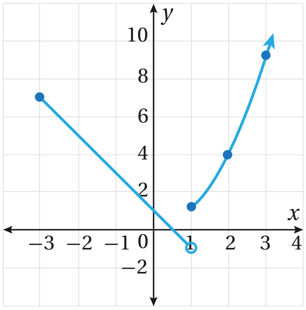
بما أنّ $f(x) = -2x+1$ اقتران خطّي؛ لذا، تكفي نقطتان لتمثيله بيانيًّا.

أتذكّر

يُمثّل الاقتران $f(x) = ax^2+bx+c$ قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت قيمة $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت قيمة $a < 0$، ومعادلة محور تماثله هي $x = \frac{-b}{2a}$، وإحداثيّا رأسه هما: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

أُعيّــن النقـــاط $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$ فـــي المســتوى الإحداثي، ثم أصل بينها بخط منحنٍ، وبما أنّ العدد 1 يُحقّق المتباينة $x \geq 1$، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند $(1, 1)$.

بالنظر إلى التمثيل البياني؛ أُلاحظ أنّ مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويُمكن التعبير عنه بالفترة $(-1, \infty)$.



أتحقّق من فهمي

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , x < 2 \\ 5 & , x = 2 \\ 2x - 1 & , x > 2 \end{cases}:$$

a) أُحدّد مجال $f(x)$

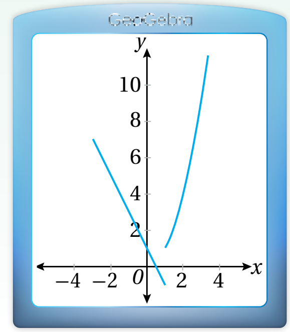
b) أجد قيمة كلّ من $f(5)$، وَ $f(2)$

c) أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الدعم البياني

يمكــن اســتعمال برمجية جيوجبــرا لتمثيــل الاقتران $f(x)$ بيانيًّــا، عــن طريــق المعادلة الآتية:

$f(x) = if(-3 \leq x < 1, -2x+ 1, x \geq 1, x^2)$

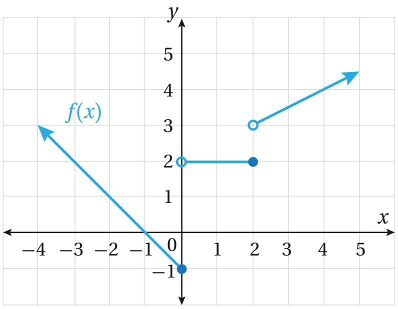


يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعّب؛ إذا أُعطيتُ تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

مثال 2

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أكتــبُ الاقتران الذي يُمثّــل كلّ جزء في التمثيل البياني.



الخطوة 1: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيسر في التمثيل البياني.

الجزء الأيســر في التمثيل البياني هــو اقتران خطي مقطعه مع المحــور y هو -1 وميله -1 وباســتعمال صيغة الميل والمقطع فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) = -x - 1$، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0,-1)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty, 0]$ من مجال $f(x)$.

أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ومعادلته بصيغــة الميل والمقطع هي: $y = mx + b$، حيــث m ميل المســتقيم، و b المقطــع y، ومعادلتــه بصيغة الميل ونقطة هي:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

الخطوة 2 : أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأوسط في التمثيل البياني.

الجزء الأوسط في التمثيل البياني هو الاقتران الثابت $f(x) = 2$، ووجود دائرة مظلّلة عند $(2, 2)$، ودائرة غير مظلّلة عند $(0, 2)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $[0, 2]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 3 : أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيمن في التمثيل البياني.

الجزء الأيمن في التمثيل البياني اقتران خطي ميله 0.5 وباستعمال صيغة الميل ونقطة، فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) - 4 = 0.5\ (x - 4)$، ويمكن إعادة كتابتها على الصورة: $f(x) = 0.5x + 2$، ووجود دائرة غير مظلّلة عند $(2, 3)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران المتشعّب على النحو الآتي:

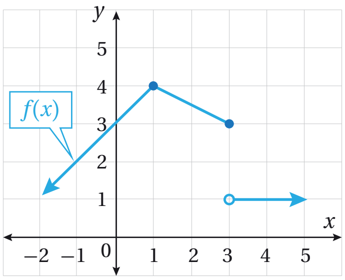
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \ x \leq 0 \\ 2 & , \ 0 < x \leq 2 \\ 0.5x + 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

أتعلّم

بما أن المقطع y للجزء الأيمن من الاقتران لا يظهر في التمثيل البياني مثل الجزء الأيسر، أبدأ بكتابة قاعدة هذا الجزء من التمثيل بصيغة الميل ونقطة أولًا، ثم أعيد كتابته بصورة الميل والمقطع.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يُمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعّبة.

مثال 3 : من الحياة

عمل: أجرة ساعة العمل الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع الشركة لكلّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات العمل المعتاد. أكتبُ اقترانًا لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعًا لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \leq x \leq 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

أتعلّم

أجرة ساعة العمل الإضافي تساوي أجرة ساعة ونصف من العمل النظامي.

$4 \times 1.5 = 6$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \leq x \leq 40 \\ 6x-80 & , x > 40 \end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

زادت شـــركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأســـس الآتية: الرواتب التي تقلّ عن 400 دينار زيدت بنســـبة 15%، والرواتب من 400 دينار إلى أقلّ من 600 دينار زيدت بنسبة 10%، مع علاوة ثابتة بقيمـــة 20 دينارًا، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيـــدت 80 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الراتب الجديد لموظّفي الشركة.

اقتران القيمة المطلقة

اقتـــران القيمة المطلقـــة (absolute value function) هو اقتران يحتـــوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثلته:

$$f(x) = 2|x| + 3 \quad , \quad f(x) = |x^2 - 2x - 3| \quad , \quad f(x) = \left|\frac{x+2}{2x-6}\right|$$

ومن أبسط اقترانات القيمة المطلقة الاقتران $f(x) = |x|$، ويُمكن كتابته بصورة اقتران متشعّب كما يأتي:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

تُســـمّى إعادة كتابة أيّ اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشـــعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

أتذكّر

القيمة المطلقة لأيّ عدد حقيقـــي x والتـــي يُرمز إليها بالرمز $|x|$ تســـاوي بعده عن الصفر على خط الأعداد، وبما أنّ البعد لا يكون ســـالبًا، فإنه توجد حالتان:

$|x| = x \, , x \geq 0$

$|x| = -x \, , x < 0$

مثال عددي:

$\left|-\frac{1}{2}\right| = \left|+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

مثال 4

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = |2x + 4|$

الخطوة 1: أُساوي ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x + 4 = 0$ بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر

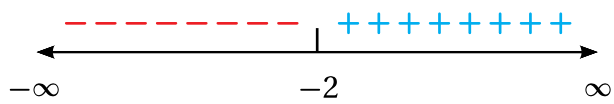
$2x + 4 - 4 = 0 - 4$ بطرح 4 من طرفي المعادلة

$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

$x = -2$ بالتبسيط

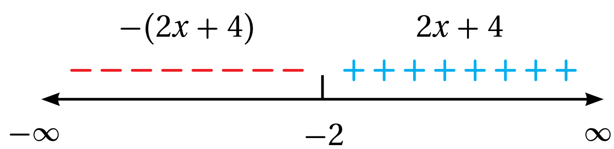
الخطوة 2: أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيه.

أُعيّن صفر المعادلة (-2) على خط الأعداد، ثمّ أُحدّد الإشـارة على جانبَيه، وذلك بتعويض أيّ قيمة أقلّ من -2 في $2x+4$ لأجد أنّ ناتج التعويض سـالب دائمًا، ما يعني أنّ الإشـارة يسار -2 سـالبة. وأُعوّض أيّ قيمة أكبر من -2 في $2x+4$ لأجد أنّ ناتج التعويض موجب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3: أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتبُ ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو دون تغيير في الجزء الموجب، وأكتبُ في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في -1



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4 & , \; x<-2\\ 2x+4 & , \; x\geq -2\end{cases}$$

أتعلّم

يأخـذ الاقتـران الخطّي يمين صفره إشارة معامل x نفسها، ويسـار صفره عكس إشارة معامل x.

أتعلّم

يمكن تغيير مكان المساواة في قاعـدة الاقتران $f(x)$ وكتابته على الصورة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4 & , \; x\leq -2\\ 2x+4 & , \; x>-2\end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x)=|3x-9|$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا

يتكوّن التمثيل البيانـي لاقتران القيمة المطلقة الذي على الصـورة $f(x)=a|x-h|+k$، حيث $a\neq 0$، من شعاعين على شكل حرف V متماثلين حول المحور $x=h$، **ورأس الاقتران** (function vertex) هـو النقطـة التي يصل عندها إلى أعلى قيمـة أو أقلّ قيمة وإحداثياها (h, k).

يُمكن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 5

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

1) $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيّا نقطة الرأس	(h, k)
بتعويض $h = 0, k = 0$	$= (0, 0)$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(0, 0)$، ومعادلة محور التماثل $x = 0$ (المحور y).

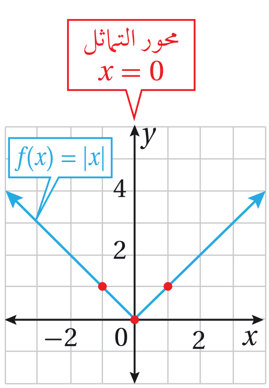
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بمـا أنّ محور التماثل $x = 0$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من 0 (مثلًا 1) وقيمة أخرى أقلّ من 0 (مثلًا -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

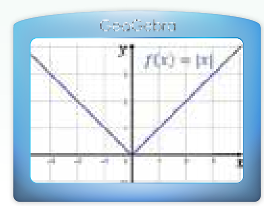
أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V.



يُلاحظ من التمثيـل البياني أنّ المجـال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $[0, \infty)$.

الدعم البياني

يُمكِـن اسـتعمال برمجيـة جيوجبـرا لتمثيـل الاقتران $f(x) = |x|$، وذلـك بكتابة $f(x) =$ في شريط الإدخال، ثـم نقـر $|\square|$ فـي لوحة المفاتيـح، وكتابـة x بيـن خطـي القيمـة المطلقة، ثم الضغـط علـى زِرِّ الإدخال (ENTER)، فيظهـر التمثيل البياني كما يأتي:



2 $f(x) = -|x+2| + 3$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيّا نقطة الرأس	(h, k)
بتعويض $h = -2, k = 3$	$= (-2, 3)$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$، ومعادلة محور التماثل $x = -2$.

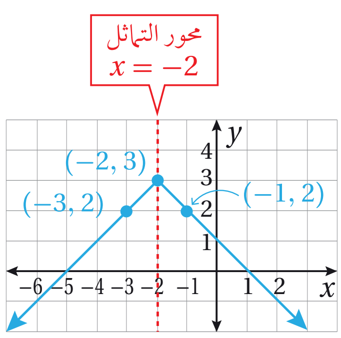
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = -2$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من -2 (مثلًا -1) وقيمة أخرى أقلّ من -2 (مثلًا -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = -\|x+2\| + 3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V مقلوب.



ألاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $(-\infty, 3]$.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

a) $f(x) = 2|x|$

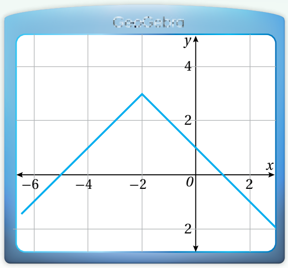
b) $f(x) = -2|x-4| + 3$

أتعلّم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|x-h| + k$، حيث $a \neq 0$، مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$.

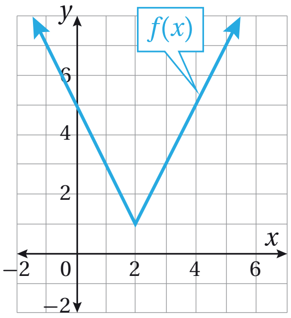
الدعم البياني

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = -|x+2| + 3$، وذلك بكتابة قاعدة الاقتران في شريط الإدخال، ثم الضغط على زرّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطّي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6



أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

يظهر من الشكل أن إحداثيّا رأس اقتران القيمة المطلقة $(2, 1)$، وهذا يعني أنه يمكن كتابة قاعدة الاقتران بالصورة الآتية:

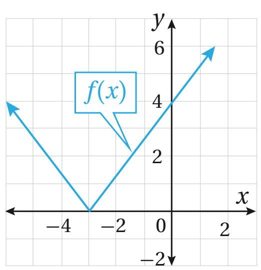
$$f(x) = a|x - 2| + 1$$

ولإيجاد قيمة a، أعوض في قاعدة الاقتران إحداثيي أي نقطة تقع على منحى الاقتران (مثلًا: $(0, 5)$)، وأحل المعادلة الناتجة.

$f(x) = a\|x - 2\| + 1$	قاعدة الاقتران
$5 = a\|0 - 2\| + 1$	بتعويض $(0, 5)$
$5 = 2a + 1$	بالتبسيط
$4 = 2a$	بطرح 1 من طرفي المعادلة
$a = 2$	بالقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: قاعدة الاقتران هي: $f(x) = 2|x - 2| + 1$

أتحقّق من فهمي



أكتبُ قاعدة اقتـران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \le x \le 4 \\ 2 & , x > 4 \end{cases}$ ، فأجد كلًّا من:

1. $f(-2)$
2. $f(-1)$
3. $f(0)$
4. $f(4)$
5. $f(8)$
6. $f(5)$

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

7 $f(x) = |3x - 6|$

8 $f(x) = |7x - 5| + 3$

أُمثّل كلاًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

9 $f(x) = \begin{cases} 3-2x & , x < -1 \\ 6 & , -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

10 $f(x) = \begin{cases} 3 & , x = 1 \\ -x + 2 & , x \neq 1 \end{cases}$

11 $f(x) = \begin{cases} x+5 & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$

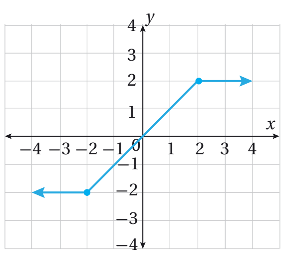
12 $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \leq 3 \\ -2 & , x > 3 \end{cases}$

13 $f(x) = 2|x + 3|$

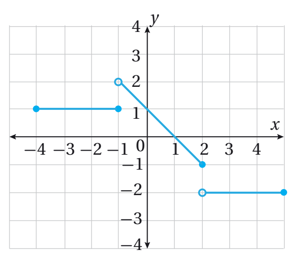
14 $f(x) = -|x - 4| + 1$

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

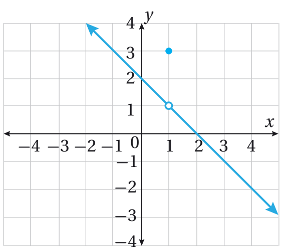
15



16

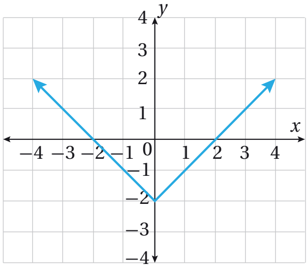


17

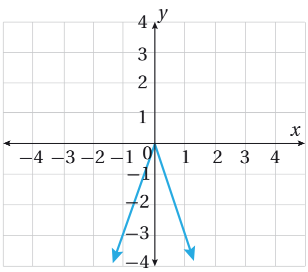


أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

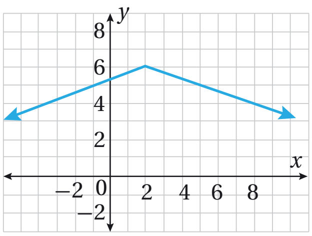
18



19



20



خيمة: يُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = -1.4\,|x - 2.5| + 3.5$ حافتَي الوجه الأمامي لخيمة، ويُمثّل العمود الذي يتوسّط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل، أمّا المحور x فيُمثّله سطح الأرض.

21 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

22 أجد مجال الاقتران ومداه.

عاصفة: تبدأ العاصفة المطرية بالهطل على شكل رذاذ ثم يزداد معدل الهطل، ثم تعود ثانية للهطل على شكل رذاذ، ويُمثّل الاقتران $r(t) = -0.5|t-1| + 0.5$، معدل الهطل r (بالإنش لكلّ ساعة)، حيث t الزمن بالساعات منذ بداية الهطل.

23 أُمثّل اقتران معدّل الهطل بيانيًّا.

24 أجد كم ساعة استمر الهطل.

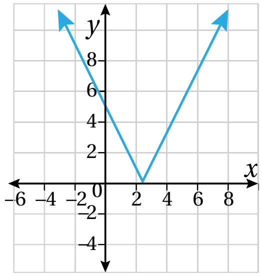
25 بعد كم ساعة كان أعلى معدل هطل؟ أُبرّر إجابتي.

26 أعود إلى مسألة اليوم، وأكتبُ الاقتران المتشعّب الذي يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة.

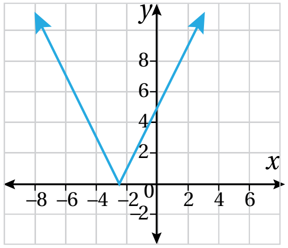
مهارات التفكير العليا

27 تبرير: أيّ الآتية تُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = |2x-5|$؟ أُبرّر إجابتي:

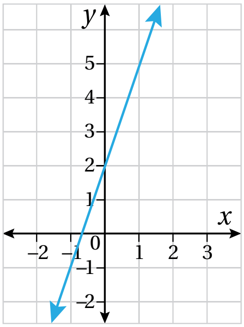
a)



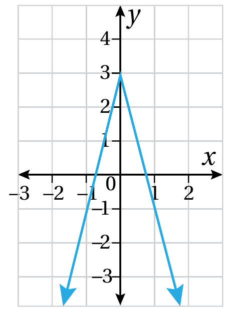
b)



c)



d)



28 تحدٍّ: أُمثّل الاقتران: $g(x) = -|4 - 2x| - 3$ بيانيًّا.

تحدٍّ: يُمكن كتابة المقدار $x^2 + px - q$ على الصورة $(x-2.5)^2 - 0.25$

29 أجد قيمة كلّ من p، و q.

30 أجد إحداثيَي كلّ من نقطتَي تقاطع منحنى $f(x) = |x^2 + px - q|$ مع محور x.

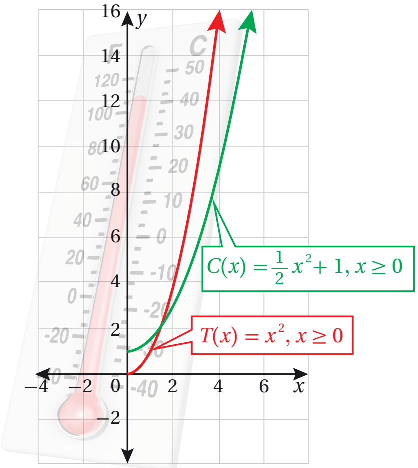
الدرس 2

التحويلات الهندسية للاقترانات
Transformations of Functions

فكرة الدرس رسم منحنيات اقترانات باستعمال التحويلات الهندسية، وكتابة معادلة التحويل لمنحنى معطى.

المصطلحات عائلة الاقترانات، الاقتران الرئيس، الانسحاب الرأسي، الانسحاب الأُفقي، الانعكاس، التمدّد الرأسي، التمدّد الأُفقي.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, x \geq 0$ درجة الحرارة $^\circ C$ في أحد أيام الشتاء في مدينة الشوبك، ويُمثّل الاقتران $T(x) = x^2, x \geq 0$ درجة الحرارة في مدينة السلط في اليوم نفسه، حيث x عدد الساعات بعد شروق الشمس. بالنظر إلى التمثيل البياني للاقترانين الذي يظهر جانبًا، ما العلاقة بين منحنيي الاقترانين $C(x)$ و $T(x)$؟



الاقترانات الرئيسة

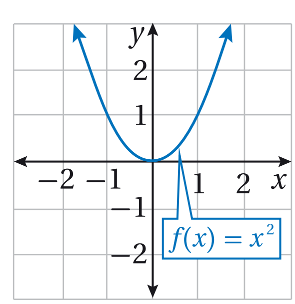
عائلة الاقترانات (family of functions) هي مجموعة الاقترانات التي تتشابه منحنياتها في صفة واحدة أو أكثر، ويُسمّى أبسط اقترانات هذه العائلة **الاقتران الرئيس** (parent function). فمثلًا، الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات الخطّية هو $f(x) = x$، ومن أمثلة اقترانات هذه العائلة الاقترانات الآتية:

$$h(x) = x + 3 , \quad g(x) = 5x , \quad j(x) = -7x + 1$$

وفي ما يأتي بعض الاقترانات الرئيسة الأكثر شيوعًا:

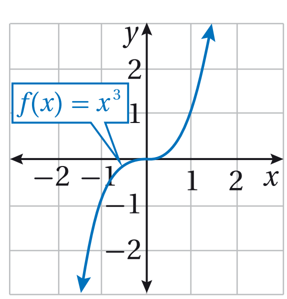
الاقتران التربيعي الرئيس

$$f(x) = x^2$$



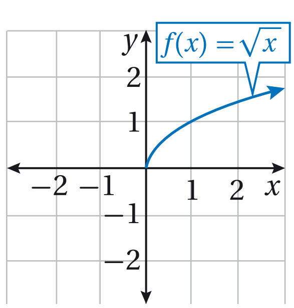
الاقتران التكعيبي الرئيس

$$f(x) = x^3$$



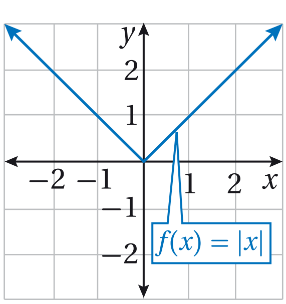
اقتران الجذر التربيعي الرئيس

$$f(x) = \sqrt{x}$$



اقتران القيمة المطلقة الرئيس

$$f(x) = |x|$$



تساعد معرفة شكل منحنى الاقتران الرئيس على تحليل وتمثيل منحنيات اقترانات أكثر تعقيدًا ناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس، فبعض هذه التحويلات يُغيِّر موقع المنحنى فقط ولا يُغيِّر في شكله وأبعاده، مثل تحويلات الانعكاس والانسحاب. وبعضها يُغيِّر شكل المنحنى بحيث يبدو أوسع من منحنى الاقتران الرئيس أو أضيق منه، مثل تحويلات التمدد.

الانسحاب الرأسي

الانسحاب الرأسي (vertical shift) هو تحويل هندسي ينقل منحنى الاقتران إلى الأعلى عند إضافة ثابت موجب إلى الاقتران، وإلى الأسفل عند طرح ثابت موجب من الاقتران.

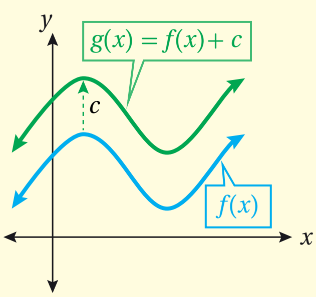
أتعلّم

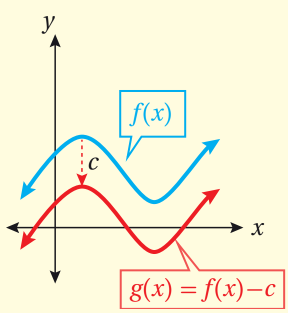
في الانسحاب الرأسي، يزيد الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(x) + c,\ c > 0$ بمقدار c وحدة على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$؛ وبالمثل فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(x) - c,\ c > 0$ يقلّ بمقدار c وحدة عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$.

مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x) + c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأعلى c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأسفل c وحدة.



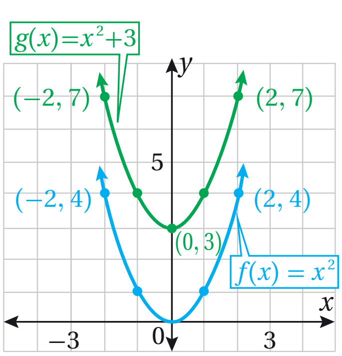


مثال 1

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = x^2 + 3$

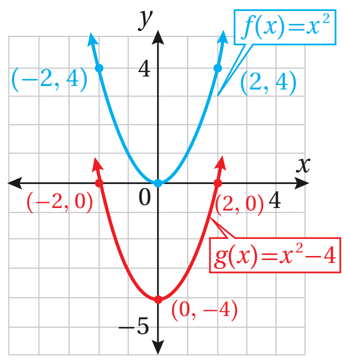
منحنى $g(x) = x^2 + 3$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 3 وحدات إلى الأعلى؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار 3 وحدات على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

2 $g(x) = x^2 - 4$

منحنى $g(x) = x^2 - 4$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى الأسفل؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يقلّ بمقدار 4 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 2$

b) $g(x) = |x| - 5$

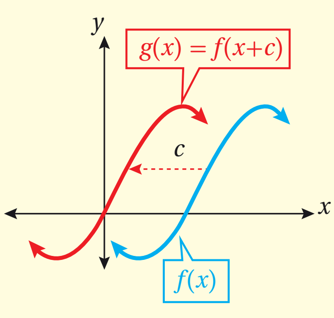
الانسحاب الأُفقي

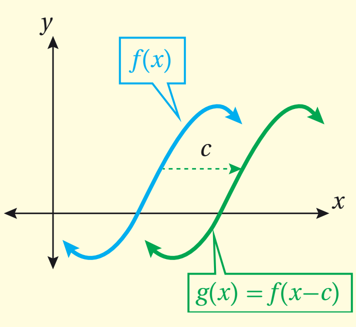
الانسحاب الأُفقي (horizontal shift) تحويل هندسي ينقل منحنى الاقتران إلى اليسار عند إضافة ثابت موجب إلى قِيَم x جميعها في مجال الاقتران، وإلى اليمين عند طرح ثابت موجب من قِيَم x جميعها في مجال الاقتران.

مفهوم أساسي — الانسحاب الأُفقي

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x + c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليسار c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x - c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليمين c وحدة.





