



# الرياضيات

الصف العاشر - كتاب التمارين

الفصل الدراسي الثاني

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

يوسف سليمان جرادات نور محمد حسان إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدرّس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2020/7)، تاريخ 2020/12/1 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/176)، تاريخ 2020/12/17 م، بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

**ISBN: 978 - 9923 - 41 - 383 - 8**

المملكة الأردنية الهاشمية  
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية:  
(2022/4/2080)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: الصف العاشر: كتاب التمارين (الفصل الدراسي الثاني)/ المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛

مزينة ومنقحة. - عمان: المركز، 2022

(56) ص.

ر.إ.: 2022/4/2080

الواصفات: تطوير المناهج// المقررات الدراسية// مستويات التعليم// المناهج/

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنّفه، ولا يُعبّر هذا المُصنّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1441 هـ / 2020 م

2021 م - 2025 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

## أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتتميز مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم / المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًا، ويترك لكم البقية لتعلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستوها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين للكتابة إجابتة، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي للكتابة بوضوح.

تمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

## قائمة المحتويات

### الوحدة ٥ الاقترانات

- أستعدُّ لدراسة الوحدة ..... 6
- الدرس 1 اقترانات كثيرات الحدود ..... 18
- الدرس 2 الاقترانات النسبية ..... 19
- الدرس 3 تركيب الاقترانات ..... 20
- الدرس 4 الاقتران العكسي ..... 21
- الدرس 5 المتتاليات ..... 22

### الوحدة ٦ المشتقات

- أستعدُّ لدراسة الوحدة ..... 23
- الدرس 1 تقدير ميل المنحنى ..... 27
- الدرس 2 الاشتقاق ..... 28
- الدرس 3 القيم العظمى والقيم الصغرى ..... 29

## قائمة المحتويات

### الوحدة 7 المتجهات

- 30 ..... أستعدُّ لدراسة الوحدة
- 32 ..... الدرس 1 المتجهات في المستوى الإحداثي
- 33 ..... الدرس 2 جمع المتجهات وطرحها
- 35 ..... الدرس 3 الضرب القياسي

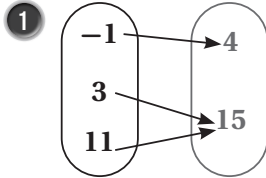
### الوحدة 8 الإحصاء والاحتمالات

- 36 ..... أستعدُّ لدراسة الوحدة
- 47 ..... الدرس 1 أشكال الانتشار
- 48 ..... الدرس 2 المنحنى التكراري التراكمي
- 49 ..... الدرس 3 مقاييس التشتت للجداول التكرارية ذات الفئات
- 50 ..... الدرس 4 احتمالات الحوادث المتنافية
- 51 ..... الدرس 5 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
- 52 ..... أوراق مربعات

أختبرُ معلوماتي بحلِّ التدريباتِ أولاً، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي من الإجابة، أستعينُ بالمثلِ المُعطى.

تعرّفُ العلاقة، وتحديدُ ما إذا كانتِ اقتتراناً أم لا (الدرس 1)

أحدّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي ومداها، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتِ تمثّلُ اقتتراناً أم لا:



2

$x$	5	2	-7	2	5
$y$	4	8	9	12	14

3  $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$

4  $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

5  $\{(13, 5), (-4, 12), (6, 0), (13, 10)\}$

6  $\{(9.2, 7), (9.4, 11), (9.5, 9.5), (9.8, 8)\}$

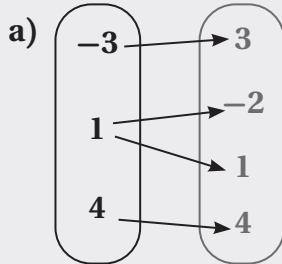
7

$x$	-3	-1	0	1	2
$y$	3	-4	5	-2	3

8

$x$	5	2	3	6	8
$y$	4	4	4	4	4

مثال: أحدّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي ومداها، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتِ تمثّلُ اقتتراناً أم لا:



المجال:  $\{-3, 1, 4\}$       المدى:  $\{3, -2, 1, 4\}$

ألاحظُ ارتباطَ العنصرِ 1 في المجالِ بالعنصرين -2 و 1 في المدى.