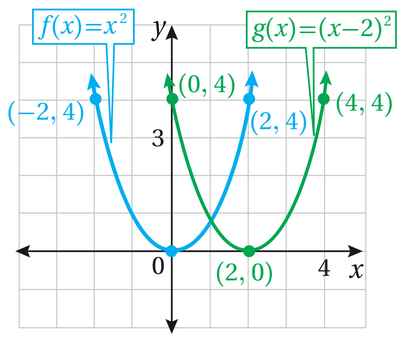
أتعلّم

قيمة $f(x-c)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $x - c$ في الانسحاب الأُفقي.

مثال 2

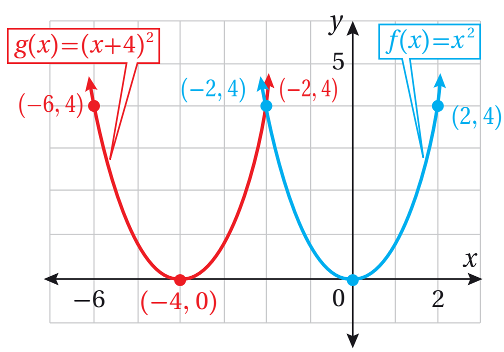
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = (x-2)^2$



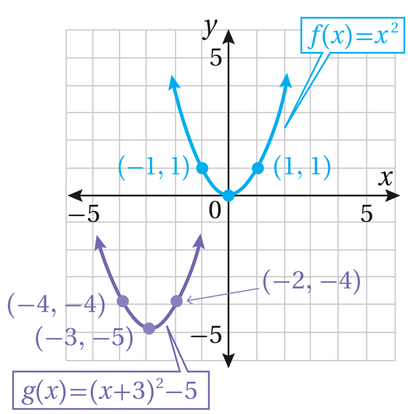
منحنى $g(x)= (x-2)^2$ هو منحنى $f(x)= x^2$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار وحدتين على الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.

2 $g(x) = (x+4)^2$



منحنى $g(x)= (x+4)^2$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى اليسار؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g يقلّ بمقدار 4 وحدات عن الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.

3 $g(x) = (x+3)^2 -5$



منحنى $g(x)= (x+3)^2 -5$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار، و5 وحدات إلى الأسفل، كما في الشكل المجاور.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = (x-1)^3$ **b)** $g(x) = (x+1)^3$ **c)** $g(x) = (x+2)^3 -4$

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

1

2

3

أتعلّم

في الفرع 3 من المثال 2، يُمكن البدء بإزاحة الاقتران f بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل ثمّ 3 وحدات إلى اليسار.

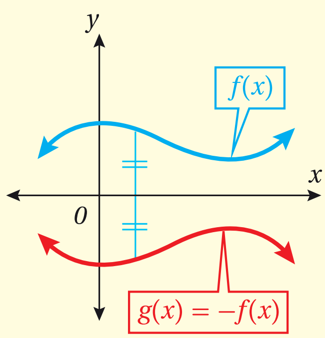
الانعكاس

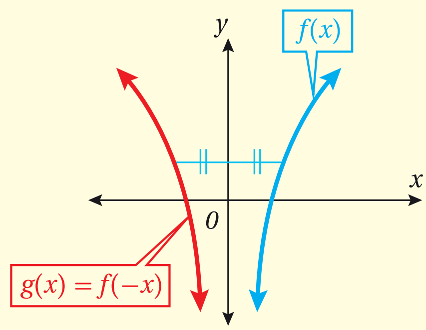
الانعكاس (reflection) هو تحويل هندسي يعكس منحنى الاقتران حول مستقيم محدّد.

مفهوم أساسي

الانعكاس

- منحنى $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x.
- منحنى $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.



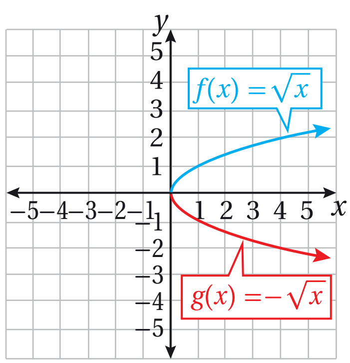


مثال 3

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

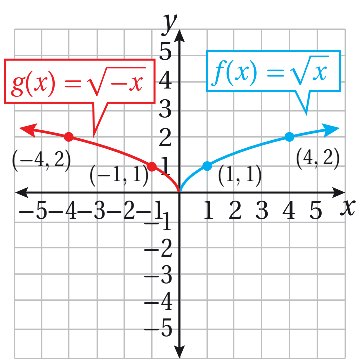
1 $g(x) = -\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = -\sqrt{x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(x, -y)$ على منحنى g.



2 $g(x) = \sqrt{-x}$

منحنى $g(x) = \sqrt{-x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(-x, y)$ على منحنى g.



أتعلّم

عند إجراء تحويل الانعكاس يكون الإحداثي y لكل نقطة على منحنى $g(x) = -f(x)$ هو معكوس الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$، ومن جهة أخرى تكون قيمة $g(x) = f(-x)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $-x$

أتعلّم

مجال الاقتران $g(x) = \sqrt{-x}$ هو الفترة $(-\infty, 0]$.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = -|x|$

b) $g(x) = |-x|$

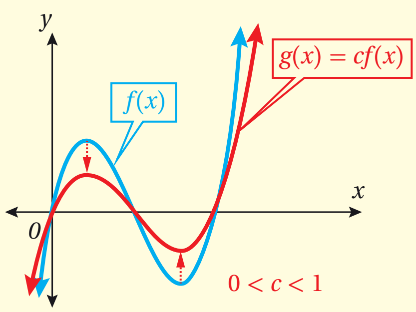
التمدّد الرأسي

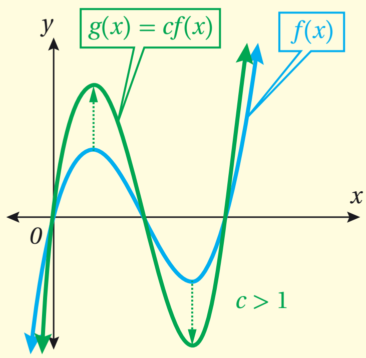
التمدّد الرأسي (vertical dilation) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه رأسيًّا.

مفهوم أساسي — التمدّد الرأسي

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنّ منحنى $g(x) = cf(x)$ هو:

- توسيع رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$
- تضييق رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$





أتعلّم

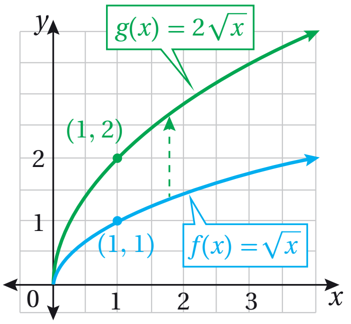
الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = cf(x)$، ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في c.

مثال 4

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

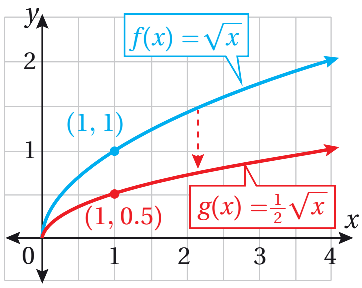
1 $g(x) = 2\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = 2\sqrt{x}$ هو توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

2 $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



منحنى $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في $f(x)$ في $\frac{1}{2}$

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

التمدّد الأُفقي

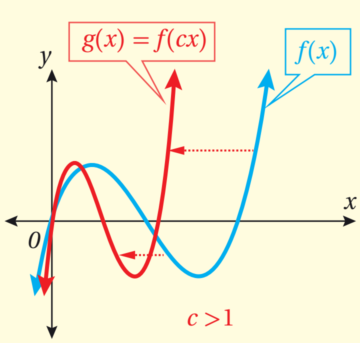
التمدّد الأُفقي (horizontal dilation) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه أفقيًّا.

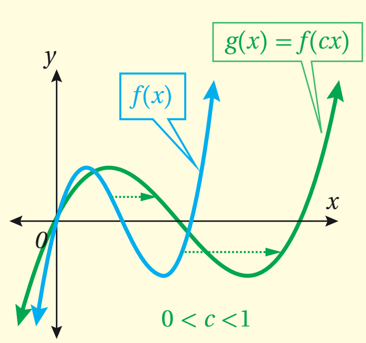
مفهوم أساسي

التمدّد الأُفقي

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ منحنى $g(x) = f(cx)$ هو:

- تضييق أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.
- توسيع أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.





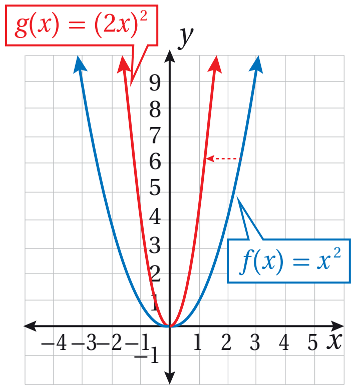
أتعلّم

الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(cx)$، ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{c}$.

مثال 5

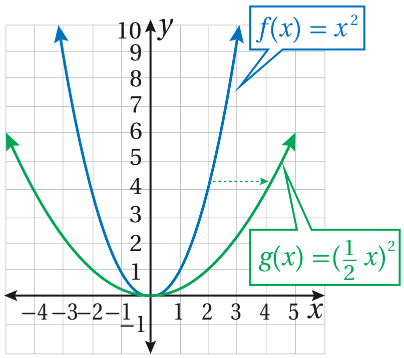
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = (2x)^2$



منحنى $g(x) = (2x)^2$ هو تضييق أُفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{2}$

2 $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$



منحنى $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$ هو توسيع أُفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = (3x)^2$

b) $g(x) = (\frac{1}{3}x)^2$

سلسلة التحويلات الهندسية

يُمكن تمثيل منحنى اقتران ناتج عن تطبيق أكثر من تحويل هندسي على الاقتران الرئيس؛ بتطبيق التحويلات على الاقتران الرئيس بالترتيب الآتي:

1 الانعكاس ← 2 التمدّد ← 3 الانسحاب

مثال 6

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=\sqrt{x}$، لتمثيل منحنى $g(x)=\sqrt{1-x}+2$ بيانيًّا.

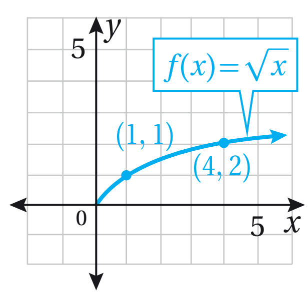
بما أنّ الانسحاب الأُفقي إلى اليمين يُكتب على صورة $x-c$، أبدأ بإعادة كتابة الاقتران g على الصورة الآتية:

$$g(x)=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$$

يُمكنني الآن تمثيل منحنى الاقتران باتّباع الخطوات الآتية:

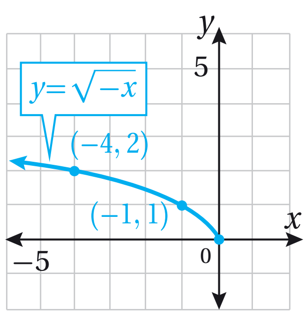
الخطوة 1:

أُمثّل منحنى $f(x)=\sqrt{x}$



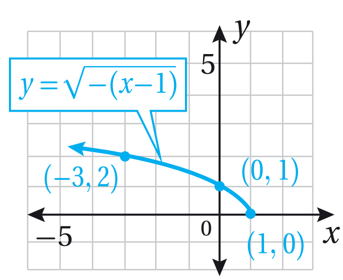
الخطوة 2:

أُمثّل منحنى $y=\sqrt{-x}$ بإجراء انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.



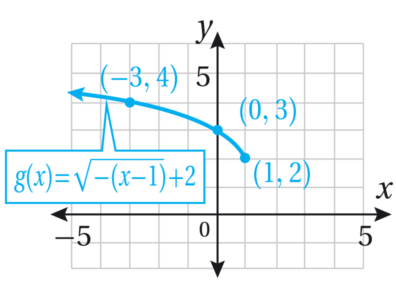
الخطوة 3:

أُمثّل منحنى $y=\sqrt{-(x-1)}$ بإجراء انسحاب لمنحنى $y=\sqrt{-x}$ وحدة واحدة إلى اليمين.



الخطوة 4:

أمثّل منحنى $y=\sqrt{-(x-1)}+2$ بإجراء انسحاب لمنحنى $y=\sqrt{-(x-1)}$ وحدتان إلى الأعلى.



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=x^2$ لتمثيل منحنى $g(x)=-(x-2)^2+3$ بيانيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1) $g(x) = x^2 - 6$

2) $q(x) = -(x-1)^2$

3) $s(x) = 3x^2 + 4$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

4) $g(x) = \sqrt{x-3}$

5) $h(x) = \sqrt{x-2} + 5$

6) $p(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+2}$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

7) $g(x) = |x| + 5$

8) $h(x) = |x+4| - 2$

9) $q(x) = |x-3| - 2$

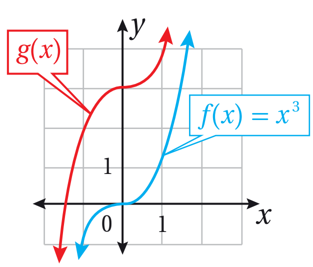
10) $r(x) = -2|x| + 1$

11) $s(x) = |\frac{1}{2}x + 1|$

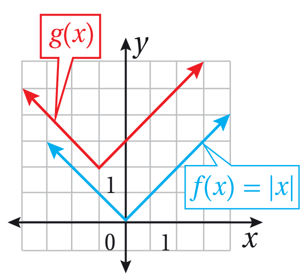
12) $p(x) = \frac{1}{4}|x|$

إذا كان منحنى الاقتران $g(x)$ ناتج عن تحويل هندســي أو أكثر لمنحنى الاقتران $f(x)$؛ فأجد قاعدة الاقتران $g(x)$ في كلّ ممّا يأتي:

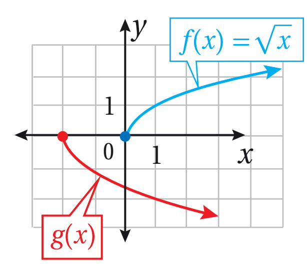
13)



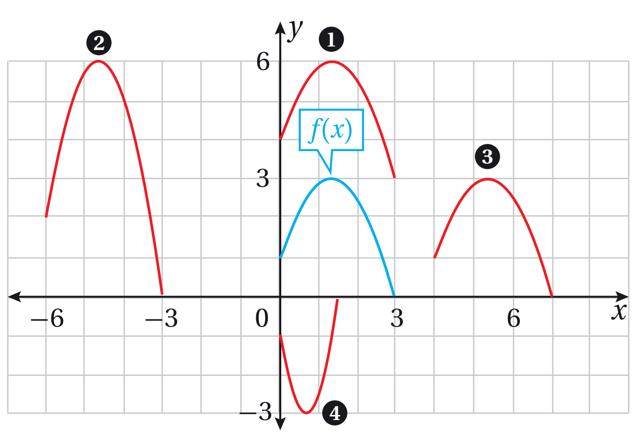
14)



15)



16) يُبيّــن التمثيــل البياني المجاور منحنــى الاقتران $f(x)$ (باللــون الأزرق). أُحـدّد رقم منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي:



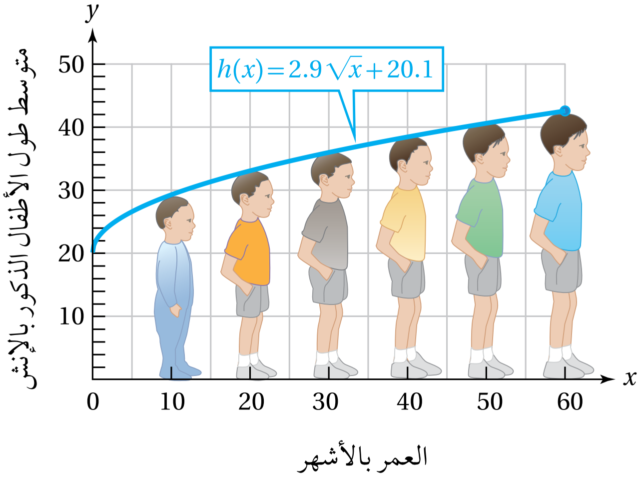
a) $g(x) = f(x-4)$

b) $h(x) = f(x) + 3$

c) $g(x) = 2f(x+6)$

d) $h(x) = -f(2x)$

يُمثّل الاقتران $h(x) = 2.9\sqrt{x} + 20.1$ متوسّط طول الأطفال الذكور بالإنش، حيث x العمر بالأشهر.



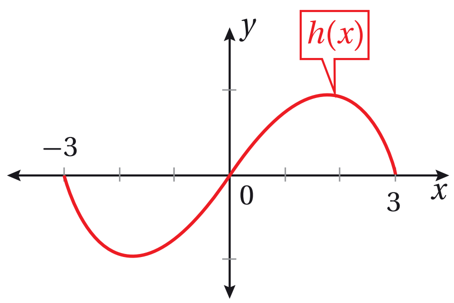
17 أصف التحويلات التي طُبّقت على الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على $h(x)$.

18 أجد متوسّط طول الأطفال الذكور بعمر 5 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

19 ماذا يُمثّل الثابت 20.1 في الاقتران $h(x)$ بالنسبة إلى متوسّط أطوال الأطفال الذكور؟

20 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا



تبرير: أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $h(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأبرّر إجابتي:

22 $g(x) = h(\frac{1}{3}x)$

21 $f(x) = h(3x)$

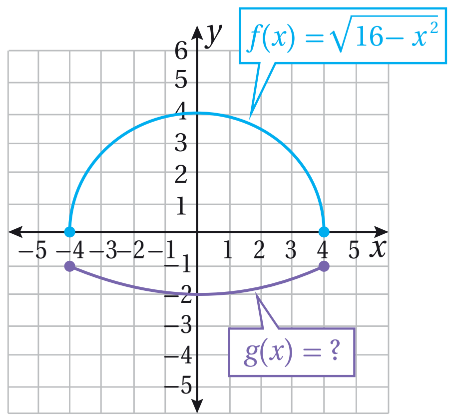
تبرير: أفترضُ أنّ (a, b) نقطة على منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدّد النقطة المقابلة لها على منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

25 $p(x) = f(3-x)$

24 $g(x) = 2f(x)$

23 $h(x) = f(-x)$

26 **تحدّ:** في الشكل المجاور إذا كان منحنى الاقتران $g(x)$ ناتج عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران $f(x)$؛ فأجد قاعدة الاقتران $g(x)$.



الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

فكرة الدرس

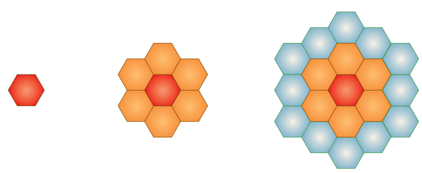
- تعرُّف المتتالية المنتهية وغير المنتهية، والمتسلسلة المنتهية وغير المنتهية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة المنتهية.
- تعرُّف المتتالية الحسابية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

المصطلحات

المتتالية المنتهية، المتتالية غير المنتهية، المتسلسلة، المتتالية الحسابية، أساس المتتالية الحسابية، المتسلسلة الحسابية، المجموع الجزئي.

مسألة اليوم

يصنع النحل قرص العسل ببناء الخلية الأولى على شكل سداسي منتظم، ثم إحاطتها بحلقات من الخلايا المُطابِقة للخلية الأولى كما في الشكل المجاور.



1 2 3

ما عدد الخلايا في قرص العسل بعد بناء النحل الحلقة العاشرة؟

المتتاليات، والمتسلسلات، ورمز المجموع

تعلَّمْتُ سابقًا مفهوم المتتالية، وأنَّ كل عدد فيها يُسمّى حدًّا.

تكـون **المتتاليــة منتهيــة** (finite sequence) إذا حوت عددًا منتهيًا مــن الحدود، وتكون **المتتالية غير منتهية** (infinite sequence) إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

متتالية غير منتهية	متتالية منتهية
5, 10, 15, 20, 25 , …	5, 10, 15, 20, 25

المتتاليات بوصفها اقترانات

مفهوم أساسي

بالكلمات: المتتالية اقتــران مجاله مجموعــة الأعداد الصحيحــة الموجبة، أو مجموعة جزئيــة منها، ومداه مجموعة جزئية مــن مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث يرتبط كل عدد صحيــح في المجال بعدد حقيقي في المدى، هو أحد حدود المتتالية.

بالرموز:

المجال:	n	…	4	3	2	1 ترتيب الحدِّ
	↓		↓	↓	↓	↓
المدى:	a_n	…	a_4	a_3	a_2	a_1 الحدُّ

حيث: a_1: الحدُّ الأول للمتتالية، و a_2: الحدُّ الثاني للمتتالية، و a_n: الحدُّ العام للمتتالية.

أتذكَّر

الحدُّ العام هو علاقة جبرية تربط كل حدٍّ في المتتالية برتبته. ويُمكِن اســتعمال الحدِّ العام لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ فــي المتتالية، وذلك بتعويض رتبــة ذلك الحدِّ في الحدِّ العام.

مثال 1

أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1 $a_n = \frac{n}{n+1}$

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad n = 1$

$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ $\quad n = 2$

$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ $\quad n = 3$

$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$ $\quad n = 4$

2 $a_n = 3n(-1)^n$

$a_1 = 3(1)(-1)^1 = -3$ $\quad n = 1$

$a_2 = 3(2)(-1)^2 = 6$ $\quad n = 2$

$a_3 = 3(3)(-1)^3 = -9$ $\quad n = 3$

$a_4 = 3(4)(-1)^4 = 12$ $\quad n = 4$

3 $a_n = \begin{cases} n & , n \text{ عدد زوجي} \\ \frac{1}{n} & , n \text{ عدد فردي} \end{cases}$

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$ $\quad n = 1$

$a_2 = 2$ $\quad n = 2$

$a_3 = \frac{1}{3}$ $\quad n = 3$

$a_4 = 4$ $\quad n = 4$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

a) $a_n = \frac{n}{2n-1}$

b) $a_n = (-2n)^n$

c) $a_n = \begin{cases} 2n & , n \text{ عدد زوجي} \\ n^2 & , n \text{ عدد فردي} \end{cases}$

يُطلَق على مجموع حدود المتتالية اسم **المتسلسلة** (series)، ويُمكِن إيجاد هذا المجموع بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتالية بدلًا من الفواصل.

وكما هو حال المتتالية، فإنَّ المتسلسلة تكون منتهية، أو غير منتهية.

متسلسلة غير منتهية	متسلسلة منتهية
$1+2+3+4+5+\dots$	$1+2+3+4+5$

يُمكِن التعبير عن المتسلسلة بطريقة مختصرة باستعمال رمز المجموع (Σ) (يُقرَأ: سيغما) على النحو الآتي:

آخر قِيَم k

الحدُّ العام للمتتالية

أول قِيَم k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المتسلسلتين السابقتين باستعمال رمز المجموع Σ كما يأتي:

$$1+2+3+\dots=\sum_{k=1}^{\infty} k \qquad 1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5} k$$

لغة الرياضيات

يُقرَأ $\sum_{k=1}^{5} k$: مجموع (k) من $(k=1)$ إلى $(k=5)$.

مثال 2

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

1 $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{68}$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $\sqrt{2+1}$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $\sqrt{2+2}$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $\sqrt{2+3}$، وأنَّ الحدَّ الأخير يساوي $\sqrt{2+66}$

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي: $a_k=\sqrt{2+k}$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{66} \sqrt{2+k}$$

2 $5+10+15+\dots$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $5(1)$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $5(2)$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $5(3)$.

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي: $a_k = 5k$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5k$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

a) $7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 25$

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$

إيجاد مجموع المتسلسلة

يُمكِن إيجاد **مجموع المتسلسلة** المنتهية بجمع حدودها، أما إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، فإنَّني أستعمل الحدَّ العام لإيجاد حدودها، ثم أجمعها.

مثال 3

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{4} k^2$

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4$ في الحدِّ العام للمتسلسلة، وهو $a_k = k^2$:

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$ حدود المتسلسلة

$$= 1 + 4 + 9 + 16$$ بإيجاد مربع كل عدد

$$= 30$$ بالجمع

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{7} \frac{5k-2}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2$

حالات خاصة من المتسلسلات

في ما يأتي بعض خصائص رمز المجموع.

مفهوم أساسي — خصائص رمز المجموع

إذا كان a_k و b_k الحدَّين العامين لمتتاليتين، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$

خطأ شائع

أتجنَّب الخطأ الشائع الآتي:

$$\xcancel{\sum_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

إذا كان في المتسلسلة عدد كبير من الحدود، فإنَّ إيجاد مجموعها لن يكون سهلًا. ولكنْ توجد قواعد يُمكِن استعمالها لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات الخاصة على نحوٍ سهل كما يأتي.

مفهوم أساسي — صيغ لمجموع متسلسلات خاصة

1) $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$ مجموع الحدِّ الثابت (c) إلى نفسه (n) من المرّات.

2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

مثال 4

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $\sum_{k=1}^{20} 2k$

$\sum_{k=1}^{20} 2k = 2 \left(\sum_{k=1}^{20} k \right)$ بإخراج الثابت خارج رمز المجموع

$= 2 \left(\frac{20(20+1)}{2} \right)$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (20)

$= 420$ بالتبسيط

2 $\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2)$

$$\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} 2$$ بتوزيع رمز المجموع على الجمع

$$= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 + 2(10)$$ مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (10)، ومجموع الحدِّ الثابت (2) إلى نفسه (10) مرّات

$$= 3045$$ بالتبسيط

3 $\sum_{k=1}^{25} (k^2 - 1)$

$$\sum_{k=1}^{25} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{25} k^2 - \sum_{k=1}^{25} 1$$ بتوزيع رمز المجموع على الطرح

$$= \left(\frac{25(25+1)(2(25)+1)}{6}\right) - 1(25)$$ مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (25)، ومجموع الحدِّ الثابت (1) إلى نفسه (25) مرَّة

$$= 5500$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{10} 3k^2$

b) $\sum_{k=1}^{20} (7k - 2)$

c) $\sum_{k=1}^{5} (-4k^3)$

المتتالية الحسابية

إذا كان الفرق بين كل حدَّين متتاليين في متتالية عددية يساوي قيمة ثابتة، فإنَّ هذه المتتالية تُسمّى **متتالية حسـابية** (arithmetic sequence)، ويُسمّى الفرق الثابت **أساس المتتالية الحسابية** (common difference)، ويُرمَز إليه بالرمز d. فمثلًا، المتتالية: ...,5, 10, 15, 20 حسابية؛ لأنَّ لحدودها فرقًا مشتركًا، بحيث يزيد كل حدٍّ على الحدِّ الذي يسبقه بمقدار 5

$$5 \;\underbrace{,\;\; 10}_{+5} \;\underbrace{,\;\; 15}_{+5} \;\underbrace{,\;\; 20}_{+5} , \dots$$

حدود متتالية حسابية ← $5, 10, 15, 20, \dots$

الأساس ← $+5 \quad +5 \quad +5$

مفهوم أساسي

المتتاليات الحسابية

بالكلمات: تكون المتتالية حســابية إذا كان الفرق بين كل حــدٍّ فيها والحدِّ الذي يسبقه يساوي قيمة ثابتة.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ حسابية إذا كان:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d$$

مثال 5

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1 $5, 9, 13, 17, \cdots$

أطرح كل حدَّين متتالين:

بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني $a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$

بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث $a_3 - a_2 = 13 - 9 = 4$

بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع $a_4 - a_3 = 17 - 13 = 4$

أُلاحِظ أنَّ الفرق ثابت، وأنَّه يساوي 4؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $d = 4$.