إذن، لا تمثّلُ هذه العلاقةُ اقتتراناً.

b)

$x$	5	3	2	0	-4	-6
$y$	1	3	1	3	-2	2

المجال:  $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$       المدى:  $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحظُ ارتباط كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المدى. إذن، تمثلُّ هذه العلاقةُ اقترانًا.

c)  $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجال:  $\{0, 2, 3, 5\}$       المدى:  $\{1, 4, 7\}$

ألاحظُ ارتباط كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المدى. إذن، تمثلُّ هذه العلاقةُ اقترانًا.

d)  $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجال:  $\{-4, 6, 0\}$       المدى:  $\{2, -1, 0\}$

ألاحظُ ارتباط العنصر  $-4$  في المجالِ بالعنصرين  $2$  و  $0$  في المدى. إذن، لا تمثلُّ هذه العلاقةُ اقترانًا.

• إيجاد صورة عددٍ في الاقتران (الدرس 1)

إذا كانَ  $f(x) = 3x - 2$ ، و  $g(x) = x^2 - 2x - 3$ ، فأجدُ كلاً ممَّا يأتي:

9  $g(0)$

10  $f(2)$

11  $f(-3)$

12  $g(-4)$

مثال: إذا كانَ  $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$ ، فأجدُ  $g(-2)$

$$g(x) = 2x^2 + 5x + 4$$

$$g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$$

$$= 8 - 10 + 4 = 2$$

قاعدة الاقتران

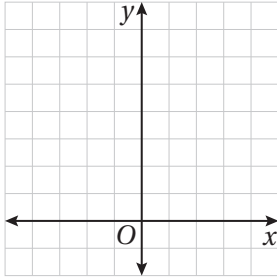
بتعويض  $x = -2$

بالتبسيط

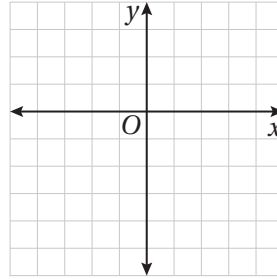
تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً (الدرس 1)

أجدُ معادلة محور التماثل، وإحداثيي الرأس، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال ومدى كلٍّ من الاقترانات التربيعية الآتية، ثم أمثله بيانياً:

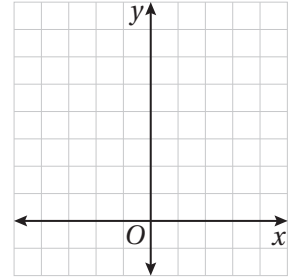
13  $f(x) = x^2 + 3$



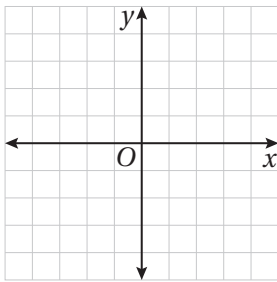
14  $f(x) = -x^2 - 4x - 4$



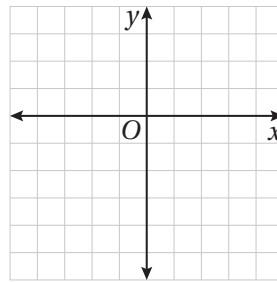
15  $f(x) = x^2 + 2x + 3$



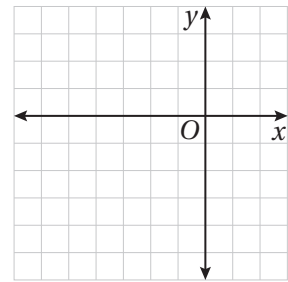
16  $f(x) = x^2 - 4$



17  $f(x) = -x^2 + 3$



18  $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$



مثال: أمثل الاقتران:  $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$  بيانياً.

الخطوة 1 أحدد اتجاه فتحة القطع المكافئ، وأجد معادلة محور التماثل وإحداثيي الرأس، وأحدد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

في الاقتران  $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ :  $a = -3, b = 6$

بما أن  $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحاً للأسفل، ويمثل الرأس نقطته العظمى.

• أجد إحداثيي الرأس.

الاقتران المعطى  $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويض  $x = 1$   $f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$

بالتبسيط  $= 8$

إذن، إحداثيا الرأس  $(1, 8)$ .

• أجد معادلة محور التماثل.

معادلة محور التماثل  $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويض  $a = -3, b = 6$   $= -\frac{6}{2(-3)}$

بالتبسيط  $= 1$

إذن، معادلة محور التماثل هي  $x = 1$ .

الخطوة 2 أجدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ  $y$ .

لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ  $y$ ، أعوِّضُ  $x = 0$  في قاعدةِ الاقترانِ.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 6x + 5 && \text{الاقترانُ المُعطى} \\ f(0) &= -3(0)^2 + 6(0) + 5 && \text{بتعويضِ } x = 0 \\ &= 5 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

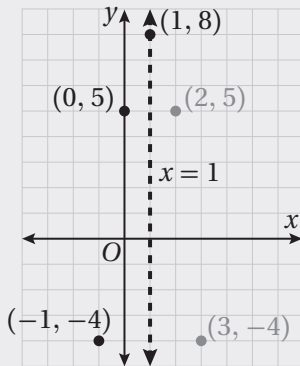
إذن، نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ  $y$  هيَ  $(0, 5)$ .

الخطوة 3 أجدُ نقطةَ أُخرى باختيارِ قيمةٍ لـ  $x$  تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيه المقطعُ  $y$  يمينَ محورِ التَّمائُلِ أو يسارَهُ.

$$x = -1 \text{ أختارُ}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 6x + 5 && \text{الاقترانُ المُعطى} \\ f(-1) &= -3(-1)^2 + 6(-1) + 5 && \text{بتعويضِ } x = -1 \\ &= -4 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

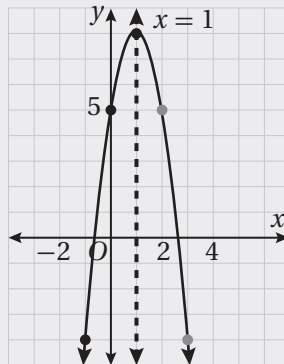
إذن، النقطةُ الأخرى هيَ  $(-1, -4)$ .



الخطوة 4 أمثلُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أمثلُ رأسَ القطعِ والنقطتينِ اللتينِ أوجدتهما من الخُطوتينِ 2 و 3، وهما  $(0, 5)$  و  $(-1, -4)$ ، ثم أستعملُ التَّمائُلَ لأعكسَ النقطتينِ  $(0, 5)$  و  $(-1, -4)$  حولَ محورِ التَّمائُلِ؛ لإيجادِ نقطتينِ أُخريينِ على التمثيلِ البيانيِّ.

الخطوة 5 أصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنى أملَسَ.



جمع المقادير الجبرية وطرحها (الدرس 1)

أكتبُ كلاً ممَّا يأتي في أبسط صورة:

19  $(3np + 5w) + (w - 10np)$

20  $(-z + 2xy) + (xy + 4z)$

21  $(14x^2 - 19x) + (-6x^2 + x)$

22  $(10b^2 - 3b) + (b^2 - 2b)$

23  $(7cr - 3q) + (2cr + 7q)$

24  $(7xy + 4c) + (3xy - 8c)$

25  $(4x + 4c^2) + (6x - 2c^2)$

26  $(19t + 13s^2) + (4s^2 - t)$

مثال: أكتبُ كلاً ممَّا يأتي في أبسط صورة:

a)  $(6pn - 3q) + (2pn + 7q)$

$$= (6pn + 2pn) + (7q - 3q)$$

$$= 8pn + 4q$$

الخاصية التجميعية والتبديلية في الجمع

بجمع الحدود المتشابهة

b)  $(4x^2y + t) + (3t - x^2y)$

$$= (4x^2y - x^2y) + (t + 3t)$$

$$= 3x^2y + 4t$$

الخاصية التجميعية والتبديلية في الجمع

بجمع الحدود المتشابهة

• ضربُ المقادير الجبرية (الدرس 1)