إذن، المتتالية: ... ,5, 9, 13, 17 حسابية.

أتعلَّم

يُمكِــن إيجــاد الحــدِّ الخامس للمتتالية بإضافة الأساس إلى الحدِّ الرابع كالآتي:

$$a_5 = a_4 + d$$
$$= 17 + 4 = 21$$

2 **23, 15, 9, 5, ...**

أطرح كل حدَّين متتالين:

$a_2 - a_1 = 15 - 23 = -8$ بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني

$a_3 - a_2 = 9 - 15 = -6$ بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث

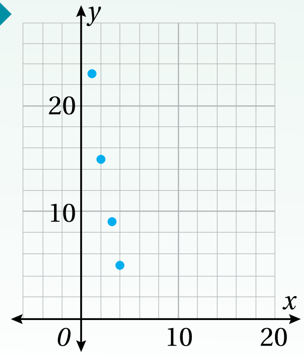
$a_4 - a_3 = 5 - 9 = -4$ بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع

أُلاحِظ أنَّ الفرق غير ثابت.

إذن، المتتالية: ...,23, 15, 9, 5 ليست حسابية.

الدعم البياني

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمتتالية: ... ,23, 15, 9, 5 أنَّ حدودها لا تقع على مستقيم واحد؛ ما يعني أنَّها ليست متتالية حسابية.



أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

a) 7, 4, 1, −2, …

b) 0, 6, 13, 19, …

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد كل حدٍّ من حدود المتتالية الحسابية بإضافة الأساس إلى الحدِّ الذي يسبقه، ويُمكِن استعمال هذه الخاصية لإيجاد الحدِّ العام للمتتالية الحسابية باستعمال حدِّها الأول a_1، وأساسها d كالآتي:

الحدُّ بدلالة a_1 و d	رمزه	الحدُّ
a_1	a_1	الحدُّ الأول
$a_1 + d$	a_2	الحدُّ الثاني
$a_1 + 2d$	a_3	الحدُّ الثالث
$a_1 + 3d$	a_4	الحدُّ الرابع
$a_1 + 4d$	a_5	الحدُّ الخامس
⋮	⋮	⋮
$a_1 + (n-1)d$	a_n	الحدُّ العام

مفهوم أساسي

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

الحدُّ العام للمتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d، يعطى بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث n عدد صحيح موجب.

أتعلَّم

يمكن أحيانًا إيجاد الحدِّ العام للمتتالية الحسابية ذهنيًّا من دون الحاجة إلى استعمال الصيغة المجاورة.

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن كتابة حدود المتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d كما يأتي:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d,\ \ldots.$$

مثال 6

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

1 $\mathbf{20, 13, 6, \ldots}$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 20$، والأساس $d = 13-20 = -7$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = a_1 + (n-1)\ d$	صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية
$= 20 + (n-1)(-7)$	بتعويض $a_1 = 20, d = -7$
$= -7n + 27$	بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = -7n + 27$

أتعلَّم

يمكن التحقق من صحة الحدِّ العام بتعويض رُتَبِ بعض حدود المتتالية الحسابية المعطاة في الحدِّ العام.

2 $\mathbf{a_7 = 27, a_{15} = 59}$

الخطوة 1: أستعمل صيغة الحدِّ العام: $a_n = a_1 + (n-1)d$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية
$27 = a_1 + (7-1)d$	بتعويض $a_7 = 27, n = 7$

بالتبسيط $27 = a_1 + 6d \quad ......(1)$

بتعويض $a_{15} = 59, n = 15$ $\quad 59 = a_1 + (15-1)d$

بالتبسيط $59 = a_1 + 14d \quad ......(2)$

الخطوة 2: أحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالحذف.

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) $\quad 32 = 8d$

بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 8 $\quad d = 4$

بتعويض قيمة d في المعادلة (1) $\quad 27 = a_1 + 6\times4 \quad ......(1)$

بحلِّ المعادلة $\quad a_1 = 3$

الخطوة 3: أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و d في صيغة الحدِّ العام للمتتالية.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية $\quad a_n = a_1 + (n-1)d$

بتعويض $a_1 = 3, d = 4$ $\quad a_n = 3 + (n-1)(4)$

بالتبسيط $\quad a_n = 4n-1$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 4n-1$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:

a) $1, -2, -5, ...$ b) $a_{10} = -11, d = 2$ c) $a_7 = 71, a_{16} = 26$

أتذكّر

يمكن أيضًا حلّ نظام المعادلات باستعمال التعويض.

أتعلَّم

ألاحظ أن أُسّ المتغير n في الحدِّ العام للمتتالية يساوي 1، إذن، فتمثيلها البياني خطي، ولذا فهي حسابية.

المتسلسلات الحسابية

تنتج **المتسلسلة الحسابية** (arithmetic series) من جمع حدود المتتالية الحسابية. ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة **مجموعًا جزئيًّا** (partial sum)، ويُرمَز إليه بالرمز S_n.

أتعلَّم

من المُلاحَظ أنَّ المجموع S_n يتكوَّن من الوسط الحسابي لكلٍّ من الحدِّ الأول والحدِّ الأخير مضروبًا في عدد الحدود التي يراد جمعها.

المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية

مفهوم أساسي

يُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا من حدود متتالية حسابية باستعمال إحدى الصيغتين الآتيتين:

1) $S_n = n\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)$

2) $S_n = \dfrac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

مثال 7

1 أجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية:

$$7 + 12 + 17 + 22 + \ldots$$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 7$، والأساس $d = 12-7 = 5$ في الصيغة الثانية للمجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n:

$S_n = \dfrac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ صيغة المجموع الجزئي

$S_{15} = \dfrac{15}{2}(2(7) + (15-1)(5))$ بتعويض $a_1 = 7, d = 5, n = 15$

$S_{15} = 630$ بالتبسيط

إذن، مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من هذه المتسلسلة الحسابية هو 630

أُفكِّر

لماذا يُفضَّل استعمال الصيغة الثانية من مجموع المتسلسلة الحسابية في الفرع 1 من المثال؟

2 أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $60 + 64 + 68 + 72 + \ldots + 120$

الخطوة 1: أجد عدد حدود المتتالية n.

أُعـوِّض قيمة كلٍّ من الحـدِّ الأول $a_1 = 60$، والأسـاس $d = 64-60 = 4$، والحدِّ الأخير $a_n = 120$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$$120 = 60 + (n-1)(4)$$ بتعويض $a_n = 120, a_1 = 60, d = 4$

$$60 = 4\,(n-1)$$ بطرح 60 من طرفي المعادلة

$$15 = n-1$$ بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$n = 16$$ بجمع 1 إلى طرفي المعادلة

الخطوة 2: أستعمل إحدى صيغتي المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n.

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$ صيغة المجموع الجزئي

$$S_{16} = (16)\left(\frac{60 + 120}{2}\right)$$ بتعويض $a_1 = 60, a_{16} = 120, n = 16$

$$= 1440$$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود المتسلسلة الحسابية المعطاة هو 1440

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مجموع الحدود السبعة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية: $8 + 5 + 2 + \ldots$

b) أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $7 + 15 + 23 + \ldots + 159$

أتعلَّم

لا يُمكِـن إيجاد مجموع حدود المتتالية الحسابية غير المنتهية.

معلومة

كارل غاوس عالم رياضيات ألماني، من أهم علماء القرن الثامن عشر، ويوصف بأنه (أعظم عالم رياضيات في العصور القديمة)، وقد برع في المتتاليات والمتسلسلات. أستخدم رمز الاستجابة السريعة الآتي لتعرُّف قصة العالم غاوس.

يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الحسابية في كثير من التطبيقات الحياتية والعملية.

مثال 8 : من الحياة

برمجة: في مسابقة عالمية للغات البرمجة، تُمنَح جائزة نقدية لأول 50 مركزًا، ويُمنَح الفائز بالمركز الأول جائزة نقدية قيمتها JD 5000، وتقل قيمة الجائزة بمقدار JD 100 لكل مركز بعد ذلك عن المركز الذي يسبقه:

1 أُبيِّن أنَّ قِيَم الجوائز النقدية في المسابقة تُمثِّل متتالية حسابية.

قِيَم الجوائز النقدية المتتالية هي: $5000, 4900, 4800, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الفرق بين كل حدَّين متتاليين في هذا النمط يساوي -100

إذن، تُمثِّل قِيَم الجوائز النقدية في هذه المسابقة متتالية حسابية أساسها: $d = -100$

2 أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$= 5000 + (n-1)(-100)$ بتعويض $a_1 = 5000, d = -100$

$= -100\,n + 5100$ بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = -100\,n + 5100$

3 ما قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة؟

قيمة الجائزة هي الحدُّ الخمسون (a_{50}):

$a_n = -100\,n + 5100$ الحدُّ العام للمتتالية

$a_{50} = -100\,(50) + 5100$ بتعويض $n = 50$

$= 100$ بالتبسيط

إذن، قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة هي JD 100.

معلومة

يستند علم البرمجة إلى علم الرياضيات بشكل أساسي؛ إذ تتضمّن البرمجة عادةً توظيف نماذج رياضية، مثل: تحديد الأنماط، واختبار القيم بطريقة مُنظَّمة.

4 ما مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة؟

لإيجاد مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة، أُعوِّض قيمة $a_1 = 5000$، وقيمة $a_{50} = 100$، وقيمة $n = 50$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$$S_{50} = (50)\left(\frac{5000 + 100}{2}\right)$$ بتعويض $a_1 = 5000, a_{50} = 100, n = 50$

$$= 127500$$ بالتبسيط

إذن، مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح لمَن يفوزون في هذه المسابقة هو JD 127500.

أتحقَّق من فهمي

اقتصاد: ضمن خطة إحدى المؤسسات الخيرية لزيادة التوعية بالأضرار الاقتصادية للتدخين على المستوى الأسري، أنفقت المؤسسة JD 300 في السنة الأولى على حملات التوعية، وخطّطت لزيادة إنفاقها السنوي على هذه الحملات بنحو JD 400 سنويًّا على مدار 10 أعوام:

a) أُبيِّن أنَّ إنفاق الجمعية السنوي يُمثِّل متتالية حسابية.

b) أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

c) ما قيمة المبلغ الذي سوف تُنفِقه المؤسسة في آخر عام من الخطة؟

d) أجد مجموع ما سوف تُنفِقه المؤسسة في 10 أعوام.

معلومة

للتدخين أضرار اقتصادية كبيرة جدًّا على الصعيد الفردي والأسري والوطني؛ ما يتطلب تضافر الجهود من أجل التوعية بتلك الأضرار.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1 $a_n = n^3 - n$

2 $a_n = 9 - 3^n$

3 $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

4 $1 + 4 + 9 + \ldots + 100$

5 $2 + 4 + 6 + \ldots + 20$

6 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{13}{14}$

7 $-\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + \frac{64}{729}$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

8) $\sum_{n=1}^{6} (-2)^n$

9) $\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2+1}{n+1}$

10) $\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3^n+1}$

11) $\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{2}$

12) $\sum_{k=1}^{9} (12k-24)$

13) $\sum_{k=1}^{20} (k^3-1)$

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

14) $10, 11, 14, 15, 18, 19, \ldots$

15) $12, 6, 0, -6, -12, \ldots.$

16) $3, 5, 9, 15, 23, \ldots$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الثلاثين منها:

17) $25, 58, 91, 124, \ldots$

18) $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \ldots.$

19) $a_{17} = -5, d = -\frac{1}{2}$

20) $a_5 = 58, a_{12} = 30$

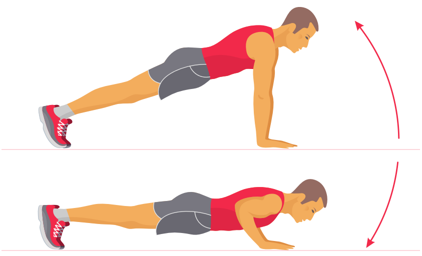
أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

21) $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

22) $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

23) $\sum_{n=1}^{80} (2n-2)$

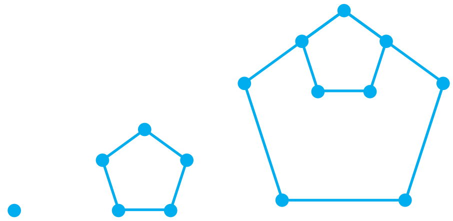
24) رياضة: يمارس هيثم تمارين الضغط بانتظام، وقد اســتطاع أداء 25 ضغطة بصورة مستمرة في الأسبوع الأول، ثم تمكَّن من زيادة عددها أســبوعيًّا بمقدار 5 ضغطات على نحوٍ مســتمر. ما عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها بشكل مستمر في الأسبوع السادس عشر؟



25) متسلسلة حسابية منتهية، حدُّها الأول 10، وأساسها 4، ومجموع حدودها 792، ما عدد حدود هذه المتسلسلة؟

26) إذا كان مجموع أول n حدًّا من حدود متسلسلة حسابية هو $n^2 + 4n$، فأجد حدَّها المئة.

يُبيِّن الشكل المجاور نمطًا هندسيًّا يُمثِّل عدد النقاط في نماذجه متتالية:



27 أُبيِّن أنَّ عدد النقاط في النماذج يُمثِّل متتالية حسابية.

28 أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

29 هل يوجد نموذج يحوي 397 نقطة؟ أُبرِّر إجابتي.

متسلسلة حسابية، حدُّها الأول a، وأساسها d، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى يساوي ضعف مجموع حدودها العشرين الأولى:

30 أُثبِت أنَّ $a = \frac{11d}{2}$.

31 إذا كان مجموع الحدود الثلاثين الأولى هو 400، فأجد قيمتي a و d.

32 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

33 **تبرير:** هل للمتسلسلتين: $9 + 7 + 5 + 3 + 1$ و $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ المجموع نفسه؟ هل يُمكِن التعبير عنهما بالطريقة نفسها باستعمال رمز المجموع؟ أُبرِّر إجابتي.

34 **أكتشف الخطأ:** أوجدت ولاء مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5} (2k + 7)$ على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{5}(2k+7) = 2(1+2+3+4+5)+7$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ ولاء، ثم أُصحِّحه.

35 **تحدٍّ:** إذا كانت $3,\ a - b,\ 3a - 4b,\ 2a + 2b$ تُمثِّل الحدود الأربعة الأولى من متسلسلة حسابية، حيث a و b ثابتان، فأجد مجموع أول 25 حدًّا من المتسلسلة.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+2 & , x<3 \\ -2x^2+5x+7 & , x\geq 3 \end{cases}$ ،

فما قيمة $f(-2)$؟

a) -18 b) -11

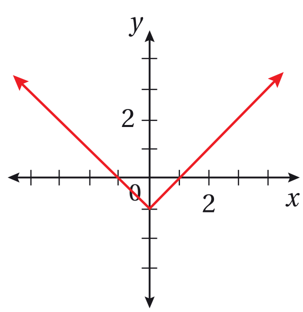
c) 11 d) 22

2 ما التحويل الذي يجري علــى منحنى $f(x)$ للحصول على منحنى الاقتران $g(x)=2f(x)$؟

a) تضييق أُفقي. b) توسيع رأسي.

c) انسحاب رأسي. d) انسحاب أُفقي.

3 أيّ الاقترانــات الآتيــة يُمثّــل قاعــدة المنحنى المجاور؟



a) $g(x)=|x+1|$ b) $g(x)=|x-1|$

c) $g(x)=|x|-1$ d) $g(x)=-|x|$

4 أيّ الاقترانــات الآتيــة ناتــج عن انســحاب الاقتران الرئيس $f(x)=x^3$ إلى الأعلى 4 وحدات وإلى اليمين 5 وحدات؟

a) $g(x)=(x+5)^3-4$

b) $g(x)=(x-5)^3-4$

c) $g(x)=(x+5)^3+4$

d) $g(x)=(x-5)^3+4$

5 مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{6} k^2$ هو:

a) 36 b) 55

c) 91 d) 273

6 إحدى صيغ المجموع أدناه تُعبِّر عن المتسلسلة الآتية:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$$

a) $\sum_{k=1}^{4}\frac{k}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2^k}$

c) $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2k}$ d) $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k+2}$

7 الحدُّ العام لمتتالية حســابية، حدُّهــا الثامن (-13)، وأساسها (-8)، هو:

a) $a_n=51+8n$

b) $a_n=35+8n$

c) $a_n=51-8n$

d) $a_n=35-8n$

8 المتتالية الحسابية ممّا يأتي هي:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

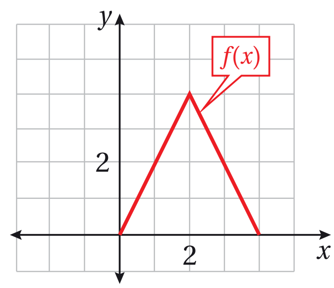
d) $2, 4, 7, 11, \ldots$

أُمثّل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًّا:

9 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 0 \\ -1 & , 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 4 & , x > 3 \end{cases}$

10 $f(x) = |3x - 12| + 2$

أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية:



11 $h(x) = f(x-2)$

12 $g(x) = -f(x) + 3$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

13 $g(x) = (x-3)^3 + 2$

14 $h(x) = \frac{1}{4}x^3$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

15 $\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 1)$

16 $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^k$

17 $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$

18 $\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العشرين منها:

19 $200, 191, 182, 173, \ldots$

20 $215, 192, 169, 146, \ldots$

21 $a_5 = 41, a_{10} = 96$

22 $a_{10} = 7, d = -2$

أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

23 $7 + 1 - 5 - 11 - \ldots - 299$

24 $-10 - 9.9 - 9.8 - \ldots - 0.1$

25 $\sum_{k=1}^{20} (88 - 3k)$

26 أجد مجموع الحدود الاثني عشر الأولى من المتسلسلة:

$$120 + 111 + 102 + 93 + \ldots$$

27 متتالية حسابية، حدُّها الأول 20، وحدُّها الثاني 24، ومجموع أول k حدًّا من حدودها 504، أجد قيمة k.

28 أراد أحمد توفير جزء من راتبه، فوفَّر في الشهر الأول 50 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثاني 55 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثالث 60 دينارًا. ما مجموع المبالغ التي سيُوفِّرها أحمد إذا استمر على هذا النمط مدَّة عامين؟

الوحدة
2

النهايات والمشتقّات
Limits and Derivatives

ما أهمّية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق في كثير من التطبيقات الحياتية، ومن ذلك؛ إيجاد معدّلات التغيّر بالنسبة إلى الزمن، مثل السرعة والتكاثر والتغيّر في درجات الحرارة، إضافة إلى أهمّيته في تحديد النقطة العظمى أو الصغرى، في كثير من المواقف، مثل تحديد أعلى ربح وأقل تكلفة.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تبسيط المقادير الجبرية النسبية.
- ✓ تمثيل الاقترانات المتشعّبة والاقترانات النسبية وكثيرات الحدود بيانيًّا.
- ✓ إيجاد المشتقّة الأولى لكثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والصغرى.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا، والبحث في اتّصاله عند نقطة.
- ◄ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.
- ◄ استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة تركيب اقترانين.
- ◄ حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (21–33) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

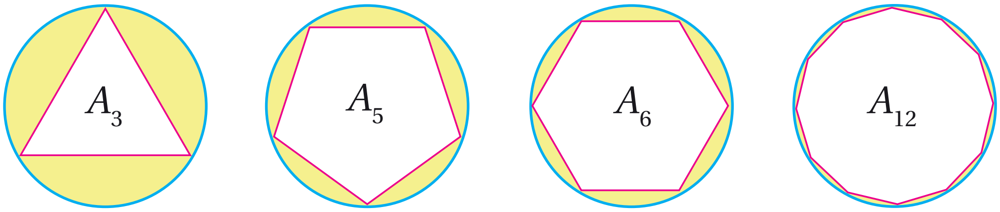
النهايات والاتّصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس

- إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المحدّدة، الاقتران المتصل.

مسألة اليوم بالنظر إلى الأشكال أدناه، كم تصبح مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمضلع المنتظم (A_n)، عندما تزداد قيمة n زيادة كبيرة جدًّا؟

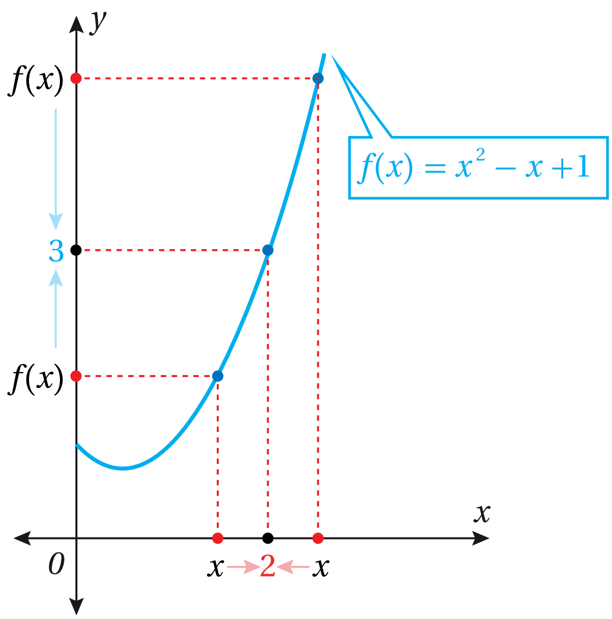


إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا

تعلّمتُ سابقًا كثيرًا من خواصّ الاقترانات، مثل المجال والمدى والتزايد والتناقص، وذلك عن طريق تحليل تمثيلاتها البيانية أو دراسة جدول قِيَم يُمثّل الاقتران، وسأتعلّم في هذا الدرس تحليل سلوك اقتران معطى، وتحديد إذا كانت قِيَم الاقتران (المخرجات) تقترب أكثر فأكثر من عدد ما.

عندما تقترب قيم x (المدخلات) أكثر فأكثر من عدد محدّد مثل (c)، عندها يُسمّى العدد الذي تقترب منه قيم الاقتران **النهاية** (limit)، فمثلًا: إذا كان $f(x) = x^2 - x + 1$ واخترت قِيَمًا للمتغيّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، عندها سألاحظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني الآتي لمنحنى $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $f(x)$ تقترب من العدد (3)، وكلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم الاقتران تقترب من العدد (3)، عندها يُمكنني القول: إنّ نهاية $(x^2 - x + 1)$ هي 3 عندما تقترب x من العدد 2 من جهتَي اليمين واليسار، وتُكتب على الصورة:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$$



2

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار		جهة اليمين

النهاية عند نقطة

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت قيمة الاقتران $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c؛ فإنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

وتُقرأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

لغة الرياضيات

تُقرأ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ أيضًا على الصورة: يقترب $f(x)$ من L عندما تقترب x من c.

عند كتابة $\lim\limits_{x \to c} f(x)$، فهذا يُشير إلى أنّ x تقترب من c من جهتَي اليمين واليسار، وإذا أردت تحديد الجهة التي تقترب منها قِيَم x من القيمة c، فإنّني أستعمل التعبيرين الآتيين:

- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث $x < c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار.
- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث $x > c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين.

وتكون نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة؛ إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

النهاية من الجهتين

مفهوم أساسي

بالكلمات: تكــون النهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

مثال 1

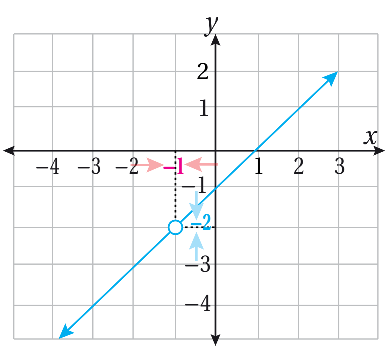
1 إذا كان $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$؛ فأجد $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ بيانيًّا وعدديًّا.

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.

إنّ مجــال الاقتــران $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ هــو مجموعة الأعــداد الحقيقية (R) مــا عدا -1 أو $(R - \{-1\})$، وبما أنّ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x + 1} = x - 1$$

فإنّ التمثيل البياني لـ $f(x)$ هو نفســه التمثيل البياني للمســتقيم $y = x - 1$ مع دائــرة صغيرة غير مظلّلة عند $x = -1$ كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني لـ $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (-1) من الجهتين، فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2) من الجهتين، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشــئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد -1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

$\rightarrow -1 \leftarrow$

x	-1.1	-1.01	-1.001		-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9

$\rightarrow -2 \leftarrow$

جهة اليسار — جهة اليمين

لغة الرياضيات

(إذا وفقــط إذا) تعني أن صحة أي مــن العبارتين مرتبطــة بصحــة العبارة الأخرى، فإمّــا أن تكون كلا العبارتين صحيحتين، أو تكــون كلاهمــا غير صحيحتين.