أكتبُ كلًّا ممَّا يأتي في أبسط صورة:

27  $6 \times (-3b)$

28  $-2 \times (4w)$

29  $-2u \times 5u$

30  $8d \times (-7d)$

31  $3xy \times (-xy^2)$

32  $(-dq^2)(-3qd)$

33  $(b + 4)(b + 1)$

34  $(3x - 1)(4x - x^2 + 2)$

35  $(4-p)(2p-p^2+1)$

مثال: أكتبُ كلًّا ممَّا يأتي في أبسط صورة:

a)  $2x(3x - y)$

$$2x(3x - y) = 6x^2 - 2xy$$

بضرب حدِّ جبريِّ في مقدارٍ جبريِّ

b)  $(x + 4)(x + 3)$

$$(x + 4)(x + 3)$$

$$= x(x + 3) + 4(x + 3)$$

بفصل المقدار  $(x+4)$  إلى حدَّين  $x, 4$ ،  
ثم ضرب كلِّ منهما في المقدار  $(x + 3)$

$$= (x^2 + 3x) + (4x + 12)$$

باستخدام خاصية التوزيع

$$= x^2 + (3x + 4x) + 12$$

بجمع الحدود المتشابهة

$$= x^2 + 7x + 12$$

بكتابة المقدار في أبسط صورة

تحليل ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  (الدرس 1)

أحللُ كلًّا ممَّا يأتي:

36  $3x^2 + 11x + 6$

37  $8x^2 - 30x + 7$

38  $6x^2 + 15x - 9$

39  $4x^2 - 4x - 35$

40  $12x^2 + 36x + 27$

41  $6r^2 - 14r - 12$

مثال: أحللُ المقدار:  $3x^2 - 14x + 8$

بما أن  $a = 3, b = -14, c = 8$ ، فأبحثُ عن عددين حاصل ضربهما  $3 \times 8 = 24$  ومجموعهما  $-14$   
 بما أن  $b$  سالبة و  $c$  موجبة، فأنشئُ جدولاً أنظّم فيه أزواج عوامل العدد  $24$  السالبة، ثمَّ أحددُ العاملين اللذين مجموعهما  $-14$

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 24
-25	-1, -24
-14	-2, -12

العاملان الصحيحان

$$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$$

بكتابة القاعدة

$$= 3x^2 - 2x - 12x + 8$$

بتعويض  $m = -2, n = -12$

$$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8)$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= x(3x - 2) + (-4)(3x - 2)$$

بتحليل كلِّ تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$= (3x - 2)(x - 4)$$

إخراج  $(3x - 2)$  عاملاً مشتركاً

تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الدرس 2)

أكتبُ كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

42  $\frac{6x(x+3)}{9x^2}$

43  $\frac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$

44  $\frac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$

45  $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

46  $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

47  $\frac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$

مثال: أكتبُ كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

a)  $\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}$

$$\begin{aligned} \frac{2x-10}{2x^2-11x+5} &= \frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)} \\ &= \frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}} \\ &= \frac{2}{2x-1} \end{aligned}$$

بتحليل كلِّ من البسط والمقام إلى العوامل

بقسمة كلِّ من البسط والمقام على  $(x-5)$

بالتبسيط

b)  $\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}$

$$\begin{aligned} \frac{1-u^2}{u^2+4u-5} &= \frac{(1-u)(1+u)}{(u-1)(u+5)} \\ &= \frac{-(u-1)(1+u)}{(u-1)(u+5)} \\ &= \frac{\cancel{-(u-1)}(1+u)}{\cancel{(u-1)}(u+5)} \\ &= \frac{-(u+1)}{u+5} \end{aligned}$$