أُفكّر

لمــاذا مجــال $f(x)$ هو مجموعــة الأعــداد الحقيقية ما عدا -1؟

إرشاد

أُلاحظ أنّ الاقتران $f(x)$ غير معرّف عند $x = -1$، إلّا أنّ النهايــة موجــودة عندما $x \to -1$

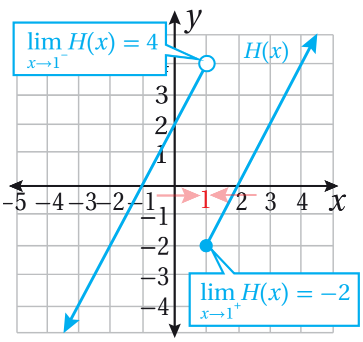
أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (-1) من الجهتين؛ فإنّ قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

أُلاحظ ممّا سبق، أنّ قيمة النهاية متساوية في كلا الطريقتين.

2 إذا كان $H(x)=\begin{cases} 2x+2 & ,x<1 \\ 2x-4 & ,x\geq 1 \end{cases}$، فأجد $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.



إنّ الاقتران $H(x)$ متشعّب، وتمثيله البياني كما يظهر في الشكل المجاور. أُلاحظ من التمثيل البياني أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1^-} H(x) = 4$$

ولكن، كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1^+} H(x) = -2$$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ غير موجودة.

إرشاد

أُلاحظ أنّ $H(1) = -2$، ما يعني أنّ الاقتران معرّف عند $x = 1$، ولكن النهاية عندما تقترب x من العدد (1) غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها باستعمال الآلة الحاسبة.

→ 1 ←

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		−1.998	−1.98	−1.8

جهة اليسار → 4   −2 ← جهة اليمين

أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وأنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين، فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (-2)، وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ غير موجودة.

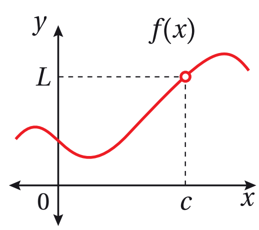
أتحقّق من فهمي

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

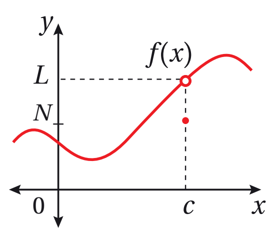
b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ ,\ f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$

أُلاحظ من المثال السابق، أنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c لا علاقة لها بقيمة $f(c)$، فمثلًا $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ في الحالات الثلاث الآتية:



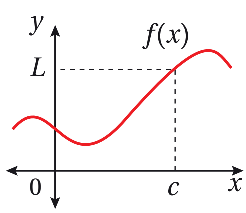
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرّفة



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = N$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

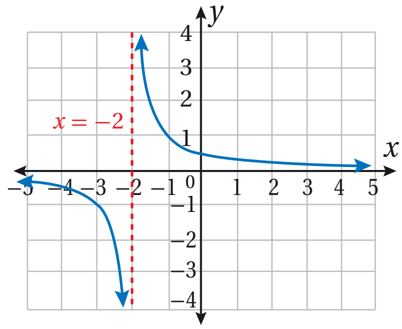
$f(c) = L$

أتعلّم

الرمزان ∞، $-\infty$ ليسا عددين حقيقيّين، ولكنّهما يصفان سلوك الاقترانات عند خطوط التقارب الرأسية؛ لذا، لا تنطبق عليهما القواعد الجبرية مثل الجمع والطرح والمقارنة، فمثلًا: $\infty - \infty \neq 0$؛ لأنّ (المالانهاية) لا تقف عند قيمة ما.

نهايات تتضمن (المالانهاية)

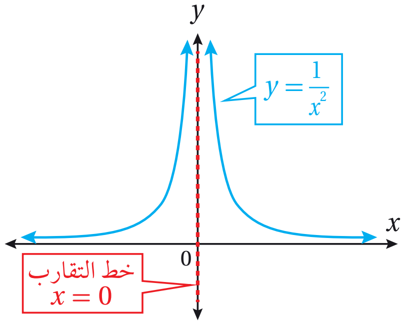
في بعض الأحيان، تكون النهاية من اليمين أو اليسار (أو كليهما) غير موجودة عند قيمة ما؛ لأنّ الاقتران يزداد أو ينقص بصورة غير محدودة قرب تلك القيمة. وفي هذه الحالة، نصف سلوك الاقتران بأنّه يقترب من (المالانهاية) الموجبة (∞) أو السالبة ($-\infty$).



مثال 2

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$



أُلاحظ مــن التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x^2}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليســار، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهــذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليســار غير موجودة. أُلاحظ أيضًا أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليمين غير موجودة.

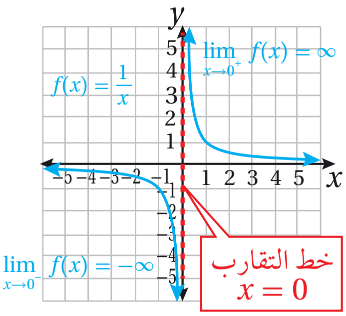
على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

وبما أنّــه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من الجهتين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، فإنه يمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$



أُلاحظ من التمثيل البيانــي للاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليسار، قلّت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليســار غيــر موجودة. على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من الصفر من جهة اليســار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أتذكّر

تعلّمتُ سابقًا أنّ الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ مــن أبســط الاقترانــات النســبية، ويُسمّى اقتران المقلوب.

ألاحظ أيضًا أنّــه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين، ازدادت قِيَم $f(x)$ المقابلة لها بصورة غير محدودة، وهذا يعنــي أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليمين غيــر موجودة. على الرغــم من أنّ النهاية عندما تقترب x من العــدد (0) من جهة اليمين غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

وبما أنّ النهاية من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إذن: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة.

أفكّر

لماذا لم نســتطع وصف سلوك الاقتران باستعمال النهايــة في الفــرع 2 من المثــال 2، كمــا جــرى وصفه في الفرع 1؟

أتحقّق من فهمي

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2}$

إيجاد النهايات جبريًّا

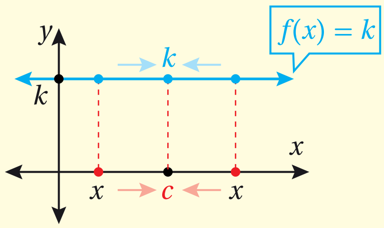
تعلّمتُ في الأمثلة الســابقة كيفية إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا، وســأتعلّم الآن طرائق جبرية لإيجاد النهايات.

مفهوم أساسي **نهايات الاقترانات**

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهايــة الاقتــران الثابــت عند أيّ نقطــة c هي القيمــة الثابتة للاقتران.

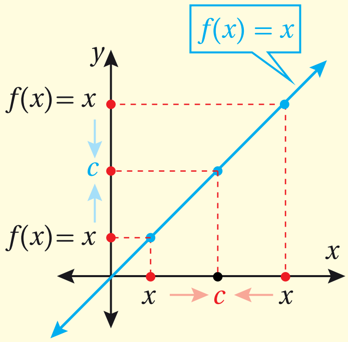
بالرموز: $\lim_{x\to c} k = k$



نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهاية الاقتــران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c.

بالرموز: $\lim_{x\to c} x = c$



وتُعدّ الخصائص الآتية أدوات أساسية لإيجاد النهايات جبريًّا:

خصائص النهايات

مفهوم أساسي

إذا كان k, c عددين حقيقيّين، و n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين؛ فإنّ كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصّية المجموع: $1)\ \lim_{x\to c} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

خاصّية الفرق: $2)\ \lim_{x\to c} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

خاصّية الضرب في ثابت: $3)\ \lim_{x\to c} (k\,f(x)) = k\lim_{x\to c} f(x)$

خاصّية الضرب: $4)\ \lim_{x\to c} (f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$

خاصّية القسمة: $5)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)},\ \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصّية القوّة: $6)\ \lim_{x\to c} (f(x))^n = (\lim_{x\to c} f(x))^n$

خاصّية الجذر النوني: $7)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$

شريطة أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ عندما يكون n عددًا زوجيًّا.

مثال 3

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim_{x\to -1} (x^3 - 4x + 6)$

$$\lim_{x\to -1} (x^3 - 4x+6) = \lim_{x\to -1} x^3 - \lim_{x\to -1} 4x + \lim_{x\to -1} 6$$ خاصّيتا المجموع والفرق

$$= (\lim_{x\to -1} x)^3 - 4\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 6$$ خاصّيتا القوة والضرب في ثابت

$$= (-1)^3 - 4(-1) + 6$$ نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= 9$$ بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x-1}}$$ خاصّية الجذر النوني

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 5} x^2}{\lim\limits_{x \to 5} (x-1)}}$$ خاصّية القسمة

$$= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x \to 5} x)^2}{\lim\limits_{x \to 5} x - \lim\limits_{x \to 5} 1}}$$ خاصّية القوّة والفرق

$$= \sqrt{\frac{(5)^2}{5-1}}$$ نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= \frac{5}{2}$$ بالتبسيط

أتذكّر

في الفرع 2 من المثال، يجب التحقّق أنّ $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ؛ لأنّ دليل الجذر عدد زوجي.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 3x^2}}{3x - 2}$

في المثال الســـابق، أُلاحظ أنّ نهاية كلّ اقتران عندما تقترب x من c تساوي $f(c)$؛ لذا، أستنتج أنّه يُمكـــن إيجاد هذه النهايـــات **بالتعويض المباشـــر**، ولكن هذا لا ينطبق علـــى الاقترانات جميعها، إلّا أنّه ينطبق على اقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النســـبية ما دامت قيمة مقام الاقتران النسبي عند c لا تساوي صفرًا.

مفهوم أساسي — النهايات بالتعويض المباشر

نهايات كثيرات الحدود

إذا كان $f(x)$ كثير حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا؛ فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

نهايات الاقترانات النسبية

إذا كان $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, \ q(c) \neq 0$$

مثال 4

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

1 $\lim\limits_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$

بما أنّها نهاية كثير حدود، إذن: يُمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = (2)^4 - 5(2)^3 + (2)^2 - 7$$ بالتعويض المباشر

$$= -27$$ بالتبسيط

2 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

بما أنّ $x = -1$ تقع في مجال الاقتران النسبي (ليست صفر مقام)، إذن: يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= -\frac{4}{3}$$ بالتبسيط

3 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

بما أنّ $x = -3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (المقام يساوي صفرًا عندها)،

إذن: لا يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

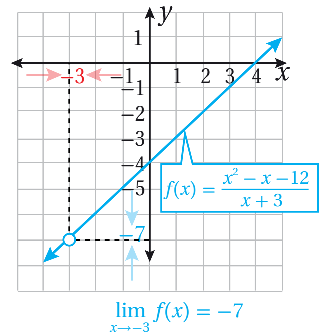
a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 + 4x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x - 6}{x^2 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

إنّ ناتج التعويض المباشـــر في الفرع 3 من المثال الســـابق ($\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$) يُعطي الناتج $\frac{0}{0}$ ، وتُســـمّى هذه النتيجة **الصيغة غير المحـــددة** (indeterminate form)، ولكنّ هذا لا يعني أنّ النهاية غير موجودة، فالتمثيل البياني المجاور للاقتران $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$ يُظهر أنّ النهاية موجودة عند $x = -3$ وتساوي -7



نحتاج في مثل هذه الحالة (ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$) إلى البحث عن صيغة مكافئة للاقتران، عن طريق تبسيطه جبريًّا؛ وذلك بتحليل كلّ من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة، أو إنطاق البسط أو المقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 5

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ، أُحلّل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{x+3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x\to -3} (x-4)$$ بالتبسيط

$$= -3 - 4 = -7$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ، أُنْطِقُ البسط أولًا، ثمّ أختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}$$ أضرب كلًّا من البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x+1} + 1)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر

أتذكّر

تعلّمت سابقًا كيف أتخلّص من الجذر في المقدار النسبي عن طريق عملية تُسمّى (إنطاق المقام) تتضمّن ضرب البسط والمقام في مقدار جذري، بحيث لا يحوي ناتج الضرب جذورًا في المقام، وبالطريقة نفسها يمكن إنطاق البسط.

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أحتاج إلى تبسيط المقدار النسبي عن طريق إعادة تعريف القيمة المطلقة أولًا، ثمّ اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

الخطوة 1: أُعيد تعريف الاقتران.

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & , x > 2 \\ \dfrac{-(x-2)}{x-2} & , x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , x > 2 \\ -1 & , x < 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

أُلاحظ أنّه توجد قاعدتان مختلفتان عن يمين العدد 2 وعن يساره؛ لذا، يجب إيجاد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-1) = -1$$ النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (1) = 1$$ النهاية من جهة اليمين

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ غير موجودة.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x - x^2}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$

أتذكّر

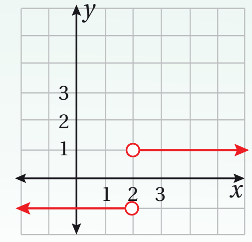
إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة: هي إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة على صورة اقتران متشعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

أفكّر

لماذا لم توضع إشارة المساواة في أيٍّ من المتباينتين عند إعادة تعريف الاقتران؟

الدعم البياني

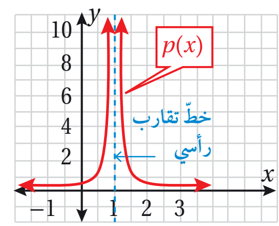
أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ أنّ النهاية غير موجودة.



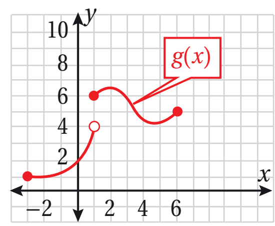
الاتّصال

يكون **الاقتران متّصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيّ انقطاع أو قفزة أو فجوة، ويكون الاقتران متّصلًا عند نقطة إذا كان منحناه يمرّ عبر هذه النقطة دون انقطاع.

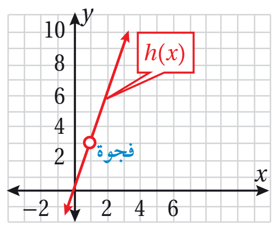
توضّح التمثيلات البيانية الآتية بعض حالات الاتصال أو عدم الاتصال:



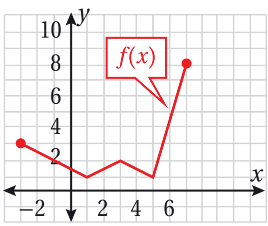
غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



متّصل عند $x = 1$

أُلاحـظ أنّ منحنيي الاقترانين $p(x)$ و $h(x)$ أعلاه غير متّصلين عند $(x = 1)$؛ لأنّ كلًّا من الاقترانين غير معرّف عند $(x = 1)$ على الرغم من أنّ نهاية الاقتران $h(x)$ موجودة عندما $(x = 1)$. أمّا الاقتران $g(x)$ فإنّه غير متّصل عند $(x = 1)$ بسـبب وجود قفزة (ما يعني أنّ النهاية غير موجودة).

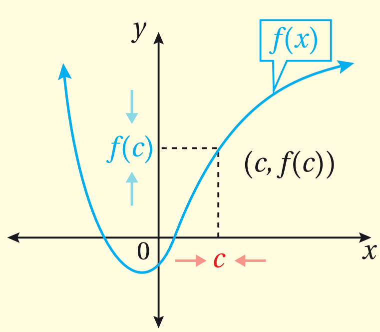
ممّا سبق، يُمكن التوصّل إلى أنّ الاقتران يكون متّصلًا عند نقطة إذا كانت النهاية تساوي قيمة الاقتران عند تلك النقطة.

مفهوم أساسي

الاتّصال عند نقطة

يكون الاقتران $f(x)$ متّصلًا عند النقطة $x = c$ إذا حقّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(x)$ مُعرّف عند c.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$



أتذكّر

النهاية موجـودة تعني أنّ نهايتـي اليمين واليسـار متسـاويتان، ووجـود النهايـة عند نقطة لا يعني بالضـرورة أنّ الاقتـران معرّف عند تلك النقطة.

مثال 6

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

1 $$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \le -1 \\ x - 1 & , x > -1 \end{cases} \quad , x = -1$$

لتحديد إذا كان الاقتران h متّصلًا عند $x = -1$، يجب التحقّق من أنّ $h(x)$ مُعرَّف عند $x = -1$، وأنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = h(-1)$.

- $h(-1) = (-1)^2 - 3 = -2$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 3) = -2$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = -2$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2$، فإنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -2$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = h(-1) = -2$، إذن: $h(x)$ متّصل عند $x = -1$.

2 $f(x) = x^3 - x\ ,\ x = 3$

لتحديد إذا كان الاقتران f متّصلًا عند $x = 3$، يجب التحقّق من أنّ $f(x)$ معرّف عند $x = 3$، وأنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

- $f(3) = (3)^3 - (3) = 24$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = (3)^3 - (3) = 24$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$، إذن: $f(x)$ متصل عند $x = 3$.

3 $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}\ ,\ x = 2$

الاقتران g غير متّصل عند $x = 2$؛ لأنه غير معرّف عند $x = 2$ (صفر مقام).

4 $p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & , x \neq 4 \\ 7 & , x = 4 \end{cases}\ ,\ x = 4$

لتحديد إذا كان الاقتران p متّصلًا عند $x = 4$، يجب التحقّق من أنّ $p(x)$ مُعرَّف عند $x = 4$، وأنّ $\lim\limits_{x \to 4} p(x) = p(4)$.

- $p(4) = 7$

بما أن ناتج التعويض المباشر في $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ يساوي $\dfrac{0}{0}$، أحلّل المقدار جبريًّا، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)}{x - 4}$ بتحليل الفرق بين مربّعين

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x - 4}}$ باختصار العامل المشترك

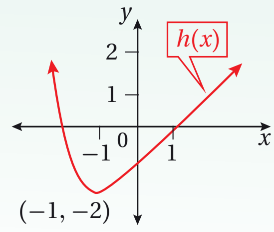
$= \lim\limits_{x \to 4} (x + 4)$ بالتبسيط

$= 4 + 4 = 8$ بالتعويض المباشر والتبسيط

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 4} p(x) \neq p(4)$، إذن: $p(x)$ غير متّصل عند $x = 4$.

الدعم البياني

يوضح التمثيل البياني الآتي للاقتران $h(x)$ أنّه متصل عند $x = -1$.

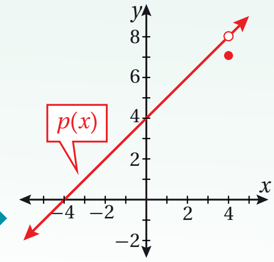


أتذكّر

يمكن إيجاد نهاية كثيرات الحدود بالتعويض المباشر.

الدعم البياني

يوضح التمثيل البياني الآتي للاقتران $p(x)$ أنه غير متصل عند $x = 4$.



أتحقّق من فهمي

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x \, , x = 1$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x - 5} \, , x = 5$

c) $h(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases} \, , x = 3$

d) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & , x \neq 5 \\ 10 & , x = 5 \end{cases} \, , x = 5$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

1) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x - 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} (x + 7)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

4) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 5)$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} -1 & , x \neq 3 \\ 1 & , x = 3 \end{cases}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} p(x), p(x) = \begin{cases} x + 6 & , x < -2 \\ -\dfrac{1}{2}x + 1 & , x > -2 \end{cases}$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4x + 7)$

10) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

11) $\lim\limits_{x \to 9} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

12) $\lim\limits_{x \to 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3)$

13) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x - 3}{2x + 4}}$

14) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x^2 + 11}$

15) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

16) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1}$

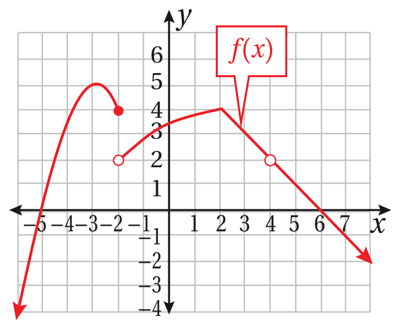
17) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$

18) $\lim\limits_{x \to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 3x - 7 & , x > 3 \end{cases}$

19) $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{2}}{t - 4}$

20) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

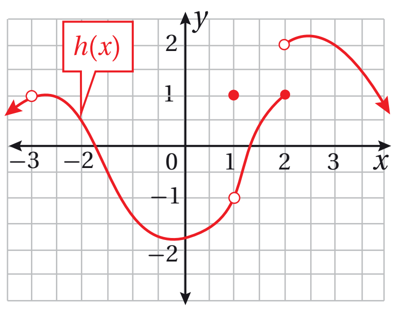
أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



21 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

22 $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



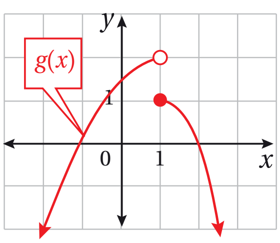
23 $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

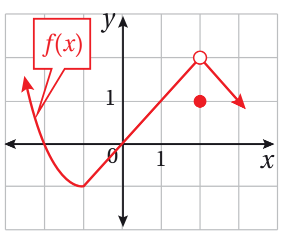
24 $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$

25 $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

26 إذا كان $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$، وكان $f(0) = 0$، $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$، $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 8$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c.

أستعملُ التمثيلين البيانيين المجاورين؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:





27 $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) + g(x))$

28 $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

29 $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) \times g(x))$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

31 $g(x) = \dfrac{16}{x^2 + 25}$, $x = -5$

30 $f(x) = \pi x^2 + 4.2x + 7$, $x = -5$

32 $h(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 3 & , x \geq 0 \end{cases}$, $x = 0$

33 إذا كان $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \neq 3 \\ 2 + \sqrt{k} & , x = 3 \end{cases}$، متّصلًا عند $x = 3$؛ فأجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

34 **تحدٍّ:** أجد $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + |x-1| - 1}{|x - 1|}$ بيانيًّا وجبريًّا.

35 **تبرير:** أجد قيمتَي الثابتين m و b اللتين تجعلان $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{mx + b} - 3}{x} = 1$، وأبرّر إجابتي.

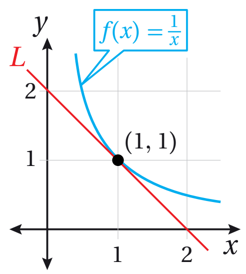
36 **تبرير:** أجد قيمة الثابت a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{a}{x^2 - 1}\right)$ موجودة، وأبرّر إجابتي.

الاشتقاق
Differentiation

فكرة الدرس
- إيجاد مشتقّة اقتران القوّة باستعمال التعريف العام.
- اشتقاق اقتران القوّة.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى اقتران القوّة عند نقطة ما.

المصطلحات التعريف العام للمشتقّة، اقتران القوّة، العمودي على المماس.

مسألة اليوم يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$:



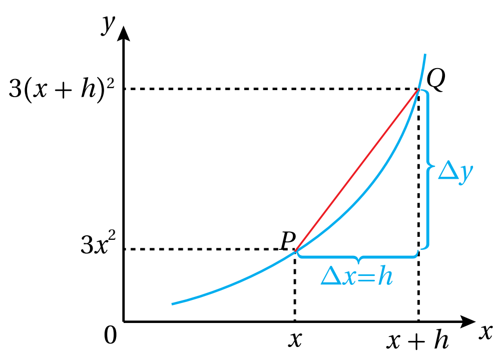
1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L؟

التعريف العام للمشتقّة

إذا علمتُ أنّ النقطة Q على منحنى الاقتران $y = 3x^2$ تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$ كما يظهر في الشكل المجاور، فإنّ إحداثيَي النقطة Q هما: $(x + h, 3(x + h)^2)$



إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

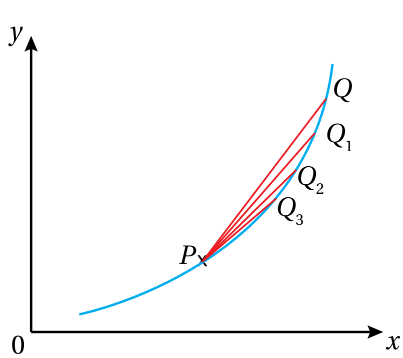
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(x + h)^2 - 3x^2}{(x + h) - x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

$$= \frac{6hx + 3h^2}{h} = 6x + 3h$$

أُلاحظ أنّه في أثناء حركة النقطة Q على منحنى الاقتران نحو النقطة P فإنّها تمر بالنقاط Q_1 و Q_2 و Q_3، وأُلاحظ كذلك أنّ ميل كلّ من القواطع $\overline{PQ_1}$ و $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.



وعندمـــا تقترب Q من P؛ فإنّ h تصبح أصغر فأصغر، وعندها يُمكنني القول: إنّ h تقترب من الصفر، وتُكتب على الصورة $h \to 0$.

ومنه: يكون ميل المماس (m) عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

تُسمى $6x$ مشتقّة الاقتران $y = 3x^2$، ويُرمز إليها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن: إذا كان $y = 3x^2$ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 6x$

تُســـمّى هـــذه الطريقة فـــي إيجاد مشـــتقّة اقتـــران عنـــد أي نقطة **التعريـــف العام للمشـــتقّة** (the definition of the derivative).

أتعلّم

ميل المماس يساوي ميل منحنى الاقتران عند نقطة التماس.

رموز رياضية

يُرمز إلى مشتقّة $y = f(x)$ بالرموز الآتية:

$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), y'$

مفهوم أساسي

التعريف العام للمشتقّة

مشتقّة الاقتران f بالنسبة إلى المتغير x هي f' الذي قيمته عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وبشرط وجود النهاية.

مثال 1

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^3$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقّة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$ بتعويض $f(x+h) = (x+h)^3,\ f(x) = x^3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h}$$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 3x^2$$ بتعويض $h = 0$

معلومة

يعود تاريخ إيجاد المشـــتقّة باســـتعمال النهايـــات إلـــى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط بالرياضيين: إسحاق نيوتن، وغوتفريد لايبنتس؛ إذ اكتشفاه بصورة مستقلّة.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $y = 8 - x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

يُمكن أيضًا استعمال التعريف العام للمشتقّة لإيجاد مشتقّة اقتران عند قيمة مُحدَّدة من مجاله.

مثال 2

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عندما $x = 3$.