بتحليل كلِّ من البسط والمقام إلى العوامل

$$1-u = -(u-1)$$

بقسمة كلِّ من البسط والمقام على  $(u-1)$

بالتبسيط

حلُّ التناسباتِ (الدرسُ 3)

أحلُّ كلاً من التناسباتِ الآتية:

48  $\frac{5}{4} = \frac{20}{x}$

49  $\frac{x}{12-x} = \frac{10}{30}$

50  $\frac{12}{x-2} = \frac{32}{x+8}$

مثال: أحلُّ التناسبِ الآتي:  $\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-4}$

$$\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-4}$$

التناسبُ المعطى

$$4(x+4) = 5(x-4)$$

بالضربِ التبادليِّ

$$4x + 16 = 5x - 20$$

باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$$-x + 16 = -20$$

ب طرحِ  $5x$  من طرفي المعادلةِ

$$-x = -36$$

ب طرحِ 16 من طرفي المعادلةِ

$$x = 36$$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على -1

حلُّ المعادلاتِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ (الدرسُ 4)

أحلُّ كلاً من المعادلاتِ الآتية، وأتحققُ من صحةِ الحلِّ:

51  $324 = b^2$

52  $x^2 = \frac{9}{36}$

53  $y^2 = 1.96$

مثال: أحلُّ المعادلة  $t^2 = \frac{1}{36}$ ، وأتحرَّقُ مِنْ صحَّةِ الحَلِّ:

$$t^2 = \frac{1}{36}$$

المعادلةُ الأصليَّةُ

$$t = \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$$

تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ

$$= \pm \frac{1}{6}$$

أجدُ قيمةَ الجذرِ

أتحرَّقُ مِنْ صحَّةِ الحَلِّ:

عندما  $x = -\frac{1}{6}$

عندما  $x = \frac{1}{6}$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$$

### • إيجاد حدودٍ متتاليةٍ (الدرس 5)

أجدُ الحدَّينِ التاليتينِ للمتتالياتِ الآتية:

54 4, 7, 10, 13, ...

55 100, 94, 88, 82, ...

56 3, 6, 11, 18, ...

مثال: أجدُ الحدَّينِ التاليتينِ للمتتالية: 2, 7, 12, 17, ...

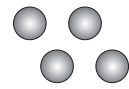
الأحظُّ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُه بمقدارٍ ثابتٍ هو 5:

$$7 - 2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$$

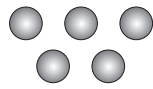
إذن، الحدَّانِ التاليانِ هما:  $17 + 5 = 22$  ,  $22 + 5 = 27$

إيجاد الحد العام لمتتالية نمط هندسي (الدرس 5)

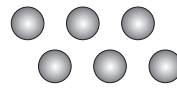
في ما يأتي نمط هندسي يشكّل عدد الدوائر فيه متتالية:



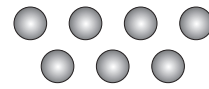
النموذج (1)



النموذج (2)



النموذج (3)



النموذج (4)

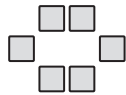
57 أجد القاعدة التي تربط كل حد في المتتالية بالحد الذي يليه.

58 أكتب قاعدة الحد العام.

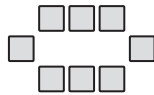
59 ما عدد الدوائر في الحد الذي رتبته 12؟

في ما يأتي نمطان هندسيان، يشكّل عدد المربعات في كل منهما متتالية. أجد قاعدة الحد العام لكل منهما، ثم أرسم الحد العاشر.