التعريف العام للمشتقّة
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بتعويض $x = 3$
$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

بتعويض $f(3+h) = (3+h)^2,\ f(3) = (3)^2$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$$

بالتبسيط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

بالقسمة على h
$$= \lim_{h \to 0} (6+h)$$

بتعويض $h = 0$
$$= 6$$

أتعلّم

$f(x+h) \neq f(x) + f(h)$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = 4x^2 + 1$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = -1$.

مشتقّة اقترانات القوّة

يُســمّى الاقتران $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، **اقتران قــوّة** (power function)، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^7 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad h(x) = \sqrt{x^3}$$

إنّ إيجاد المشــتقّة باستعمال التعريف العام للمشتقّة ليس ســهلًا في كثير من الأحيان؛ ولكن توجد بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد المشتقّة، ومنها: مشتقّة اقتران القوّة.

مشتقّة اقتران القوّة

مفهوم أساسي

بالكلمات: عند اشتقاق الاقتران $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ أسّ x في المشتقّة يكون أقل بواحد من أسّ x في الاقتران الأصلي، ويكون معامل x في المشتقّة مساويًا لأسّ x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط

3 $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ تعريف الأُسّ السالب والجذر التربيعي

أتذكّر

لأيّ عدد حقيقي a، ولأيّ عددين صحيحين m و n، حيث $n > 1$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، إلّا إذا كانت $a < 0$، وn عددًا زوجيًّا فإن الجذر يكون غير مُعرَّف.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-11}$

b) $y = \frac{1}{x^5}$

c) $y = \sqrt[3]{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد مشتقّة الاقترانات التي بعض حدودها اقترانات قوّة.

مفهوم أساسي — **قواعد أخرى لمشتقّة اقترانات القوّة**

مشـــتقّة الثابت: إذا كان $y = c$ حيث c عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$، أي إنّ مشـــتقّة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقّة مضاعفات القوّة: إذا كان $y = ax^n$، حيث n و a عددان حقيقيان؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

مشتقّة المجموع ومشتقّة الفرق: إذا كان $y = u(x) \pm v(x)$، حيث u و v اقترانا قوّة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

مثال 4

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = x + 2\sqrt[3]{x}$

$y = x + 2\sqrt[3]{x} = x + 2x^{\frac{1}{3}}$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \times \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ قاعدتا مشتقّتَي مضاعفات القوى، والمجموع

$= 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = \frac{5 - 7x}{x}$

$y = \frac{5 - 7x}{x} = \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$ بقسمة كلّ حد في البسط على x

$= 5x^{-1} - 7$ بكتابة حدود الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{-2} - 0$ قواعد مشتقّات الثابت، ومضاعفات القوّة، والفرق

$= -\frac{5}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y=\sqrt{x}+\frac{4}{x^2}$

b) $y=\frac{x^5-8x^6}{4x}$

معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند نقطة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقّة الاقتران عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المماس عند هذه النقطة. ومن ثَمَّ يُمكِن استعمال المشتقّة لإيجاد معادلة مماس منحنى الاقتران عند النقطة نفسها.

أتذكَّر

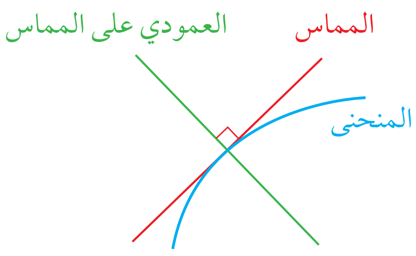
معادلة المستقيم الذي ميله m، والمارُّ بالنقطة (x_1, y_1) هي: $y-y_1=m(x-x_1)$.

مفهوم أساسي — **معادلة مماس منحنى الاقتران**

إذا كان $f(x)$ اقترانًا، فإنَّ معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

العمودي على المماس (the normal) عند نقطة التماس هو مستقيم يصنع زاوية قائمة مع مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة، ويمكن استعمال ميل المماس لإيجاد ميل العمودي على المماس ومعادلته.



أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهما ليس رأسيًّا، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو (-1)؛ أيْ إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

مفهوم أساسي — **معادلة العمودي على المماس**

إذا كان $f(x)$ اقترانًا، وكان: $f'(a)\neq 0$، فإنَّ معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

مثال 5

إذا كان الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

$y = x - \frac{1}{8}x^2$ — الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{4}x$ — قاعدة مشتقّة اقتران القوّة والفرق

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6} = 1 - \frac{1}{4}(6)$ — بتعويض $x = 6$

$= -0.5$ — بالتبسيط

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ — معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$y - 1.5 = -0.5(x - 6)$ — بتعويض $x_1 = 6, y_1 = 1.5, m = -0.5$

$y = -0.5x + 4.5$ — بالتبسيط

إذن: معادلة المماس هي: $y = -0.5x + 4.5$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

بما أنّ ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ يساوي -0.5 فإنّ ميل العمودي على المماس يساوي 2، ومنه: فإنّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ هي:

$$y - 1.5 = 2(x - 6)$$

$$y = 2x - 10.5$$

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = 8x - \frac{1}{x}$؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عن النقطة $(0.25, -2)$.

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان؛ فإنّ حاصل ضرب ميليهما يساوي -1

إيجاد نقطة التماس إذا عَلِم ميل المماس

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران إذا عُلِمت نقطة التماس. والآن سأتعلَّم كيف أجد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس.

مثال 6

1 **أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة التماس.

$f(x) = \sqrt{x}$	الاقتران المعطى
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	بإيجاد المشتقّة
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$	بتعويض $f'(x) = \frac{1}{2}$
$2\sqrt{x} = 2$	بالضرب التبادلي
$\sqrt{x} = 1$	بقسمة طرفي المعادلة على 2
$x = 1$	بتربيع طرفي المعادلة

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

أجد $f(1)$:

$f(x) = \sqrt{x}$	الاقتران المعطى
$f(1) = \sqrt{1}$	بتعويض $x = 1$
$= 1$	بالتبسيط

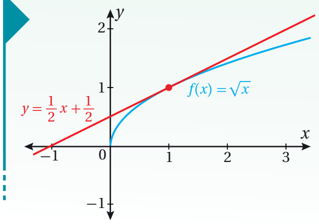
إذن، نقطة التماس هي: $(1, 1)$.

أتذكَّر

$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$،
حيث: $x > 0$.

الدعم البياني

يبيّن التمثيل البياني الآتي لمنحنى الاقتران $f(x)$ أن مماس الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ هو المستقيم $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



2 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

> **أتذكّر**
>
> ميـل المماس الأفقي يساوي صفـرًا، إذن: $m = f'(x) = 0$

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة (نقاط) التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بإيجاد المشتقّة	$f'(x) = -3x^2 + 12x$
بتعويض $f'(x) = 0$	$-3x^2 + 12x = 0$
بإخراج $-3x$ عاملًا مشتركًا	$-3x(x-4) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$-3x = 0 \quad \text{or} \quad x-4 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 4$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطتي التماس.

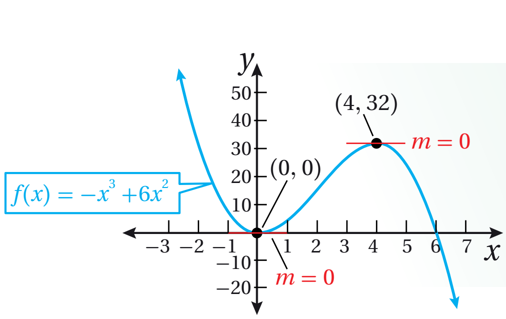
أجد $f(0)$، و $f(4)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بتعويض $x = 0$	$f(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 = 0$
بتعويض $x = 4$	$f(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 = 32$

إذن، إحداثيا كلّ من نقطتي التماس اللتين يكون عندهما المماس أفقيًّا هما: $(0, 0)$، و $(4, 32)$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ وجود مماسين أفقيين عندما $x = 0$، و $x = 4$.



أتحقَّق من فهمي

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العامّ للمشتقّة:

1) $f(x) = 4x + 1$

2) $y = 1 - x$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

4) $y = \frac{2x + 4}{6}$

أجد مشتقّة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

5) $f(x) = 4x^2, \quad x = 1$

6) $f(x) = 1 - x^2, \quad x = -2$

7) $f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$

8) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

9) $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$

10) $y = x^8 - x^{-8}$

11) $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$

12) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

13) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$

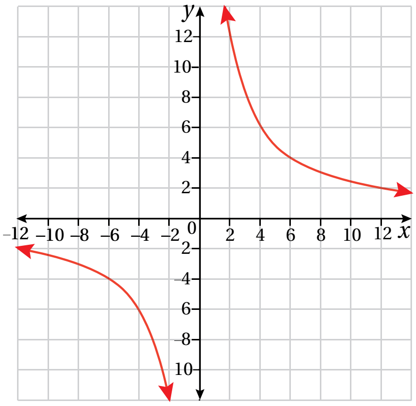
14) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

إذا كان الاقتران $y = x^2 - x$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

15) معادلة المماس عندما $x = 4$.

16) معادلة العمودي على المماس عندما $x = 4$.

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{24}{x}, x \neq 0$.



17) أجد $f'(x)$.

18) أُبيّن أنّ ميل المماس سالب دائمًا عند أيّ نقطة.

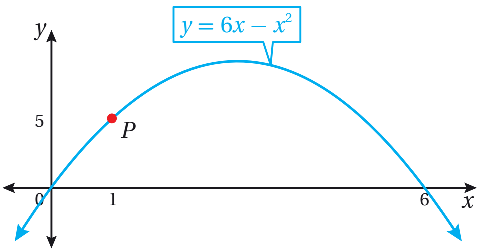
19) أجد معادلة العمودي على المماس عندما $y = -6$.

20 أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

21 أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

22 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1

يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



23 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: **إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

25 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، أبرّر إجابتي.

26 نقطة تقاطع المماسين من السؤال السابق، أبرّر إجابتي.

تبريرٌ: **إذا كان الاقتران $y = x^2 + 4x$؛ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

27 أُثبت أنّ معادلة المماس عند النقطة $x = k$ هي $y-(2k+4)x + k^2 = 0$

28 أجد قيمة k التي تكون عندها معادلة العمودي على المماس هي: $4y + x = 0$

29 تحـدٍّ: إذا كان $f(x) = \frac{100}{x}$، وكانت P نقطة تقع على منحنــى $f(x)$ إحداثياها $(a, \frac{100}{a})$، حيث $a \neq 0$؛ فأجد مساحة المثلّث المكوّن من مماس منحنى $f(x)$ عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

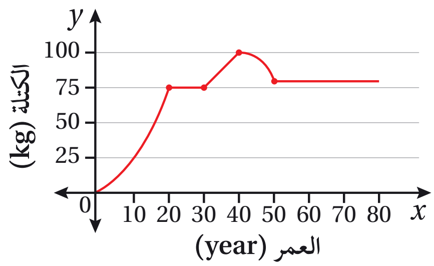
القِيَم العظمى والصغرى
Maximum and Minimum Values

فكرة الدرس

- تحديد النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص لاقترانات كثيرات الحدود.
- تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة.

المصطلحات النقطة الحرجة، القيمة الحرجة، التزايد، التناقــص، نقطة عظمى محلية، نقطة صغرى محلية، نقطة انعطاف أفقي.

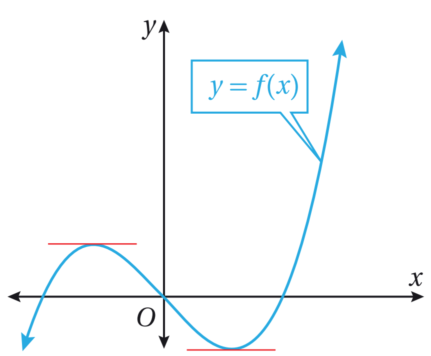
مسألة اليوم يُمثِّـل المنحنى فـي الشـكل المجـاور التغيُّـرات فـي كتلة جسم عمران:



1) في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسمه؟
2) في أيِّ الفترات الزمنية لم تتغيَّر كتلة جسمه؟
3) في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة جسمه؟

النقاط الحرجة للاقتران

توجد على منحنى الاقتران $f(x)$ المُبيَّن جانبًا نقطة واحدة على الأقل يُمكِن رسم مماس أفقي عندها، في ما يُعـرَف **بالنقطة الحرجة** (critical point)، وهـذا يعني أنَّ مشـتقّة الاقتران عند هـذه النقطة تساوي صفرًا، ويُسمّى الإحداثي x للنقطة الحرجة **قيمة حرجة** (critical value).



مثال 1

أجد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

مشتقّة الاقتران $\qquad f'(x) = 2x - 6$

بمساواة المشتقّة بالصفر $\qquad 2x - 6 = 0$

بجمع 6 إلى طرفي المعادلة $\qquad 2x = 6$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\qquad x = 3$

إذن، توجد قيمة حرجة للاقتران f عندما $x = 3$.

أمّا النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f فهي: $(3, f(3)) = (3, 0)$.

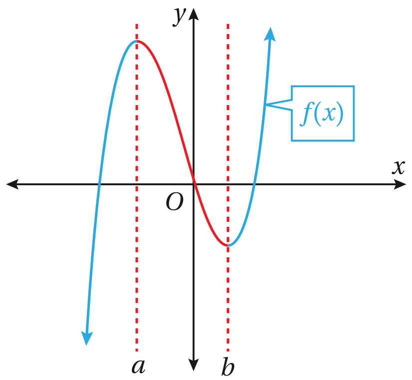
أتحقّق من فهمي

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 12x + 12$

b) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

تزايد اقترانات كثيرات الحدود وتناقصها



يُمثّل الشكل المجاور منحنى اقتران كثير الحدود $f(x)$.

أُلاحظ أنّ قِيَم y تزداد في الفترة $(-\infty, a)$، والفترة (b, ∞)، حيث يرتفع منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متزايدًا** (increasing) في هاتين الفترتين. أُلاحظ أيضًا أنّ قِيمَ y تقل في الفترة (a, b)، حيث ينخفض منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

أتذكّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنَّ $a = 0$، أو $b = 0$، أو كُلًّا منهما يساوي صفرًا.

أتعلّم

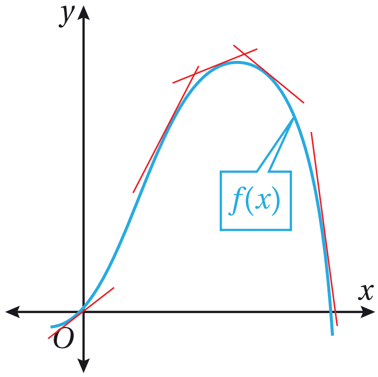
كُتبت فترة التناقص على صورة فترة مفتوحة، لأنّ التناقص يبدأ من يمين النقطة a وينتهي عند يسار النقطة b، وكذلك الأمر بالنسبة إلى فترات التزايد.

مفهوم أساسي — تزايد الاقتران وتناقصه

- يكون الاقتران f متناقصًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.
- يكون الاقتران f متزايدًا في الفترة المفتوحة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة I.

تعلّمتُ سابقًا أنّ مشتقّة الاقتران عند نقطة تساوي ميل المماس عند تلك النقطة. ولكن، كيف يُمكن استعمال المشتقّة في دراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $f(x)$. أُلاحظ أنّ:



- المماسات ذات الميل الموجب مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماســات ذات الميل السالب مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.

وهذا يقود إلى الاســتفادة من إشــارة المشتقّة في تحديد فترات تزايد الاقتران وتناقصه.

نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَـم x جميعها فـي الفترة المفتوحة I؛ فـإنّ الاقتران f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لقِيَـم x جميعها فـي الفترة المفتوحة I؛ فـإنّ الاقتران f يكون متناقصًا على الفترة I.

أتعلّم

تقتصر أمثلة هذا الدرس وتدريباتــه على اقترانات كثيــرات الحــدود فقط، والتي مجالهــا مجموعة الأعداد الحقيقية R.

مثال 2

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = 2x + 2$ مشتقّة الاقتران

$2x + 2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

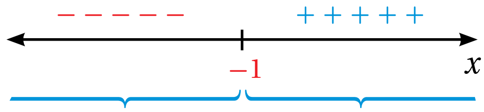
$2x = -2$ بطرح 2 من طرفي المعادلة

$x = -1$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: صفر المشتقّة $x = -1$

الخطوة 2: أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار قيمة أقلّ من صفر المشـتقّة (ولتكن -2) وأخرى أكبر منه (ولتكن 0)، وأُحدّد إشـارة المشتقّة عند كلّ منهما.



الفترة	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص ↘	متزايد ↗

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$.

2 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x$

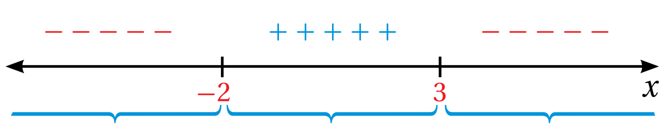
الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$	مشتقّة الاقتران
$-6x^2 + 6x + 36 = 0$	بمساواة المشتقّة بالصفر
$-6(x^2 - x - 6) = 0$	بإخراج -6 عاملًا مشتركًا
$x^2 - x - 6 = 0$	بقسمة طرفي المعادلة على -6
$(x + 2)(x - 3) = 0$	بالتحليل
$(x + 2) = 0 \quad or \quad (x - 3) = 0$	خاصّية الضرب الصفري
$x = -2 \qquad x = 3$	بحلّ المعادلتين الناتجتين

إذن: صفرا المشتقّة هما: $x = -2, x = 3$

الخطوة 2: أبحثُ في إشارة المشتقّة.

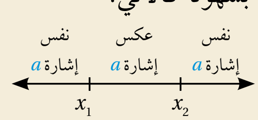
أختار بعض القِيَم الأصغر من أصفار المشتقّة والأكبر منها، ثم أُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منها.



الفترة	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(4) < 0$
سلوك الاقتران	متناقص ↘	متزايد ↗	متناقص ↘

أتعلّم

إذا كان للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان هما x_1 و x_2؛ فإنّه يُمكن تحديد الإشارة على جانبَي الصفرين وبينهما بسهولة كالآتي:



إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتحقّق من فهمي

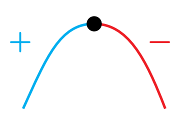
أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

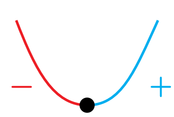
b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

تصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة

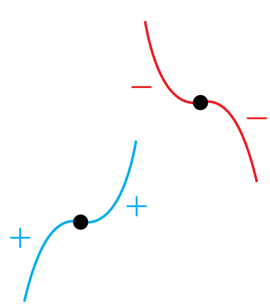
يُمكن استعمال المشتقّة؛ لتصنيف النقاط الحرجة لاقترانات كثيرات الحدود:



- **نقطة عظمى محلّية** (local maximum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متزايدًا وعن يمينها متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من الموجب إلى السالب.



- **نقطة صغرى محلّية** (local minimum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متناقصًا وعن يمينها متزايدًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها تتغيّر من السالب إلى الموجب.



- **نقطة انعطاف أفقي** (horizontal point of inflection): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران حولها إمّا متزايدًا وإمّا متناقصًا، ما يعني عدم تغيّر إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، بل تبقى كما هي إمّا موجبة وإمّا سالبة.

أتعلّم

- القيمة العظمى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة العظمى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أكبر من القِيَم المجاورة لها.
- القيمة الصغرى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلّية، وتُسمّى كذلك؛ لأنّها أصغر من القِيَم المجاورة لها.

مثال 3

إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - 6x - 2$، فأستعمل المشتقّة لأحل السؤالين الآتيين:

1 أجد النقاط الحرجة للاقتران f.

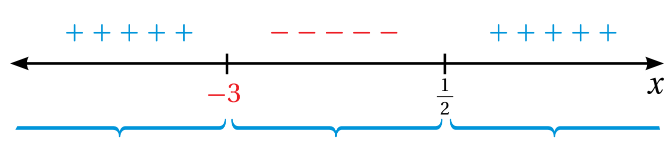
مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^2 + 10x - 6$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^2 + 10x - 6 = 0$
بإخراج 2 عاملًا مشتركًا	$2(2x^2 + 5x - 3) = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
بالتحليل	$(2x - 1)(x + 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$(2x-1) = 0 \quad or \quad (x + 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{1}{2} \qquad x = -3$

عندما $x = \frac{1}{2}$ فإنّ $y = -\frac{43}{12}$.

عندما $x = -3$ فإنّ $y = 25$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{43}{12}\right)$ و $(-3, 25)$.

2 أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.



الفترة	$x < -3$	$-3 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(1) > 0$
سلوك الاقتران	متزايد	متناقص	متزايد

إذن: النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{-43}{12}\right)$ صغرى محلّية، والنقطة $(-3, 25)$ عظمى محلّية.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقّة لأحل السؤالين الآتيين.

a) أجد النقاط الحرجة للاقتران $f(x)$.

b) أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.

أتعلّم

النقطة الصغرى المحلّية ليست أقل نقطة على المنحنى، وإنّما هي فقط أقل من النقاط التي حولها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة العظمى المحلّية؛ فهي ليست أعلى نقطة على المنحنى، إنّما هي فقط أعلى من النقاط التي حولها.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باقترانات كثيرات الحدود، وعندئذ يستفاد من تحديد تزايد تلك الاقترانات وتناقصها وقيمها العظمى والصغرى في تحليل تلك المواقف وتفسيرها.

مثال 4 : من الحياة

درجات حرارة: يُمثِّل الاقتران الآتي درجة الحرارة لجسم مريض بعد t يومًا من دخوله المستشفى:

$$T(t) = -0.1t^2 + 1.2t + 38, \quad t \geq 0$$

حيث T درجة الحرارة بالسيلسيوس (°C). أُحدِّد أعلى درجة حرارة للمريض، واليوم الذي سُجِّلت فيه، علمًا بأنَّه تلقّى العلاج في المستشفى مدَّة 12 يومًا.

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران المعطى.

$T'(t) = -0.2t + 1.2$ مشتقّة الاقتران

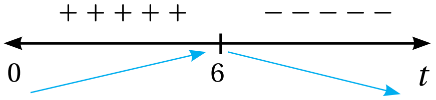
الخطوة 2: أجد أصفار المشتقّة.

$-0.2t + 1.2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$-0.2t = -1.2$ بطرح 1.2 من طرفي المعادلة

$t = 6$ بالقسمة على -0.2

الخطوة 3: أُحدِّد إشارة المشتقّة حول أصفارها.



الخطوة 4: أُحدِّد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.

منحنى الاقتران T متزايد عن يسار $t = 6$، ومتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ للاقتران T قيمة عظمى محلية عندما $t = 6$، وهي:

$T(6) = -0.1(6)^2 + 1.2(6) + 38 = 41.6$ بتعويض $t = 6$

إذن، أعلى درجة حرارة للمريض هي 41.6°C، وقد سُجِّلت في اليوم السادس من بدء علاجه.

معلومة

يختلف مدى درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية مع التقدُّم بالعُمُر على النحو الآتي:

- الرُّضَّع والأطفال: من 36.6°C إلى 37.2°C
- البالغون: من 36.1°C إلى 37.2°C
- كبار السن (أكثر من 65 عامًا): قد تنخفض إلى 36.2°C

معلومة

علم الحيــوان (zoology) هو أحد فــروع علم الأحياء، ويُعنــى بدراســة الحيوانات علميًّا من نواحٍ عــدة، منها: توزيعها الجغرافي، وتفاعلها مع النظم البيئية والبشر.

أتحقّق من فهمي

لاحظت عالمة حيــوان أنَّ عدد الضفادع في بحيرة ما يُمكِن نمذجتــه بالاقتــران: $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث P عدد الضفادع، و t الزمن بالأشــهر منذ بدء ملاحظة الضفــادع. أجد أكبر عدد يُمكِن أنْ تصــل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

2) $f(x) = 1 - 12x + 2x^2$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

5) $f(x) = 4x + 3$

6) $f(x) = 7 - 5x$

7) $f(x) = x^2 + 7$

8) $f(x) = x^2 - x$

9) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

10) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

11) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

12) $f(x) = 3x^2 (12 - 5x)$

13) $f(x) = (x-2)^2$

14) $y = 2x^3 - x^4$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة:

15 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

16 $y = -(x-2)^3 + 1$

17 $f(x) = x^4 - x^3$

18 $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

19 إذا كانت مشتقّة الاقتران $f(x)$ تُعطى بالاقتران $f'(x) = (x-1)^2\,(x-3)$؛ فأجد قِيَم x التي يكون عندها نقاط حرجة للاقتران f، ثمّ أُحدّد نوعها.

20 **صناعة:** تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$، فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

مهارات التفكير العليا

تحدّ: إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + b$، حيث a و b ثابتان؛ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

21 أُثبتُ أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

22 أُثبتُ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a > 0$.

23 **تحدّ:** إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 - 4x + c$، حيث a و c عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي $(2, -7)$، فما قيمة كلٍّ من a و c؟

24 **تحدّ:** إذا كان الاقتران $y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$، حيث $p > 0$؛ فأجد مجموعة قِيَم p التي يكون عندها للاقتران نقطتان حرجتان.

الدرس 4

المشتقّة الثانية وتطبيقاتها

The Second Derivative and its Applications

فكرة الدرس

- إيجاد المشتقّة الثانية لاقتران.
- تصنيف النقاط الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية.
- إيجاد السرعة المتجهة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

المصطلحات المشتقّة الثانية، اختبار المشتقّة الثانية، الموقع، السرعة المتجهة، التسارع.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع درّاجة نارية تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار. أجد تسارع الدراجة عندما $t = 3$.

المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران المشتقّة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنَّه يُمكِنني اشتقاقه.

يُطلَق على الاقتران الناتج من اشتقاق الاقتران مَرَّتين اسم **المشتقّة الثانية** (the second derivative) للاقتران، ويُرمَز إليه بالرمز $f''(x)$. فمثلًا: إذا كان: $f(x) = x^4$، فإنَّ مشتقّة الاقتران $f(x)$ هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$ هي: $f''(x) = 12x^2$.

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقّة الثانية.

مثال 1

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $\boldsymbol{f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4}$

$f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5x^4 - 2x^3$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$f''(x) = 20x^3 - 6x^2$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

2 $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 7$

$f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 7$ الاقتران المعطى

$f(x) = 5x^{-2} + 7$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$f'(x) = -10x^{-3}$ المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$

$f''(x) = 30x^{-4}$ المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$

$= \dfrac{30}{x^4}$ تعريف الأسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

تصنيف القِيَم الحرجة باستعمال اختبار المشتقّة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ النقطة التي يكون عندها ميل مماس الاقتران صفرًا هي نقطة حرجة، وهذا يعني أنَّ مشتقّة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا؛ لذا يُمكِن رسم مماس أفقي عندها.

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن تصنيف النقاط الحرجة بدراسة إشارة المشتقّة الأولى للاقتران، والآن سأتعلَّم كيف أستعمل **اختبار المشتقّة الثانية** (second derivative test) لتحديد ماهية النقطة الحرجة؛ هل هي عظمى محلية أم صغرى محلية؟

نظرية — **اختبار المشتقّة الثانية**

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ: $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ اختبار المشتقّة الثانية يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال المشتقّة الأولى لتصنيف القِيَم القصوى المحلية.

أتذكَّر

يشير مصطلح (النقطة العظمى المحلية) إلى النقطة (x, y)، ويشير مصطلح (القيمة العظمى المحلية) إلى الإحداثي y للنقطة العظمى المحلية. وكذلك الحال بالنسبة إلى مصطلح (النقطة الصغرى المحلية)، ومصطلح (القيمة الصغرى المحلية).

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة 1: أجد المشتقّة الأولى والقِيَم الحرجة للاقتران.

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$ بالصفر	$6x^2 + 6x - 12 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 6	$x^2 + x - 2 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(x+2)(x-1) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$x = -2 \qquad x = 1$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$$x = -2, x = 1$$

الخطوة 2: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

المشتقّة الأولى للاقتران $f(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$	$f''(x) = 12x + 6$

الخطوة 3: أُعوِّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية للاقتران $f(x)$؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$	$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$
بتعويض $x = 1$	$f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$

أتعلَّم

يُطلَق على القِيَم الصغرى المحليــة والقِيَم العظمى المحليــة اســم القِيَــم القصوى المحلية.

أُلاحِظ أنَّ:

- $f''(-2) < 0$. إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 20$.
- $f''(1) > 0$. إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -7$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

السرعة والتسارع عند الحركة في مسار مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

تمثّل المشتقّة الأولى للاقتران $s(t)$ معدل تغيُّر موقع الجسم بالنسبة إلى الزمن، أو **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليها بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّيت بهذا الاسم لأنَّها تحدّد سرعة الجسم واتجاه حركته، فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب، وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب، وإذا كانت $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

أمّا القيمة المُطلَقة للسرعة المتجهة فتُسمّى **السرعة القياسية** (speed)، وهي تحدّد مقدارًا ولا تحدّد اتجاه الحركة.

تمثّل المشتقّة الثانية للاقتران $s(t)$ معدل تغيُّر سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن، أو **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$.

إرشاد

نشير إلى أنَّ كلمة (سرعة) تعني السرعة المتجهة أينما وردت في هذا الكتاب.

مثال 3

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 **ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟**

أجد المشتقّة الأولى لاقتران الموقع، ثمّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقّة:

اقتران السرعة $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$

بتعويض $t = 2$ $v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5$

بالتبسيط $= 1$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: 1 m/s

2 **في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟**

بما أنَّ إشارة السـرعة موجبة عندما $t = 2$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب عند تلك اللحظة.

3 **ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟**

أجد المشتقّة الثانية لاقتران الموقع، ثمّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقّة:

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 8$

بتعويض $t = 2$ $a(2) = 6(2) - 8$

بالتبسيط $= 4$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: 4 m/s^2

أتعلّم

يمثّل التسارع المشتقّة الثانية لاقتران الموقع، والمشتقّة الأولى لاقتران السرعة.

4 **أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.**

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $3t^2 - 8t + 5 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(3t - 5)(t - 1) = 0$

خاصّية الضرب الصفري	$3t-5=0 \quad \text{or} \quad t-1=0$
بحَلِّ المعادلتين الناتجتين	$t=\frac{5}{3} \qquad t=1$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t=1$، و $t=\frac{5}{3}$.

أتحقّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t)=3t^2-t^3\,, t\geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t=3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t=3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t=3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

توجد تطبيقات حياتية عديدة للسرعة والتسارع، ويُمكِن استعمال هذه التطبيقات لتحليل حركة الأجسام.

مثال 4 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t)=t^3-15t^2+63t,\ t\geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1 ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد المشتقّة الأولى لاقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t=4$ في المشتقّة:

اقتران السرعة	$v(t)=s'(t)=3t^2-30t+63$
بتعويض $t=4$	$v(4)=3(4)^2-30(4)+63$
بالتبسيط	$=-9$

إذن، سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هي: -9 m/s

معلومة

أسد الجبال حيوان من فصيلة السنوريات، وهو قريب جينيًّا من القطط الأهلية مقارنةً بالأسود.

2 **ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟**

أجد المشتقّة الثانية لاقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقّة:

اقتران التسارع $$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 30$$

بتعويض $t = 4$ $$a(4) = 6(4) - 30$$

بالتبسيط $$= -6$$

إذن، تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هو: $-6\ \text{m/s}^2$

3 **أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.**

يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $$3t^2 - 30t + 63 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $$t^2 - 10t + 21 = 0$$

بتحليل العبارة التربيعية $$(t - 3)(t - 7) = 0$$

خاصّية الضرب الصفري $$t - 3 = 0 \quad \text{or} \quad t - 7 = 0$$

بحَلِّ المعادلتين الناتجتين $$t = 3 \qquad\qquad t = 7$$

إذن، يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي عندما $t = 3$، و $t = 7$.

أتحقّق من فهمي

فهد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2 $f(x) = 2x^{-3}$

3 $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

4 $f(x) = \sqrt{x}$

5 $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقّة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

6 $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}, x = -2$

7 $f(x) = \sqrt{x^3}, x = 4$

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

8 $y = x^4 - 2x^2$

9 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

10 $y = x^2 (x-4)$

11 $f(x) = x^5 - 5x^3$

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

12 ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

13 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

14 ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

15 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

لوح تزلُّج: يتحرَّك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلُّج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

16 ما سرعة رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

17 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

18 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

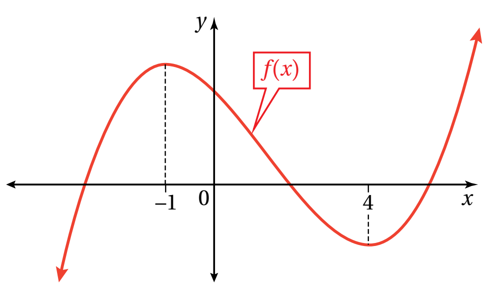
مهارات التفكير العليا

19 **تبرير:** إذا كان $y = x^2 - \frac{1}{x},\ x \neq 0$، فأُثبِت أن: $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 6x$.

20 **مسألة مفتوحة:** أكتب كثير حدود $f(x)$ من الدرجة الثالثة بحيث أن: $f''(2) = 0$، و $f''(x) < 0$ لجميع قيم $x > 2$، و $f''(x) > 0$ لجميع قيم $x < 2$.

21 إذا كان: $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 8}{x - 2},\ x \neq 2$، فأجد إحداثيي النقطة (أو إحداثيات النقاط) الواقعة على منحنى $f(x)$ التي تكون عندها $f''(x) = 0$.

22 **تحدٍّ:** يُمثِّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُمثِّل بيانيًّا منحنى الاقتران $f'(x)$.



23 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

24 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

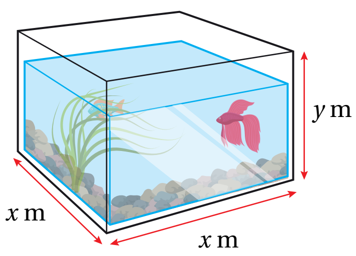
الدرس 5

تطبيقاتُ القِيَم القصوى
Optimization Problems

فكرة الدرس حَلُّ مسائل حياتية باستعمال القِيَم القصوى.

المصطلحات اقتران التكلفة، التكلفة الحدِّية، اقتران الإيراد، الإيراد الحدِّي، اقتران الربح، الربح الحدِّي.

مسألة اليوم أرادت إسراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سعته $0.2\ m^3$، وأبعاده كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الحوض التي تجعل كمِّية الزجاج المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.



تطبيقات القِيَم القصوى

يُعَدُّ تحديد القيمة الصغرى المحلية والقيمة العظمى المحلية أحد أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالًا في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر مساحة مُمكِنة، وأكبر ربح مُمكِن، وأقل تكلفة مُمكِنة.

يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لحَلِّ العديد من مسائل تطبيقات القِيَم القصوى:

مفهوم أساسي **خطوات حَلِّ مسائل القِيَم القصوى**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.

2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمِّية التي أُريد أن أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.

3) **أجد القِيَم الحرجة للاقتران:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقَّة الاقتران صفرًا.

4) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

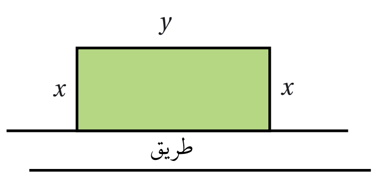
إيجاد أكبر مساحة مُمكِنة

من التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر مساحة يُمكِن إحاطتها بسياج طوله معلوم.

مثال 1 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي يوجد بمحاذاته سياج من قبلُ. أجد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ y هو طول الحقل، وأنَّ x هو عرضه كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران مساحة الحقل:

مساحة المستطيل $A = x\,y$

- أكتب y بدلالة x باستعمال المحيط:

محيط الحقل $P = 2x + y$

بتعويض $P = 800$ $800 = 2x + y$

بكتابة المعادلة بدلالة y $y = 800 - 2x$

- أُعوِّض y في اقتران مساحة الحقل:

اقتران مساحة الحقل $A = x\,y$

بتعويض $y = 800 - 2x$ $A(x) = x\,(800 - 2x)$

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتعلَّم

بما أنَّ أحد أضلاع الحقل يُقابِل الطريق الزراعي الذي يوجد بمحاذاته سياج من قبل، فإنَّه يتعيَّن على المُزارِع أنْ يُسيِّج فقط ثلاثة أضلاع من الحقل.

بالتبسيط $= 800x - 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل مساحة الحقل هو: $A(x) = 800x - 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدِّد نوعها.

المشتقّة الأولى لاقتران مساحة الحقل $A'(x) = 800 - 4x$

بمساواة المشتقّة الأولى للاقتران بالصفر $800 - 4x = 0$

بحلّ المعادلة لـ x $x = 200$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 200$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 200$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة الحقل $A''(x) = -4$

بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 200$، وهذا يعني أنَّ مساحة الحقل تكون أكبر ما يُمكِن إذا كان عرضه 200 m

إذن، أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بالسياج هي:

$$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000 \text{ m}^2$$

أتحقّق من فهمي

يريد نجّار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

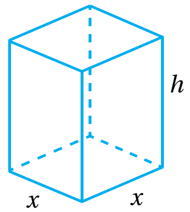
إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة

من التطبيقات الاقتصادية المهمة على القِيَم القصوى، إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة من المواد اللازمة لصنع الأشياء.

مثال 2

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها $1000\ \text{cm}^3$، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ x هو طول قاعدة العلبة، وأنَّ h هو ارتفاعها كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة $\quad S = 4xh + 2x^2$

- أكتب h بدلالة x باستعمال حجم متوازي المستطيلات المعطى:

حجم العُلْبة $\quad V = x^2 h$

بتعويض $V = 1000$ $\quad 1000 = x^2 h$

بكتابة المعادلة بدلالة h $\quad h = \dfrac{1000}{x^2}$

- أُعوِّض h في اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة $\quad S = 4xh + 2x^2$

بتعويض $h = \dfrac{1000}{x^2}$ $\quad S(x) = 4x\left(\dfrac{1000}{x^2}\right) + 2x^2$

بالتبسيط $\quad = \dfrac{4000}{x} + 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المساحة الكلية لسطح العُلْبة هو: $S(x) = \dfrac{4000}{x} + 2x^2$.

أتذكَّر

المساحة الكلية لسطح متوازي المستطيلات هي المساحة الجانبية التي أُضيف إليها مساحتا القاعدتين، علمًا بأنَّ المساحة الجانبية هي محيط القاعدة في الارتفاع.

أتذكَّر

حجم متوازي المستطيلات هو مساحة القاعدة مضروبةً في الارتفاع.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدّد نوعها.

المشتقّة الأولى لاقتران مساحة السطح $S'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 4x$

بمساواة المشتقّة الأولى بالصفر $-\frac{4000}{x^2} + 4x = 0$

بضرب طرفي المعادلة في x^2 $4x^3 = 4000$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x^3 = 1000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = 10$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 10$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 10$:

المشتقّة الثانية لاقتران مساحة السطح $S''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$

بتعويض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$

أُلاحِظ وجود قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$، وهذا يعني أنَّ كمِّية الكرتون المُستعمَلة تكون أقل ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة 10 cm

إذن، أبعاد العُلْبة الواحدة هي: $l = x = 10 \text{ cm}, w = x = 10 \text{ cm}, h = \frac{1000}{x^2} = 10 \text{ cm}$.

أتعلَّم

في هذه المسألة، تكون كمِّية الكرتون المُستعمَلة أقل ما يُمكِن إذا كانت العُلْبة على شكل مُكعَّب.

أتحقّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 2 m^3، وقاعدته مربعة الشكل.

أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

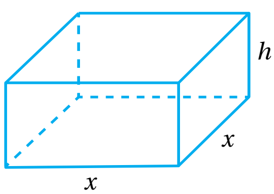
إيجاد أكبر حجم مُمكِن

يُعَدُّ إيجاد أكبر حجم مُمكِن للخزّانات أحـد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى؛ فهو يساعد على تحديد الأبعاد والتصاميم التي تنتج أكبر حجم ممكن باستعمال الكمية نفسها من مواد التصنيع.

مثال 3

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها $36\ \mathrm{m}^2$. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، على أن تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ x هو طول قاعدة الخزّان، وأنَّ h هو ارتفاعه كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران حجم الخزّان:

$V = l \times w \times h$ صيغة حجم متوازي المستطيلات

$= x \times x \times h$ بتعويض $l = x, w = x$

$= x^2 h$ بالتبسيط

- أكتب h بدلالة x باستعمال المساحة الكلية لسطح الخزّان المعطاة في السؤال:

$S = 4xh + 2x^2$ المساحة الكلية لسطح الخزّان

$36 = 4xh + 2x^2$ بتعويض $S = 36$

$h = \dfrac{36 - 2x^2}{4x}$ بكتابة المعادلة بدلالة h

$= \dfrac{18 - x^2}{2x}$ بالتبسيط

- أُعوِّض h في اقتران حجم الخزّان:

اقتران حجم الخزّان $V = x^2 h$

بتعويض $h = \frac{18 - x^2}{2x}$ $V(x) = x^2\left(\frac{18 - x^2}{2x}\right)$

بالتبسيط $= 9x - \frac{1}{2}x^3$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل حجم الخزّان هو: $V(x) = 9x - \frac{1}{2}x^3$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران، وأحدّد نوعها.

بإيجاد مشتقّة اقتران الحجم $V'(x) = 9 - \frac{3}{2}x^2$

بمساواة المشتقّة بالصفر $9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x^2 $x^2 = 6$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm\sqrt{6}$

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّه توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = \sqrt{6}$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \sqrt{6}$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الحجم $V''(x) = -3x$

بتعويض $x = \sqrt{6}$ $V''(\sqrt{6}) = -3(\sqrt{6}) < 0$

أُلاحِظ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{6}$، وهذا يعني أنَّ حجم الخزّان يكون أكبر ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة $\sqrt{6}$ m.

إذن، أبعاد الخزّان هي:

$l = x = \sqrt{6}\,\text{m},\ w = x = \sqrt{6}\,\text{m},\ h = \frac{18 - x^2}{2x} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\,\text{m}$.

أتحقّق من فهمي

لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ \text{m}^2$. أراد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، على أن يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

تطبيقات اقتصادية

من التطبيقات الاقتصاديـــة المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر ربح لمُنتَج مُعيَّن، أو إيجاد أعلى إيراد من بيعه، أو إيجاد أقل تكلفة لصنعه.

يُطلَــق على الاقتــران الذي يُمثِّل تكلفــة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن اســم **اقتــران التكلفة** (cost function)، ويُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنســبة إلى x اســم **التكلفة الحدِّية** (marginal cost)؛ ما يعني أنَّ اقتران التكلفة الحدِّية هو مشتقّة اقتران التكلفة أيْ $C'(x)$.

أمّــا الاقتــران الــذي يُمثِّل إيــراد بيــع x وحدة مــن مُنتَــج مُعيَّن فيُســمّى **اقتــران الإيراد** (revenue function)، ويُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. وأمّا مشــتقّة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى **الإيراد الحدِّي** (marginal revenue)، وهو يُمثِّل مُعدَّل تغيُّر الإيراد بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

أتعلّم

يمثّل اقتــران الإيراد ناتج ضــرب عــدد القطع في سعر بيع كل منها.

بناءً على ما سبق، فإنَّ ربح بيع x قطعة من مُنتَج مُعيَّن يعطى بالاقتران الآتي:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

حيث $P(x)$ هو **اقتران الربح** (profit function)، و**الربح الحدِّي** (marginal profit) هو مشتقّة اقتران الربح أيْ $P'(x)$.

مثال 4 : من الحياة

وجــد خبير تســويق أنَّه لبيــع x حاســوبًا من نــوع جديد، فإنَّ ســعر الحاســوب الواحــد (بالدينار) يجــب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

اقتران الإيراد	$R(x) =$ (عدد الأجهزة المَبيعة)(سعر الحاسوب الواحد)
بالتعويض	$= x(1000 - x)$

باستعمال خاصية التوزيع $= 1000x - x^2$

إذن، اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1000x - x^2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الربح.

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

بالتعويض $= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$

بالتبسيط $= -x^2 + 980x - 3000$

إذن، اقتران الربح هو: $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$.

الخطوة 3: أجد الربح الحدِّي، ثم أجد القيمة الحرجة، وأحدّد نوعها.

الربح الحدِّي $P'(x) = -2x + 980$

بمساواة المشتقّة بالصفر $-2x + 980 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x $x = 490$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 490$.

أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 490$:

بإيجاد المشتقّة الثانية لاقتران الربح $P''(x) = -2$

بما أنَّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 490$.

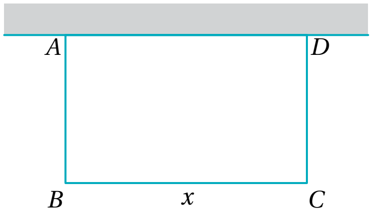
إذن، تُحقِّق الشركة أكبر ربح مُمكِن عند إنتاجها 490 جهاز حاسوب وبيعها.

أتحقّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الثلّاجات المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الثلّاجات تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الثلّاجات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

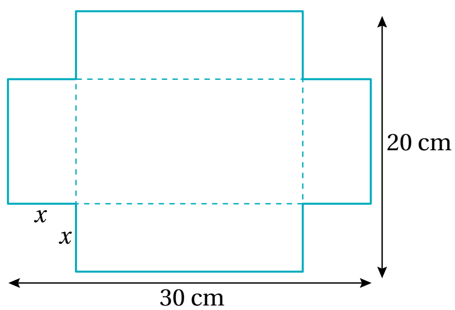
أتدرّب وأحلّ المسائل

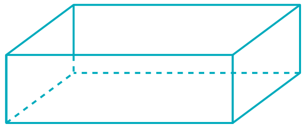
يُمثّل الشكل المجاور مخططًا لحديقة منزلية يراد بناؤها مقابل جدار حجري، إذا كان محيط الحديقة دون الجدار يساوي 300 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:



1. أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.
2. أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
3. أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.
4. **زراعة:** أراد مزارع أن يحيط منطقة مستطيلة الشكل مساحتها $216\ m^2$ من حقله بسياج، وأن يقسمها إلى نصفين بسياج موازٍ لأحد جوانبها. أجد أبعاد المنطقة التي تجعل طول السياج اللازم أقلّ ما يمكن، ثم أجد طوله.

قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 30 cm، وعرضها 20 cm. قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثمّ ثُنيت الورقة لتشكيل علبة.

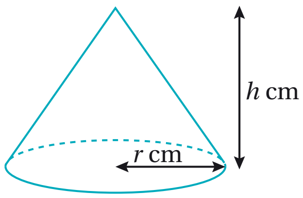




5. أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.
6. أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.

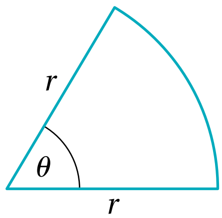
يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار، أجد كلًّا ممّا يأتي:

7. اقتران الإيراد.
8. عدد القطع x الذي يتساوى عنده الإيراد الحدِّي مع التكلفة الحدِّية.
9. اقتران الربح.
10. عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.
11. سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.



12 يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته r cm، وارتفاعه h cm، حيث: $r + h = 60$، أجد قيمتَي r و h اللتين يكون عندهما حجم المخروط أكبر ما يُمكن.

يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm، أجد كلًّا ممّا يأتي:

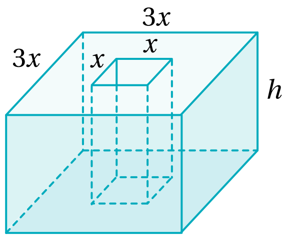


أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

13 الاقتران الذي يُمثّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

14 أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

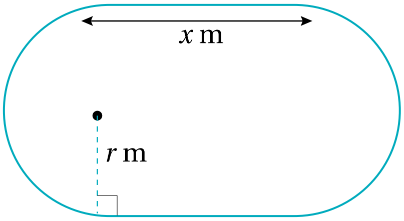
مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: تُريد إحدى شركات الشوكولاته إطلاق منتج جديد في علب من الورق المقوى. إذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات وفي داخلها فراغ على شكل متوازي مستطيلات أيضًا كما في الشكل المجاور، إذا كان حجم العلبة 2000 cm^3، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

15 الاقتران الممثّل للمِساحة الكلّية لسطح العلبة.

16 قيمة x التي تجعل المِساحة الكلّية لسطح العلبة أقلّ ما يُمكن.



تبرير: مضمار سباق مكوّن من جزأين مستقيمين طول كل منهما x مترًا، وجزأين على شكل نصف دائرة طول نصف قطر كل منهما r مترًا كما في الشكل المجاور. وكان محيط المضمار 400 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

17 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار بدلالة r.

18 أُثبتُ أنّه عندما يكون لِمساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار قيمة حرجة؛ فإنّ المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، ثم أُبيّن نوع القيمة الحرجة. أُبرّر إجابتي.

الدرس 6

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

فكرة الدرس إيجاد مشتقّات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوَّة.

مسألة اليوم يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مِساحة سطح الفقاعة؛ عندما يكون نصف قطرها 2.8 cm

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران القوَّة هو اقتران في صورة: $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^4 \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^8} \quad , \quad f(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقّة اقتران القوَّة هي: $f'(x) = nx^{n-1}$، وكيف أجد مشتقّة اقترانات تتضمَّن حدودها اقترانات قوَّة، مثل: $f(x) = x^3 + 2x$.

ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقّة اقترانات أكثر تعقيدًا، مثل: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$؟

أُلاحِظ أنَّ الاقتران: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ هو اقتران مُركَّب، حيث: $h(x) = x^3 + 2x$، و $g(x) = x^7$ مُركَّبتا $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{(\overbrace{x^3 + 2x}^{\text{الداخلي}})^7}_{\text{الخارجي}}$$

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ بإيجاد مشتقّة الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمتها عند الاقتران الداخلي، ثم ضربها في مشتقّة الاقتران الداخلي، في ما يُسمّى **قاعدة السلسلة** (the chain rule).

لغة الرياضيات

يُسمّى $h(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركَّب، ويُسمّى $g(x)$ اقترانًا خارجيًّا له، حيث: $f(x) = (g \circ h)(x)$.

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين كما يأتي:

نظرية **قاعدة السلسلة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 1

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $y = (x^2 + 1)^3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = x^2 + 1$، والاقتران الخارجي له: $y = u^3$.

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \text{مشتقّة الاقتران الداخلي}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad \text{مشتقّة الاقتران الخارجي}$$

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \qquad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= 3u^2 \times 2x \qquad \text{بتعويض } \frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 2x$$

$$= 6x(x^2 + 1)^2 \qquad \text{بتعويض } u = x^2 + 1$$

2 $y = \sqrt{4-3x}$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بالصورة الأُسِّية.

$y = \sqrt{4-3x}$ الاقتران المعطى

$= (4-3x)^{\frac{1}{2}}$ الصورة الأُسِّية

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي ومشتقّة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = 4-3x$، والاقتران الخارجي له: $y = u^{\frac{1}{2}}$.

$\frac{du}{dx} = -3$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 3: أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ قاعدة السلسلة

$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \times -3$ بتعويض $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}, \frac{du}{dx} = -3$

$= -\frac{3}{2}(4-3x)^{-\frac{1}{2}}$ بتعويض $u = 4-3x$

$= -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$ الصورة الجذرية

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (x^2-2)^4$

b) $y = \sqrt{x^3+4x}$

أتذكّر

لأيّ عدد حقيقي a، ولأيّ عددين صحيحين m و n، حيث $n > 1$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، إلّا إذا كانت $a < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر يكون غير مُعرَّف.

قاعدة سلسلة القوّة

تعرَّفْتُ في المثال السابق كيف أجد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$، وهو أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا. والآن سأتعرَّف قاعدة عامة لإيجاد مشتقّة هذا الاقتران تُسمّى **قاعدة سلسلة القوّة** (power chain rule)، وهي حالة خاصة من قاعدة السلسلة، حيث الاقتران الخارجي f هو اقتران قوّة.