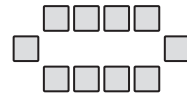
60



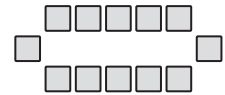
الشكل (1)



الشكل (2)

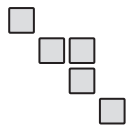


الشكل (3)

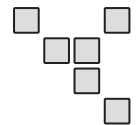


الشكل (4)

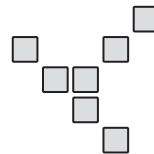
61



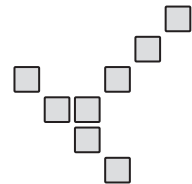
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)

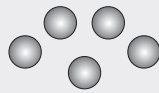


الشكل (4)

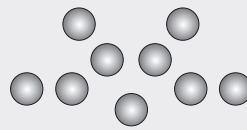
مثال: في ما يأتي نمط هندسي يشكّل عدد الدوائر فيه متتالية:



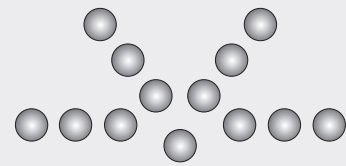
النموذج الأول



النموذج الثاني



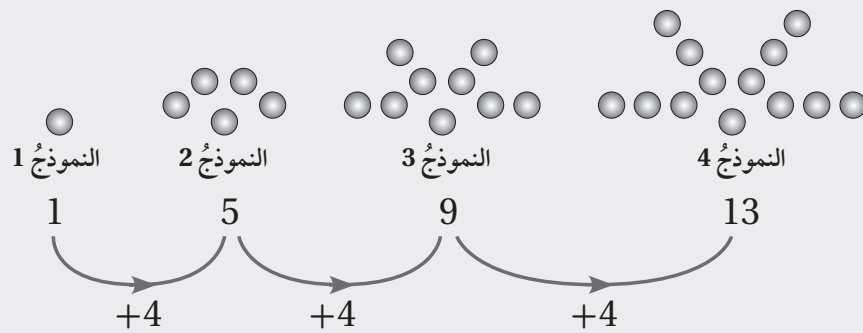
النموذج الثالث



النموذج الرابع

(a) أجد القاعدة التي تربط كل حد في المتتالية بالحد الذي يليه:

بالانتقال من الحد إلى الحد الذي يليه، أجد أن 4 دوائر قد أُضيفت. إذن، كل حد أكبر من الحد الذي يسبقه بـ 4.



(b) أكتب قاعدة الحد العام.

تزداد الحدود في المتتالية بمقدار 4، وهذا يذكرني بجدول ضرب العدد 4؛ إذ إن الفرق بين كل ناتجين يساوي 4، لكن حدود المتتالية أقل بمقدار 3 من النواتج في جدول ضرب العدد 4. إذن، قاعدة الحد العام هي: أضرب رتبة الحد في 4، ثم أطرُح 3.

رتبة الحد	الحد
1	1
2	5
3	9
4	13

عمليات الحساب:

- 1 × 4 = 4، 4 - 3 = 1
- 2 × 4 = 8، 8 - 3 = 5
- 3 × 4 = 12، 12 - 3 = 9
- 4 × 4 = 16، 16 - 3 = 13

(c) ما عدد الدوائر في الحد الذي رتبته 15؟

لإيجاد عدد الدوائر، فإنني أطبق قاعدة الحد العام على الحد الذي رتبته 15؛ أضرب الرتبة في 4، ثم أطرُح 3 من الناتج.

الرتبة	الحد
15	57

عمليات الحساب:

- 15 × 4 = 60، 60 - 3 = 57

## اقتِراناتٌ كثيرةٌ الحدودِ Polynomial Functions

أحدُّ إذا كان كلُّ ممَّا يأتي كثيرَ حدودٍ أم لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبهُ بالصورة القياسية:

1  $3x^2 + 2x^{-1} + 5$

2  $3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$

3  $\frac{8(3-2x)}{5}$

4  $\sqrt{x^2 + 16} - 4x$

أمثُلٌ بيانِيًّا كلاً ممَّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5  $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \leq x \leq 3$