مفهوم أساسي

قاعدة سلسلة القوّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

يُمكِن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^n$ عند نقطة ما كما في المثال الآتي:

مثال 2

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = (2x^4 - x)^3 , x = 1$

$f(x) = (2x^4 - x)^3$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3(2x^4 - x)^2 \times \frac{d}{dx}(2x^4 - x)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= 3(2x^4 - x)^2 \times (8x^3 - 1)$ باشتقاق $2x^4 - x$

$f'(1) = 21$ بتعويض $x = 1$

2 $f(x) = \sqrt{1 + x^3} , x = 2$

$f(x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$ الصورة الأُسِّية

$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(1 + x^3)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2)$ باشتقاق $1 + x^3$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$ الصورة الجذرية

$f'(2) = 2$ بتعويض $x = 2$

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

3) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,,\, x = -2$

الصورة الأُسّية $y = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

قاعدة سلسلة القوّة $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$

باشتقاق x^2-1 $= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times 2x$

الصورة الجذرية $= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

بتعويض $x=-2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}$

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x=a$.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = (x^4+1)^5\,,\, x=1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}\,,\, x=2$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5}\,,\, x=4$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشتقّة اقتران في بعض الحالات، يتعيَّن تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مراجعة المفهوم **مشتقّة المجموع، ومشتقّة الفرق، ومشتقّة مضاعفات القوّة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإنَّ مشتقّة كلٍّ من $f(x)+g(x)$، و $f(x)-g(x)$، و $af(x)$ هي:

- مشتقّة المجموع، أو مشتقّة الفرق $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- مشتقّة مضاعفات الاقتران $(af)'(x) = af'(x)$

مثال 3

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

$f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$	الاقتران المعطى
$f'(x) = 15(1-x^2)^2 \times \frac{d}{dx}(1-x^2) + 4$	قواعد سلسلة القوّة، ومضاعفات الاقتران، والمجموع، والثابت
$= 15(1-x^2)^2 \times -2x + 4$	باشتقاق $1-x^2$
$= -30x(1-x^2)^2 + 4$	بالتبسيط

2) $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

$f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$	الاقتران المعطى
$f'(x) = 3(2x+1)^2 \times \frac{d}{dx}(2x+1) - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$	قاعدتا سلسلة القوّة، ومشتقّة الفرق
$= 3(2x+1)^2 \times 2 - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$	باشتقاق $2x+1$
$= 6(2x+1)^2 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$	بالتبسيط

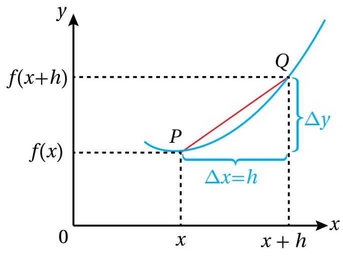
أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

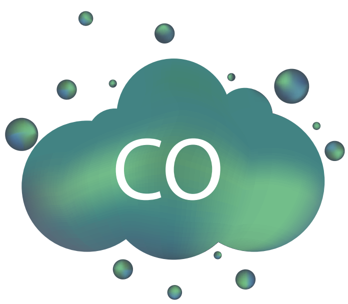
مُعدَّل التغيُّر



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقّة هي نهاية ميل قاطع المنحنى بين النقطتين: $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ عندما $h \to 0$. وبما أنَّ ميل القاطع هو مُعدَّل تغيُّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x، فإنَّ المشتقّة هي مُعدَّل تغيُّر أيضًا، ولكنْ عند لحظة (نقطة) مُعيَّنة. فمثلًا: إذا كان المطلوب هو إيجاد $\frac{dy}{dx}$، فهذا يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.

تتطلَّب كثير من المواقف الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة، مثل إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية أوَّل أكسيد الكربون في الجو بالنسبة إلى عدد السكّان.

مثال 4 : من الحياة



تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكّان بالألف نسمة، علمًا بأنَّ C يقاس بأجزاء من المليون (مثلًا: $C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون):

معلومة

أوَّل أكسيد الكربون هو غاز عديم اللون والرائحة، وضارٌّ بالإنسان؛ إذ يؤدي استنشاقه إلى منع الدم من حمل الأكسجين، وعدم استعمال الأنسجة للأكسجين بصورة فاعلة.

1 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان.

أجد $C'(p)$:

$$C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$$ الاقتران المعطى

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ قاعدة السلسلة

إذن، مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان هو: $C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان عندما يكون عدد السكّان 4 آلاف نسمة، وأفسّر معنى الناتج.

أجد $C'(4)$:

$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$ مشتقّة $C(t)$

$$C'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$ بتعويض $p = 4$

$$= 0.24$$ بالتبسيط

إذن، إذا كان عدد السكّان 4 آلاف نسمة، فإنَّ مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

أتعلَّم

تشير الإشارة الموجبة إلى ازدياد مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون.

أتحقّق من فهمي

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، وأفسّر معنى الناتج.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (1 + 2x)^4$

2) $f(x) = (3 - 2x^2)^{-5}$

3) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$

4) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

5) $f(x) = 4(2 + 8x)^4$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x - 8}}$

7) $f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$

8) $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$

9) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$

10) $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

11) $f(x) = \sqrt{(2x - 5)^3}$

12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}, x = \frac{1}{4}$

14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

15) $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

16) $y = \sqrt[3]{2u+5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

17) $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

18) $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 1$

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن (بآلاف الدنانير):

19) أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة.

20) أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة عندما يكون عدد القطع المُنتَجة 20 قطعة.

علوم: يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

21) أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

22) أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$، فأجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 3$:

23) $f(x) = g(h(x))$

24) $f(x) = (h(x))^3$

إذا كان $y = \sqrt{2x+5}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

25 أُثبتُ أنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

26 أجد النقطة التي يقطع عندها مماس الاقتران عند النقطة $(2, 3)$ المحور x.

إذا كان $y = \frac{600}{x^2+50}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$.

28 أجد معادلة المماس عند النقطة $(10, 4)$.

مهارات التفكير العليا

29 **تبرير**: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، وأبرّر إجابتي.

30 **تبرير**: أجد مشتقّة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، وأبرّر إجابتي.

31 **أكتشف المُختلِف**: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف؟ أبرّر إجابتي.

$p(x) = x^2 + 1$	$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$	$h(x) = (x^2+1)^3$	$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

32 **تحدٍّ**: أجد مشتقّة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

33 **تحدٍّ**: أُثبتُ أنّ مماس منحنى الاقتران $y = (x^2 + x - 2)^3 + 3$ عند النقطة $(1, 3)$، هو أيضًا مماس للمنحنى عند نقطة أُخرى.

أختار رمز الإجابة الصحيحة، لكل ممّا يأتي:

1 إذا كان $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $y' = 8x^3 - 5x^2 + 2$

b) $y' = 4x^4 - 15x^2 + 2$

c) $y' = 8x^3 - 15x + 2$

d) $y' = 8x^3 - 15x^2$

2 إذا كان $f(x) = (x-3)^2$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x - 3$ b) $x - 6$

c) $2x - 6$ d) $2x + 9$

3 إذا كان $y = \frac{2x^4 + 9x^2}{3x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{2x^4}{3} + 6x$ b) $2x^2 + 3$

c) $2x + 3$ d) $8x^3 + 18x$

4 إذا كان $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ b) $8x^{\frac{-1}{3}}$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ d) $4x^{\frac{-1}{3}}$

5 إذا كان $f(x) = (1-x)^3$، فإنّ $f''(x)$ تساوي:

a) $-3(1-x)^2$ b) $3(1-x)^2$

c) $6(1-x)$ d) $-3(1-x)$

6 إذا كان $f(x) = x^{\pi}$، فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{22}{7}$ b) $\frac{7}{22}$

c) $\frac{22}{7}x^{\frac{15}{7}}$ d) $\frac{7}{22}x^{\frac{15}{7}}$

7 يوجد للاقتران $y = 4x^2 + 6x + 3$ قيمة حرجة عندما x تساوي:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

8 يوجد للاقتران $y = -5x^2 + 7x + 4$ قيمة عظمى محلّية عندما x تساوي:

a) 0.7 b) 1

c) 0 d) -0.7

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9 $\lim\limits_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$

10 $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

11 $\lim\limits_{x \to -4} \frac{|x-4|}{x-4}$

12 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

13 $f(x) = 3x - 2 \ , \ x = 5$

14 $g(x) = \frac{1}{x} \ , \ x = 0$

15 $h(x) = \begin{cases} 3x + 4 & , x < 3 \\ 2x - 1 & , x \geq 3 \end{cases} \ , \ x = 3$

إذا كان الاقتران $y = 2x + \frac{8}{x}$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

16 $\frac{dy}{dx}$.

17 ميل مماس المنحنى عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = 10$.

18 إذا كان الاقتران $y = (3x + a)(x - 1)$، حيث a ثابت؛ فأجد بدلالة a إحداثيّات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي a.

إذا كان الاقتران $y = x^2 (x^2 - p)$، حيث $p > 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

19 مشتقّة الاقتران بدلالة p.

20 النقاط الحرجة للاقتران؛ إذا كانت $p = 8$.

21 نوع النقاط الحرجة للاقتران؛ عندما $p = 8$.

22 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12

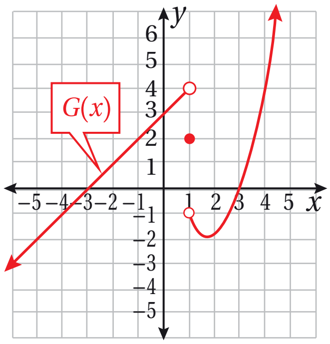
أستعمل اختبار المشتقّة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

23 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

24 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

25 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

أستعملُ التمثيل البياني لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



26 $\lim\limits_{x \to 1} G(x)$

27 $\lim\limits_{x \to -2} G(x)$

28 $\lim\limits_{x \to -3} G(x)$

29 إذا كان الضغط والحجم لغاز مُعيّن يرتبطان بالعلاقة: $pV = 1200$، حيث p الضغط وV الحجم، ويزداد الضغط مع الزمن (t) بالثواني وفقًا للعلاقة $p = 10 + 0.4\sqrt{t}$. فأجد معدّل تغيّر حجم الغاز بالنسبة إلى t عندما $t = 100$

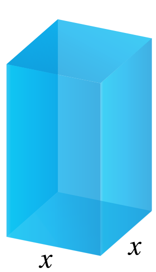
أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

30 $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$

31 $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

32 يُمثّل الاقتران: $s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2,\ t \geq 0$ موقع سيّارة تتحرك في مسار مستقيم، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار. أجد سرعة السيّارة بعد 10 ثوان من بدء حركتها.

33 صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها x cm كما في الشكل المجاور. إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي 144 cm؛ فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.



الوحدة 3

الاحتمالات
Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

يستفاد من علم الاحتمالات في مجالات عدّة مهمة، مثل: الطب، والزراعة، والاقتصاد، والأرصاد الجوية. فالطبيب الذي يبحث في انتشار مرض مُعْدٍ يعكف على دراسة احتمال انتقال المرض من شخص إلى آخر، وموظفو قطاع التأمين يَلزمهم حساب نسبة المخاطر، وإمكانية تعرُّض شركات التأمين للخسائر، أو تحقيقها الربح.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ استعمال مُخطَّط الشجرة وجداول الاحتمال لتحديد نواتج تجارب عشوائية.

✓ حساب احتمالات حوادث بسيطة.

✓ حساب احتمالات حوادث مُركَّبة مستقلة، وغير مستقلة.

✓ حساب احتمالات حوادث متنافية، وغير متنافية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد طرائق إجراء عملية، أو تجربة عشوائية.
- حساب احتمالات حوادث باستعمال التباديل والتوافيق.
- ماهية المُتغيِّرات العشوائية، وإيجاد قِيَمها.
- إنشاء التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّرات عشوائية.
- حساب توقُّع المُتغيِّر العشوائي، وتباينه.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (44 – 41) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التباديل والتوافيق
Permutations and Combinations

فكرة الدرس

- تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حلِّ المسائل.
- تعرُّف التباديل، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.
- تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات

مبدأ العَدِّ الأساسي، التباديل، المضروب، التوافيق.

مسألة اليوم

يتألَّف فريق للسباحة من 8 سبّاحينَ. إذا أراد مُدرِّب الفريق اختيار سبّاحِينِ اثنين للسباحة في الجولة الأولى في إحدى المنافسات، فبكم طريقةً يُمكِنه الاختيار من بين هؤلاء السبّاحينَ؟

مبدأ العَدِّ الأساسي

من السهل إيجاد عدد الطرائق اللازمة لترتيب مجموعة صغيرة. فمثلًا: توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$، هما: (a, b)، و (b, a)؛ إذ يُختار الحرف الأول بطريقتين، ثم يُختار الحرف الثاني بعد اختيار الحرف الأول بطريقة واحدة. وقد تعلَّمْتُ سابقًا طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مُخطَّط الشجرة، ومُخطَّط الاحتمال.

ولكنْ، إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق المُمكِنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا. وفي كثير من الحالات، يقتصر الاهتمام على معرفة عدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العَدِّ الأساسي** (fundamental counting principle) لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من المراحل بعضها في بعض.

أتذكَّر

يُطلَق على الخيارات المُمكِنة لتجربة عشوائية ما اسم **النواتج**، ويُطلَق على جميع النواتج المُمكِنة لها اسم **الفضاء العيني**، الذي يُرمَز إليه بالرمز (Ω).

مفهوم أساسي — **مبدأ العَدِّ الأساسي**

للتجربة العشوائية التي يُمكِن إجراؤها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الأولى هو K_1، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الثانية هو K_2، ...، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة n هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة هو:

$$K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$$

مثال 1

بكم طريقةً يُمكِن تكوين عدد زوجي يتألّف من 3 أرقام مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 4, 6, 7, 9؟

للرقم الأول في منزلة الآحاد (المرحلة الأولى) 3 خيارات مُمكِنة، هي الأرقام: 6 ,4 ,2، وللرقم الثاني في منزلة العشرات (المرحلة الثانية) 5 خيارات مُمكِنة (5 أرقام)؛ لأنَّ أرقام العدد مختلفة، ولا يُمكِن تكرارها. أمّا الرقم في منزلة المئات (المرحلة الثالثة) فله 4 خيارات مُمكِنة (4 أرقام).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة المئات		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة العشرات		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة الآحاد
4	×	5	×	3

$$4 \times 5 \times 3 = 60$$

إذن، يُمكِن تكوين هذا العدد بـ 60 طريقة.

أتحقَّق من فهمي

بكم طريقةً يُمكِن تكوين عدد فردي يتألَّف من 4 أرقام مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟

التباديل

التباديل (permutations) هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء، بما في ذلك ترتيب اختيار هذه الأشياء. فمثلًا: توجد 6 تباديل مُمكِنة لترتيب الأحرف: A، وB، وC:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

أتعلّم

ترتيب العناصر مهمٌّ في التباديل.

مثال 2

1 **كم كلمةً (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف السادس		عدد طرائق اختيار الحرف الخامس		عدد طرائق اختيار الحرف الرابع		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
1	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

إذن، يُمكِن تكوين 720 كلمةً من أحرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرار أيِّ حرف فيها.

2 **كم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
6	×	5	×	4	=	120

إذن، يُمكِن تكوين 120 كلمةً تتألف من 3 أحرف من أحرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرار أيِّ حرف فيها.

أتحقَّق من فهمي

a) كم كلمةً (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

b) كم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

في الفرع الأول من المثال السابق، استُعمِل التعبير: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ لحساب عدد تباديل 6 أحرف مختلفة، أُخِذ منها 6 أحرف كل مرَّة، وهو تعبير يُكتَب في صورة (6!)، ويُقرَأ: **مضروب** (factorial) العدد 6

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلًا: أجد مضروب العدد 6 بالضغط على الأزرار الآتية:

6 ! =

مفهوم أساسي — المضروب

يُكتَب مضروب العدد الصحيح الموجب n في صورة ($n!$)، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n كالآتي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1$$

أتعلَّم

$0! = 1$

أمّا الفرع الثاني من المثال نفسه فقد تضمَّن إيجاد عدد تباديل 6 أحرف، أُخِذ منها 3 أحرف كل مرَّة؛ لذا لا يُمكِن استعمال المضروب لإيجاد التباديل في هذه الحالة؛ لأن التعبير المستعمل هو: $6! \neq 6 \times 5 \times 4$

بوجه عام، يُمكِن استعمال إحدى الصيغتين الآتيتين لإيجاد عدد التباديل:

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرمزين الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

nPr , $P(n, r)$

مفهوم أساسي — **التباديل**

عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة:

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة، هو:

$$_nP_n = n!$$

حيث n عدد صحيح موجب.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 5 كل مرَّة، هو:

$$_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة:

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 3 كل مرَّة، هو:

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

مثال 3 : من الحياة

1 وظائف: **أعلن مطعم عن حاجته إلى عامل في صالته الرئيسة، وإلى عامل آخر في المطبخ. إذا تقدَّم للوظيفتين 4 أشخاص (أحمد، رامي، جمانة، عبير)، فبكم طريقةً يُمكِن اختيار اثنين منهم لهاتين الوظيفتين؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فاختيار أحمد للعمل في الصالة، وجمانة للعمل في المطبخ، يختلف عن اختيار جمانة للعمل في الصالة، وأحمد للعمل في المطبخ. وكذلك لا يُمكِن اختيار الشخص نفسه لكلتا الوظيفتين؛ لذا أستعمل التباديل لإيجاد عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مع مراعاة الترتيب:

أتعلَّم

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل.

فمثلًا: أجد ناتج $_4P_2$ بالضغط على الأزرار الآتية:

4 $_nP_r$ 2 =

عدد تباديل n من العناصر المختلفة أُخِذَ منها r كلّ مرَّة $\quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

بتعويض $n = 4$، و $r = 2$ $\quad {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$

باستعمال تعريف المضروب، والاختصار $\quad = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$

بالتبسيط $\quad = 12$

إذن، يُمكِن اختيار شخصين لهاتين الوظيفتين بـ 12 طريقة.

2 صلة رحم: **يرغب حسن في زيارة بيت جدَّته، وبيت عمَّته، وبيت خالته أول أيام عيد الفطر المبارك. بكم طريقةً يُمكِنه ترتيب مواعيد الزيارة؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة من دون تكرار البدائل؛ لذا أستعمل عدد طرائق اختيار 3 عناصر من بين 3 عناصر، مع مراعاة الترتيب:

عدد تباديل n من العناصر المختلفة أُخِذَ منها n كلّ مرَّة $\quad {}_nP_n = n!$

بتعويض $n = 3$ $\quad {}_3P_3 = 3!$

باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج $\quad = 3 \times 2 \times 1 = 6$

إذن، يُمكِن لحسن ترتيب مواعيد الزيارة بـ 6 طرائق.

أتحقَّق من فهمي

a) اشتركت 10 خيول في منافسة لسباق للخيل. بكم طريقةً يُمكِن للخيول إنهاء السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

b) تمكَّن 4 طلبة من بلوغ المرحلة قبل النهائية لمسابقة الرياضيات الذهنية. بكم طريقةً يُمكِن لهؤلاء الطلبة الوقوف متجاورين لالتقاط صورة معًا؟

التوافيق

التوافيق (combinations) هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء من دون اهتمام بالترتيب. فمثلًا: عند اختيار حرفين عشوائيًّا من الأحرف: A, B, C, D، يُمكِن كتابة جميع التباديل المُمكِنة لاختيار حرفين من هذه الأحرف، ثم حذف الأزواج التي تكرَّرت (لأنَّ الترتيب في التوافيق غير مهم) كالآتي:

(A, B)   (A, C)   (A, D)   ~~(B, A)~~   (B, C)   (B, D)

~~(C, A)~~   ~~(C, B)~~   (C, D)   ~~(D, A)~~   ~~(D, B)~~   ~~(D, C)~~

(D, B) و (B, D) هما الزوج نفسه؛ لأنَّ الترتيب غير مهم.

إذن، توجد 6 توافيق مُمكِنة لاختيار حرفين من الأحرف: A, B, C, D.

مفهوم أساسي — التوافيق

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: n و r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

مثال: عدد توافيق 10 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 7 كل مرَّة، هو:

$${}_{10}C_7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$$

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

$nCr,\ C(n, r),\ \binom{n}{r}$

مثال 4 : من الحياة

برلمان طلابي: **أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 طالبات من بين 6 طالبات مُترشِّحات (سهى، مرام، أسماء، سُمَيَّة، لانا، نداء) لتمثيل المدرسة في مؤتمر البرلمان الطلابي الذي تُنظِّمه مديرية التربية التي تَتْبَع لها المدرسة.**

معلومة

للبرلمان الطلابي دور رئيس في صقل شخصية الطالب القيادية، وتَمثُّل معاني الديمقراطية، والمشاركة السياسية؛ ما يُمكِّنه من الإسهام بفاعلية في رفعة الوطن وازدهاره.

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين الطالبات المُترشِّحات؛ فإنَّني أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار 3 طالبات من بين الطالبات الست المُترشِّحات على النحو الآتي:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ عدد توافيق n من العناصر المختلفة أُخِذ منها r كلّ مرَّة

$$ {}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} $$ بتعويض $n = 6$، و $r = 3$

$$ = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 3 \times 2} $$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$$ = 20 $$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

ألعاب: بكم طريقةً يُمكِن اختيار فريق كرة سلَّة يضمُّ 5 لاعبين من بين 8 لاعبين؟

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا: أجد ناتج ${}_6C_3$ بالضغط على الأزرار الآتية:

6 ${}_nC_r$ 3 =

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

تعلَّمْتُ سابقًا كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتوافيق، والتباديل. والآن سأُوظِّف ذلك كله في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن التجربة العشوائية.

مثال 5

1 رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يكون حرف النون وحرف العين في الترتيب المختار متجاورين؟

ن	و	ا	ع	ي	ر

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني أنَّ حرف النون وحرف العين في الترتيب المختار متجاوران.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر الفضاء العيني (Ω).

عدد عناصر الفضاء العيني هو عدد طرائق ترتيب 6 عناصر (بطاقات) في صف واحد مع مراعاة الترتيب:

$$ n(\Omega) = {}_6P_6 = 6! $$ عدد تباديل 6 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 6 كلَّ مرَّة

$$ = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720 $$ باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج

أتذكَّر

يُستعمل الرمز $n(\Omega)$ للتعبير عن عدد عناصر الفضاء العيني.

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث (A).

عدد عناصر الحادث A هو عدد طرائق ترتيب البطاقات التي يكون فيها حرف النون وحرف العين متجاورين. ويتجاور هذان الحرفان بطريقتين فقط، وفي كل من هاتين الطريقتين يمكن عدّ حرفي النون والعين المتجاورين عنصرًا واحدًا، وعندها يصبح عدد عناصر المجموعة 5، وعدد طرائق ترتيبها هو $_5P_5$ ؛ لذا، فإنَّ:

$$n(A) = 2 \times {}_5P_5$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 2 \times 5! = 2\times5\times4\times3\times2\times1$$ باستعمال تعريف المضروب

$$= 240$$ بإيجاد الناتج

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{240}{720}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$= 0.33$$ بإيجاد الناتج

إذن، احتمال أنْ يكون حرف النون وحرف العين متجاورين هو 0.33

أتذكّر

احتمال الحادث هو فرصة وقوعه، ويُرمَز إليه بالرمز $P(A)$، فإذا كانت نواتج التجربة العشوائية متساوية الاحتمال فإن احتمال وقوع أي حادث يساوي نسبة عدد عناصر الحادث إلى عدد النواتج الممكنة جميعها (الفضاء العيني).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

2 **كُتِبت الأعداد من 1 إلى 20 على 20 بطاقة صغيرة مُتماثِلة، وُضِعت جميعها في صندوق، ثم اختيرت اثنتان منها معًا بصورة عشوائية. ما احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديين؟**

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار بطاقتين معًا عشوائيًّا، وأنَّهما تحملان عددين فرديين (الترتيب غير مهم).

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

عدد عناصر الفضاء العيني يساوي عدد طرائق اختيار بطاقتين معًا من الصندوق بصورة عشوائية. بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_{20}C_2$$ عدد توافيق 20 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 2 كلّ مرّة

$$= \frac{20!}{2!(20-2)!}$$ بالتعويض في صيغة التوافيق

$$= \frac{20 \times 19 \times \cancel{18!}}{2 \times \cancel{18!}}$$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$$= 190$$ بالتبسيط

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (A).

عدد البطاقات التي تحمل أعدادًا فرديةً هو 10 بطاقات؛ لذا فإنَّ $n(A)$ يُمثِّل عدد طرائق اختيار بطاقتين معًا بصورة عشوائية من بين 10 بطاقات بحيث تحملان عددين فرديّين.

بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

$$n(A) = {}_{10}C_2$$
عدد توافيق 10 من العناصر المختلفة أُخِذ منها 2 كلّ مرَّة

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!}$$
بالتعويض في صيغة التوافيق

$$= \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}}$$
باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$$= 45$$
بالتبسيط

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$$P(A) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)} = \frac{45}{190}$$
بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$= \frac{9}{38}$$
بالتبسيط

إذن، احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديّين هو $\frac{9}{38}$

أتحقَّق من فهمي

a) رُتِّبت البطاقات الآتية عشـــوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أن يكون حرف السين وحرف الميم في الترتيب المختار متجاورين؟

م س ا ف ر و ن

b) صنـــدوق فيه 16 كرة مُتماثِلــة، كلٌّ منها تحمل عددًا مـــن بين الأعداد 1 إلى 16، إذا سُحِبت كرتان معًا بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ تحمل الكرتان المسحوبتان عددين زوجيين؟

في بعض المواقف، يُختار r عنصرًا بصورة عشوائية من بين n_1 من العناصر، ويُختار m عنصرًا مـــن بين n_2 من العناصر، فيكون عدد العناصر الكلـــي $n_1 + n_2$، وقد يُختار r و m مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة لذلك (توافيق)، تبعًا لِما يقتضي الموقف.

مثال 6 : من الحياة

لجنة اجتماعية: يعمل في أحد المصانع 35 عاملًا، و20 عاملةً. أراد صاحب المصنع تشكيل لجنة اجتماعية للعاملين والعاملات تضمُّ 5 أعضاء يُختارون بصورة عشوائية:

1 ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال؟

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار عاملتين وثلاثة عمّال لهذه اللجنة.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو عدد طرائق اختيار 5 أعضاء عشوائيًّا من بين جميع العاملين والعاملات وعددهم $20 + 35$؛ أي 55 عاملًا وعاملةً. الترتيب هنا غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_{55}C_5$$ عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 55 عنصرًا

$$= 3478761$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث (A).

أجد $n(A)$، وهو عدد طرائق اختيار عاملتين من بين 20 عاملةً، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عمّال من بين 35 عاملًا، علمًا بأنَّ الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين.

بحسب مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

$$n(A) = {}_{20}C_2 \times {}_{35}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1243550$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1243550}{3478761}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.357$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال هو 0.357 تقريبًا.

أتذكّر

أستعمل مبدأ العدِّ لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية ذات مراحل عدة، وذلك بضرب عدد الطرائق الممكنة في كل مرحلة من المراحل ببعضها البعض.

2 ما احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات؟

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (B) يعني أنَّ رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، وأنَّ الأعضاء الآخرين من العاملات.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو عـــدد طرائق اختيار رئيس اللجنة وأمين الصندوق عشـــوائيًّا من بين جميع العاملين والعاملات (الترتيب هنا مهم) وعددهم 55، مضروبًا في عدد طرائق اختيار الأعضاء الآخرين من بين جميع العاملين والعاملات المتبقين بعد اختيار رئيس اللجنة وأمين الصندوق (الترتيب هنا غير مهم) وعددهم هنا 53:

$$n(\Omega) = {}_{55}P_2 \times {}_{53}C_5$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 69575220$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (B).

أجد $n(B)$، وهو عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة وأمين الصندوق من بين 35 عاملًا (الترتيب مهم)، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عاملات من بين 20 عاملةً (الترتيب غير مهم):

$$n(B) = {}_{35}P_2 \times {}_{20}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1356600$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1356600}{69575220}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.02$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأميـــن الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات هو 0.02 تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

أعمال: يراد تشكيل فريق عمل مُكوَّن من 7 موظفين في إحدى الشركات يُختارون عشوائيًّا من بين 9 مبرمجين و5 محاسبين:

a) ما احتمال أنْ يضم الفريق 4 مبرمجين و3 محاسبين؟

b) ما احتمال أنْ يضم الفريق 4 مبرمجين، و3 محاسبين حيث رئيس الفريق ونائبه محاسبان.

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

كم عددًا مُؤلَّفًا من 4 أرقام يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 5:

1 إذا سُمِح بالتكرار؟

2 إذا لم يُسمَح بالتكرار؟

3 كم عددًا يحوي 6 منازل مختلفة، ويقبل القسمة على 5، يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0؟

إرشاد: يقبل العدد القسمة على 5 إذا كانت آحاده 0 أو 5.

4 طعام: بكم طريقةً مختلفةً يُمكِن لشخص اختيار وجبة غداء تحوي طبقًا رئيسًا واحدًا، وطبق حساء، وطبق سَلطة، من قائمة الطعام المجاورة؟

قائمة الطعام

أنواع السَّلطة	أنواع الحساء
سَلطة عادية.	عدس.
سَلطة ذُرَة.	خضراوات مُتنوِّعة.
سَلطة حارَّة.	فُطْر.
سَلطة شمندر.	

الطبق الرئيس

منسف. مقلوبة. كبسة.

5 كم عددًا زوجيًّا أقل من 900 يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5, 6, 7, 8, 9؛ شرط عدم استعمال الرقم أكثر من مرَّة واحدة في أيِّ عدد؟

هدايا: لدى هالة 6 أقــراص مُدمَجة تحوي موضوعات تعليميــة مُتنوِّعة، و4 أقراص أُخرى تحوي مقاطع رياضية مُتعدِّدة. ترغب هالة في إهداء 4 من هذه الأقراص إلى صديقتها ردينة:

6 ما عدد طرائق اختيار الهدية؟

7 ما عدد طرائق اختيار الهدية إذا ضمّنتها هالة قرصًا واحدًا على الأقل من كل نوع؟

8 زراعة: يضمُّ قسم التطوير في إحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم رنا وأحمد. ما احتمال اختيار رنا وأحمد لحضور ندوة عن المُنتَجات المُعالَجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

معلومة

تُنتَج بعض الأغذية المُعدَّلة وراثيًّا عن طريق إجراء تغييرات في تسلسلها الجيني الطبيعي (DNA)، ويُعتقَد أنَّ هذه الأغذية ضارَّة بصحة الإنسان.

9 رياضة: يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلسًا مُكوَّنًا من 14 سيدة و10 رجال. قرَّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغَّرة من المجلس تضمُّ 4 أعضاء بصورة عشوائية، ويُنتخَب منها رئيس للجنة، وأمين للسر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من 3 سيدات تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟

عائلة تضمُّ 6 أولاد و3 بنات. أرادت الأم اختيار 4 منهم لإعداد وجبة العشاء:

10 ما احتمال اختيار اثنين من الأولاد، واثنتين من البنات لإعداد وجبة العشاء؟

11 ما احتمال اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة؟

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

12 $8!$

13 $9! - 2 \times 7!$

14 $\frac{6!}{2! \times 3!}$

15 $\frac{{}_6P_3 + {}_7P_4}{{}_5P_3}$

16 ${}_8C_3 \times {}_{11}C_6$

17 $\frac{{}_{12}C_4 + {}_{10}C_6}{{}_6C_2}$

أجد قيمة n في كلٍّ ممّا يأتي:

18 $n! = 720$

19 ${}_nP_2 = 42$

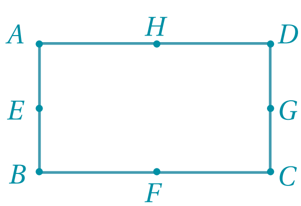
20 ${}_nP_3 = 10 \times {}_nP_2$

21 ${}_nC_3 = 26n$

22 ${}_nC_5 = {}_nC_7$

23 ${}_nC_3 - {}_{(n-2)}C_3 = 64$

24 هندسة: إذا اختيرت 3 نقاط عشوائيًّا من بين النقاط: A, B, C, D, E, F, G, H في الشكل المجاور، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟



مهارات التفكير العليا

25 تبرير: متى يكون ${}_nC_r = {}_nP_r$؟ أُبرِّر إجابتي.

26 مسألة مفتوحة: أكتب مسألة تتضمَّن حادثًا احتماله $\frac{1}{{}_{10}C_3}$.

27 تبرير: بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الحادي عشر الذي يضم 14 لاعبًا. أراد معلِّم التربية الرياضية أنْ يُوزِّع عشوائيًّا على كل لاعب قميصًا رياضيًّا من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14. ما احتمال حصول صالح على القميص رقم 9، وحصول بلال على القميص رقم 10؟ أبرر إجابتي.

الدرس 2

المُتغيِّرات العشوائية

Random Variables

فكرة الدرس

- تعرُّف المُتغيِّر العشوائي، وإنشاء توزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقُّع والتباين لمُتغيِّر عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات

المُتغيِّر العشوائي، التوزيع الاحتمالي، التوقُّع، التباين.

مسألة اليوم

أُلقِي حجرا نرد منتظمان ومتمايزان معًا مرَّة واحدة، ثم دُوِّن الفرق المُطلَق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما الفرق الذي احتماله أكبر؟

المتغيِّر العشوائي

المُتغيِّر العشوائي (random variable) هو مُتغيِّر يأخذ قيمًا عددية تعتمد على نواتج تجربة عشوائية.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ H تعني صورة، وأنَّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر الفضاء العيني للتجربة

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

عدد الصور المُرتبِط بكل عنصر

$$x = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

إذن، مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

رموز رياضية

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X.

التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي

التوزيع الاحتمالـــي (probability distribution) للتجربة العشـــوائية هـــو اقتران يربط قِيَم المُتغيِّر العشـــوائي باحتمالات وقوعها في التجربـــة، ويُرمَز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

أتعلَّم

مجال التوزيع الاحتمالي هـــو مجموعـــة قِيَـــم المُتغيِّـــر العشـــوائي، ومـــداه مجموعـــة قِيَـــم الاحتمالات المقابلة.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه عند إلقاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قِيَم المُتغيِّر العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

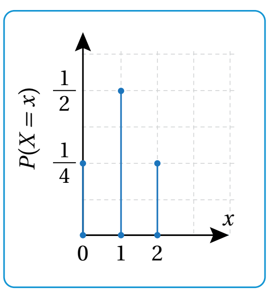
وبذلك تكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}\ , P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ , P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني:

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي



مثال 2

في تجربة إلقـــاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشـــوائي X على مجموع العددين الظاهرين علـــى الوجهين العلويين، فأجد التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قِيَم المُتغيِّر X.

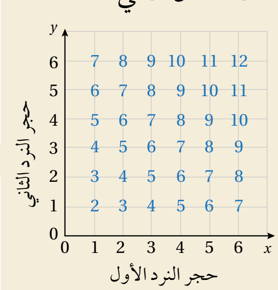
$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قِيَم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد النواتج	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
الاحتمال $P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

أتذكَّر

عدد النواتج المُمكِنة في تجربة إلقـــاء حجري نرد منتظميـــن ومتمايزين معًا مرَّة واحدة هو 36 ناتجًا، ويُمكِن إيجاد قيم x وعدد النواتج باستعمال مُخطَّط الاحتمال الآتي:



أتحقَّق من فهمي

سُحِبت بطاقتان عشوائيًّا دون إرجاع من وعاء يحوي البطاقات الآتية:

3	0	3	1

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على هاتين البطاقتين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X.

أُلاحِظ في المثال السابق أنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي يساوي 1:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=1$$

وهذه الخاصية عامة لأيِّ مُتغيِّر عشوائي.

مفهوم أساسي — اقتران التوزيع الاحتمالي

بالكلمات: إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا، فإنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي يساوي 1

بالرموز: إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا، وكان $P(X=x)$ اقتران التوزيع الاحتمالي، فإنَّ $\sum P(X=x)=1$.

تساعد خاصية مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي على إيجاد احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي، ثم حساب احتمالات ضمن شروط مُحدَّدة على قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.2	a	$2a$	0.25

1 أجد قيمة a.

$0.1+0.2+a+2a+0.25=1$ لأنَّ $\sum P(X=x)=1$

$0.55+3a=1$ بجمع الحدود المتشابهة

$3a=0.45$ بطرح 0.55 من طرفي المعادلة

$a=0.15$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

2 أجد ناتج: $P(X \leq 0)$.

$P(X \leq 0) = P(X = 0) + P(X = -1)$ بتحديد قِيَم X ضمن الشرط المُحدَّد

$= 0.1 + 0.2$ بتعويض قِيَم الاحتمالات

$= 0.3$ بالجمع

3 أجد ناتج: $P(X \geq 0)$.

$P(X \geq 0) = 1 - P(X = -1)$ الحادث $X \geq 0$ هو مُتمِّم للحادث $X = -1$

$= 1 - 0.1$ بتعويض قيمة الاحتمال

$= 0.9$ بالطرح

4 أجد منوال التوزيع.

المنوال هو قيمة X الأعلى تكرارًا. وفي هذه المسألة، فإنَّ المنوال هو القيمة المقابلة لأعلى احتمال؛ أيْ 0.3 المقابل للقيمة 2

إذن، منوال التوزيع هو 2

أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإنَّ: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$، حيث $\overline{A}$ هو الحادث المُتمِّم للحادث A.

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد ناتج $P(X \geq 0)$ بطريقة أخرى؟

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.25	g	0.35	3g

a) أجد قيمة g.

b) أجد ناتج: $P(1 \leq X < 3)$.

c) أجد ناتج: $P(X < 4)$.

d) أجد منوال التوزيع.

توقع المتغيِّر العشوائي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي $(\overline{x})$ لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها $(\sum xf)$ على مجموع التكرارات $(\sum f)$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x\, P(x)$، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation) للمُتغيِّر العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز $E(X)$.

أتعلَّم

التوقُّع هو القيمة التي يؤول إليها المتغيّر العشوائي عند تكرار التجربة العشوائية عددًا كبيرًا جدًّا من المرّات.

التوقُّع

مفهوم أساسي

بالكلمات: التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز : $E(X)= \sum x\, P(x)$

مثال 4 : من الحياة

دراسة: **في دراسة إحصائية شملت 100 أُسْرة اختيرت عشوائيًّا، أُريد تعرُّف عدد أجهزة الحاسوب التي تملكها هذه الأُسَر. والجدول الآتي يُبيِّن نتائج هذه الدراسة:**

عدد أجهزة الحاسوب (x)	0	1	2	3
عدد الأُسَر (التكرار) (f)	17	42	31	10

باقتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب التي تملكها كل أُسْرة:

أتذكَّر

عند استقصاء أمر ما عن مجتمع كبير جدًّا، فإنَّه يصعب الوصول إلى أفراده جميعًا؛ لذا يصار إلى استعمال العيِّنة، وهي مجموعة صغيرة تُختار عشوائيًّا من المجتمع لتمثيله.

1 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

أجد احتمال كل قيمة من قِيَم X؛ بحساب تكرارها النسبي عن طريق قسمة التكرار المقابل لكل قيمة على مجموع التكرارات، وهو 100، فيكون جدول التوزيع الاحتمالي كما يأتي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.17	0.42	0.31	0.10

2 أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

$E(X) = \sum x\, P(x)$ صيغة التوقُّع

$= (0\times0.17) + (1\times0.42) + (2\times0.31) + (3\times0.10)$ مجموع نواتج الضرب

$= 1.34$ بالتبسيط

أتعلَّم

هذه القيمة تمثّل توقُّع عدد الأجهزة التي تملكها الأسرة الواحدة على مستوى المجتمع كاملًا.

أتحقَّق من فهمي

تجد حنين عددًا من الرسائل في بريدها الإلكتروني كل يوم، فقرّرت رصد عدد الرسائل التي وصلتها يوميًّا من **50** يومًا اختارتها عشوائيًّا، وكانت النتائج التي توصَّلت إليها كما في الجدول الآتي:

عدد الرسائل (x)	1	2	3	4	5
عدد الأيام (التكرار f)	7	22	18	1	2

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الرسائل اليومية التي تصل البريد الإلكتروني لحنين:

a) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

b) أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

معلومة

ازداد الاعتماد على البريد الإلكتروني في السنوات الأخيرة، بحيث أصبح بديلًا عن البريد الورقي، حتى في بعض المعاملات الرسمية.

يَلزم أحيانًا إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم تطبيق الصيغة الخاصة بإيجاد التوقُّع.

مثال 5

أُلقِيت قطعة نقود غير منتظمة 3 مرّات متتالية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد $E(X)$، علمًا بأنَّ احتمال ظهور الصورة في الرمية الواحدة هو 0.3

بما أنَّ $P(H) = 0.3$، فإنَّ احتمال ظهور الكتابة (T) هو:

$$P(T) = 1-0.3 = 0.7$$

الخطوة 1: أُحدِّد قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

قِيَم X في هذه التجربة هي: $0, 1, 2, 3$

الخطوة 2: أجد الاحتمالات.

$P(x=0) = P(T, T, T)$ — يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 0$

$= 0.7 \times 0.7 \times 0.7$ — قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= 0.343$ — بالضرب

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 1$

$$P(X=1) = P(H, T, T)+P(T, H, T)+ P(T, T, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= (0.3\times0.7\times0.7)+(0.7\times0.3\times 0.7)+(0.7\times0.7\times0.3)$$

بالتبسيط

$$= 0.441$$

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 2$

$$P(X=2) = P(H, H, T)+P(H, T, H)+ P(T, H, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= (0.3\times0.3\times0.7)+(0.3\times0.7\times0.3)+(0.7\times0.3\times0.3)$$

بالتبسيط

$$= 0.189$$

يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 3$

$$P(X=3) = P(H, H, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= 0.3 \times 0.3 \times 0.3$$

بالضرب

$$= 0.027$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.343	0.441	0.189	0.027

الخطوة 4: أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع

$$E(X) = \sum x\, P(x)$$

مجموع نواتج الضرب

$$= (0\times0.343) + (1\times0.441)+ (2\times0.189) + (3\times0.027)$$

بالتبسيط

$$= 0.9$$

أتحقَّق من فهمي

يحتوي وعاء على 6 بطاقات حمراء، و4 بطاقات زرقاء، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِبت منها بطاقتان على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البطاقات الزرقاء المسحوبة، فأجد $E(X)$.

تباين المتغيِّر العشوائي

التباين (Variance) للمُتغيِّر العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم المُتغيِّر عن وسطها الحسابي $E(X)$، ويُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز σ^2، ويُمكِن حسابه كما هو مُبيَّن تاليًا:

التباين

مفهوم أساسي

بالكلمات: التباين للمُتغيِّر العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع نواتج ضرب مربعات قِيَم المُتغيِّر X في احتمال كل قيمة، مطروحًا منه مربع توقُّع المُتغيِّر X.

بالرموز : $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum (x^2 P(x)) - (E(X))^2$

مثال 6

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.3	0.12	0.15	0.12	0.31

1 أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع $\quad E(X) = \sum x\,P(x)$

مجموع نواتج الضرب $\quad = (0\times0.3) + (1\times0.12) + (2\times0.15) + (3\times0.12) + (4\times0.31)$

بالتبسيط $\quad = 2.02$

2 أجد التباين $\text{Var}(X)$.

صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي X $\quad \text{Var}(X) = \sum \left(x^2 P(x)\right) - (E(X))^2$

بالتعويض $\quad = ((0\times0.3)+(1\times0.12)+(4\times0.15)+(9\times0.12)+(16\times0.31)) - (2.02)^2$

بالتبسيط $\quad \approx 2.68$

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	1	3	5
$P(X=x)$	0.3	0.4	0.1	0.2

a) أجد التوقُّع $E(X)$.
b) أجد التباين $\text{Var}(X)$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة سحب 4 كرات على التوالي من كيس يحوي 3 كرات حمراء، وكرتين سوداوين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في الكرات المسحوبة، فأجد قِيَم X في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

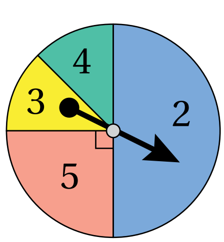
1) السحب مع الإرجاع.
2) السحب من دون إرجاع.

3) في تجربة إلقاء قطعة نقود 6 مرّات متتالية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد قِيَم X.

4) في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

يحتوي وعاء على 3 أقراص زرقاء، و6 أقراص خضراء. إذا سُحِبت من الوعاء 3 أقراص على التوالي مع الإرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأقراص الزرقاء المسحوبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

5) التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X في صورة جدول.
6) احتمال سحب قرص أزرق واحد على الأقل.



في تجربة تدوير مُؤشِّر القرص المجاور عشوائيًّا مرَّتين متتاليتين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين اللذيْنِ توقَّف عندهما المُؤشِّر، وكان القطاعان الأخضر والأصفر متطابقان، فأجد:

7) التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.
8) منوال التوزيع.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	4	5	8
$P(X=x)$	0.2	b	0.15	0.29	$2b$

9 أجد قيمة b.

10 أجد ناتج: $P(2 < X \leq 8)$.

11 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

12 يتألَّف مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 10 طلاب و15 طالبة، وقد شكَّل هؤلاء الأعضاء لجنة تضمُّ ثلاثة منهم بصورة عشوائية للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

أجد القيمة المُتوقَّعة لكلٍّ من التوزيعات الاحتمالية الآتية:

13

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.13	0.27	0.1	0.18	0.22	0.1

14

y	2	4	6	8
$P(Y=y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

15 دَوَّن أحد العلماء أعمار عدد من الغزلان في الجدول الآتي:

العمر (بالسنة x)	1	2	3	4	5	6	7	8
التكرار (f)	7	30	58	135	150	70	40	10

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عمر الغزال، أجد التوقُّع $E(X)$.

16 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	0	1	2
$P(X=x)$	a	$4b$	$2b$	a

إذا كان توقُّع X هو $\frac{5}{12}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

17 يعمل في إحدى المؤسسات 9 موظفين و15 موظفة، وقد شكَّل هؤلاء معًا لجنة مشتريات تضمُّ أربعة منهم بصورة عشوائية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الموظفات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X، ثم أجد التوقُّع $E(X)$.

18 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	-2	3
$P(Y=y)$	a	$1-a$

إذا كان $E(Y) = 2$، فأجد $\text{Var}(Y)$.

19 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقام: 2، 3، 4، 5، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قِيَمه: 5، 6، 7، 8، 9، فأُحدِّد ما إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، وأُبرِّر إجابتي.

21 **تحدٍّ:** رُقِّمت أوجه حجر نرد أحمر بالأرقام: $1, 1, 1, 2, 2, 3$، ثم رُقِّمت أوجه حجر نرد أزرق بالأرقام: $1, 2, 2, 3, 3, 3$، ثم أُلقِي الحجران معًا مرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي لكلا الحجرين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي.

22 **تحدٍّ:** في تجربة عشوائية، اختيرت بطاقة من بين 3 بطاقات تحمل الأرقام: 1، 3، 5، ثم أُلقِيت قطعة نقود منتظمة عددًا من المرّات يُطابِق الرقم المكتوب على البطاقة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي H على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد عناصر الحادث المُرتبِط بالقيمة: $H = 3$، ثم أجد ناتج: $P(H = 3)$.

23 **مسألة مفتوحة:** أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي X، قِيَمه: $1, 3, 5$، وقيمة $E(X) = 4$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 عـدد طرائق اختيار 3 طلبة عشـوائيًّا من بين 10 طلبة، وترتيبهم على 3 مقاعد في صف واحد، هو:

a) ${}_{10}C_3$ b) ${}_{10}P_3$

c) ${}_{3}P_3$ d) $7!$

2 أحد الآتية يُمثِّل عدد الأعـداد الفردية التي يحوي كلٌّ منها 5 منـازل مختلفة، ويُمكِن تكوينـه بإعادة ترتيب أرقام العدد 45092:

a) 120 b) 96

c) 60 d) 36

3 عدد طرائق اختيار 5 طلاب و3 طالبات عشوائيًّا من بين 9 طلاب و7 طالبات هو:

a) ${}_{16}C_8$ b) ${}_{16}P_8$

c) ${}_{9}C_5 \times {}_{7}C_3$ d) ${}_{9}P_5 \times {}_{7}P_3$

4 وعاء فيـه 6 بطاقات مُتماثِلـة، كُتِب عليهـا الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6، إذا سُحِبت منه 3 بطاقات معًا بصورة عشوائية، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أصغر الأرقام الظاهرة على هذه البطاقات، فإنَّ مجموعة قِيَم X هي:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{1, 2, 3, 4\}$

d) $\{1, 2, 3\}$

5 وعاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثِلة. إذا سُـحِبت منه 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مـع الإرجاع، فإنَّ احتمال سـحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء، هو:

a) $\frac{2}{27}$ b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

يوجد على أحد رفوف المكتبة 5 كتب علوم مختلفة، و4 كتب رياضيـات مختلفـة. أجد عدد طرائق ترتيـب الكتب بعضها بجانب بعـض على الرف في الحالات الآتية:

6 أنْ تكون كتب كل مبحث مُجمَّعة معًا.

7 أنْ تكون كتب الرياضيات فقط مُجمَّعة معًا.

8 ألّا يكون أيُّ كتابي رياضيات متجاورين.

يشـترط أحد المواقع التعليمية في شـبكة الإنترنت إنشـاء المُسـتخدِم حسـابًا محميًّا بكلمة مـرور مُكوَّنة من 8 رموز مختلفـة تُختار مـن بيـن الأحـرف: A, B, C, D, E, F، والأرقـام: 1, 2, 3, 4, 5, 6، أجد عدد كلمات المرور التي يُمكِن إنشاؤها في الحالات الآتية:

9 اشتمال كلمة المرور على 3 أحرف متبوعة بـ5 أرقام.

10 بدء كلمة المرور برقم، وانتهاؤها برقم.

11 اشتمال كلمة المرور على 4 أحرف بعضها بجانب بعض، وأربعة أرقام.

12 اختير فريق كرة قدم خماسي من بين حارس مرمى، و5 مدافعين، و5 مهاجمين. ما احتمال أن يضمّ الفريق حارس المرمى، ومدافِعَيْن، ومهاجِمَيْن؟

13 كتب سعيد 4 رسائل، وكتب عناوين أصحابها على 4 مغلفات؛ ثمّ وضع في كل مغلف واحدة من الرسائل بصورة عشوائية. ما احتمال أن يكون سعيد قد وضع كل رسالة في المغلف الذي يحمل عنوان صاحبها؟

14 رتَّبت هالا أحرف كلمة (كاظمين) بعضها بجانب بعض في خط مستقيم. ما احتمال أنْ تكون الأحرف الصحيحة متجاورة؟

سأل مراد عددًا من طلبة الصف الثالث عن عدد أقلام التلوين في حقائبهم، ثم دَوَّن النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأقلام في الحقيبة	3	8	10	14	15
التكرار	1	3	2	5	3

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الأقلام في الحقيبة:

15 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

16 أجد التوقُّع $E(X)$.

17 في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين معًا مرّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على القيمة المُطلَقة للفرق بين العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

18 في تجربة سحب بطاقتين مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مُرقَّمة بالأرقام: 1، 2، 3، 4، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب الرقمين الظاهرين على البطاقتين، فأجد قِيَم X.

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.25	k	0.33	$2k$

19 أجد قيمة k.

20 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

21 أجد التباين $\text{Var}(X)$.

22 إذا كان: ${}_nC_4 = {}_nP_3$، فما قيمة n؟

23 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي، فأجد قيمتين مُمكِنتين لكلٍّ من a، وb.

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	a	$3b$	$2a$	b

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين مرّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي G على أكبر العددين في حال اختلافهما، أو دلَّ على أحدهما في حال تساويهما، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

24 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر G.

25 أجد ناتج: $P(2 < G \leq 5)$.

26 أجد التوقُّع $E(G)$.