6  $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \leq x \leq 2$

7  $g(x) = 12 - 4x - x^2$

8  $h(x) = (2x - 5)^2 - 10$

إذا كان  $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$ ،  $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$ ، و  $h(x) = 2x - 4$ ، فأجدُ ناتجَ ما يأتي:

9  $f(x) + g(x)$

10  $f(x) - g(x)$

11  $g(x) - x(h(x))$

12  $h(x) \cdot f(x)$

13  $(h(x))^2 + f(x)$

14  $f(x) \cdot g(x)$

15 هل العدد  $-2$  صفرٌّ للاقتِرانِ  $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$ ؟ أبرِّرْ إجابتي.

16 أجدُ أصفارَ الاقتِرانِ  $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$

يمثِّلُ الاقتِرانُ  $s(t) = 2t^3 - 20t^2 + 5t - 50$  موقعَ جسمٍ يتحرَّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ  $s$  موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ  $t$  ثانيةً.

17 أحدِّدُ موقعَ الجسمِ لحظةً بدءِ الحركةِ.

18 أحدِّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ ثانيتينِ منْ بدءِ الحركةِ.

19 متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

20 هل يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟

## الاقتارات النسبية Rational Functions

أجد ناتج قسمة  $f(x)$  على  $h(x)$  وباقيها في كل مما يأتي:

1  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5; h(x) = x + 4$

2  $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12; h(x) = 2x^2 - 5x + 2$

3 أجد قيمة  $k$  بحيث يكون باقي قسمة  $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$  على  $h(x) = 2x + 1$  هو 8

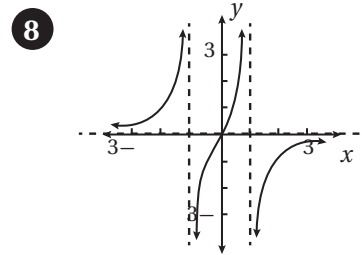
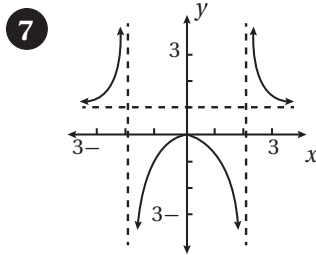
4 أجد قيمة  $c$  بحيث يكون  $h(x) = x - 3$  أحد عوامل  $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي، وأمثلة بيانياً، ثم أجد مجاله ومداه:

5  $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$

6  $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أجد المجال والمدى وخطوط التقارب لكل من الاقترانين الممثلين بيانياً في ما يأتي:



أجد المجال والمدى لكل مما يأتي:

9  $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$

10  $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

نُقلت فصيلةٌ نادرةٌ من الحشرات إلى محميةٍ خاصةٍ لمنع انقراضها. وقد بلغ عدد أفراد هذه الفصيلة بعد  $t$  شهراً

$$P(t) = \frac{72(1 + 0.6t)}{3 + 0.02t}$$

11 كم كان عدد الحشرات عند نقلها إلى المحمية؟

12 كم سيبلغ عددها بعد 30 شهراً من نقلها؟

13 بعد كم شهرٍ سيصل عددها إلى 558 حشرة؟

تركيب الاقترانات  
Composition of Functions

أجد قيمة كل مما يأتي، مستعملًا القيم المُبيّنة في الجدولين الآتيين:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	3	5	7

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

1  $(f \circ g)(1)$

2  $(f \circ g)(-2)$

3  $(g \circ f)(1)$

4  $(g \circ f)(0)$

5  $(g \circ g)(-1)$

6  $(f \circ f)(-1)$

إذا كان  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = 3x - 4$ ، فأجد:

7  $(f \circ g)(2)$

8  $(f \circ g)(0)$

9  $(f \circ g)(8)$

10  $(g \circ f)(1)$

11  $(f \circ g)(x)$

12  $(g \circ f)(x)$

إذا كان  $k(x) = \frac{1}{x+1}$  و  $h(x) = \frac{2}{x}$ ، فأجد:

13  $(h \circ k)(3)$

14  $(k \circ h)(3)$

15  $(h \circ h)(6)$

16  $(k \circ k)(-3)$

17  $(k \circ h)(x)$

18  $(h \circ k)(x)$

أجد اقترانين  $f(x)$  و  $g(x)$ ، بحيث يكون  $h(x) = (g \circ f)(x)$  في كل مما يأتي:

19  $h(x) = x^6 + 1$

20  $h(x) = 4(x + 1)^2$

21  $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$

22  $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$

23 يرتبط سعر سلعة مُعيّنة وعدد الوحدات المباعة منها بالعلاقة  $p = 100 - \frac{x}{4}$ ،  $0 \leq x \leq 400$ ، حيث  $p$  السعر بالدينار، و  $x$  عدد الوحدات المباعة. إذا كانت التكلفة  $C$  بالدنانير لإنتاج  $x$  وحدة هي  $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$ ، فأجد التكلفة  $C$  في صورة اقترانٍ نسبةً إلى السعر  $p$ ، ثم أجد التكلفة إذا كان سعر الوحدة الواحدة 19 دينارًا.

## الاقترانُ العكسيُّ Inverse Function

إذا كان  $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$ ، فأجدُ كلاً ممَّا يأتي:

- 1  $g(9)$       2  $g(4)$       3  $g^{-1}(70)$       4  $g^{-1}(60)$

5 إذا كان  $f(x)$  اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ، و  $f(3) = 8$ ، فماذا يُستنتجُ من هذه المعطيات؟

6 إذا كان  $f(x)$  يُمثِّل عددَ الوحداتِ المُنتجةِ في  $x$  ساعةٍ عملٍ لُمُنتجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّل المقدارُ  $f^{-1}(2540)$ ؟

أجدُ الاقترانَ العكسيَّ  $f^{-1}(x)$  لكلِّ ممَّا يأتي، مُحدِّداً مجاله ومداهُ:

- 7  $f(x) = 3x - 5$       8  $f(x) = 4 - 7x$   
 9  $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$       10  $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$   
 11  $f(x) = \frac{x}{2x+6}$       12  $f(x) = \frac{x}{8-4x}$   
 13  $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$       14  $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$   
 15  $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$       16  $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أبيِّنْ إذا كانَ كلُّ من الاقترانين  $f(x)$  و  $h(x)$  اقتراناً عكسياً للآخر أم لا:

- 17  $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$       18  $f(x) = \frac{2x}{3x+5}, h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

19 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ  $f(x) = \sqrt{6+3x}$ ، ثمَّ أمثِّل  $f(x)$  و  $f^{-1}(x)$  في المستوى الإحداثيِّ نفسه.

20 هندسة: تُعطى مساحةُ الدائرة بالاقترانِ  $A(r) = \pi r^2$ ، حيثُ  $A$  المساحةُ، و  $r$  نصفُ القطرِ. أُعبِّرُ عن  $r$  في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المساحةِ  $A$ ، ثمَّ أجدُ طولَ نصفِ قطرِ دائرةٍ مساحتها  $250 \text{ cm}^2$

21 فيزياء: يُعطى زمنُ الدورة  $T$  ثانيةً لِبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ  $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$ ، حيثُ  $\ell$  طولُ البندولِ بالأمتار. أُعبِّرُ عن  $\ell$  في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ  $T$ ، ثمَّ أجدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتهِ  $3 \text{ s}$

## المتتاليات Sequences

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممَّا يأتي:

1 4, 6, 8, 10, ...

2 3, 30, 300, 3000, ...

3 1, 4, 9, 16, ...

4 2, 4, 8, 16, ...

5 3, 10, 17, 24, ...

6 0, 4, 18, 48, ...

أصنّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطّيةٍ، وتربعيةٍ، وتكعيبيةٍ، ثمَّ أجدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلِّ منها:

7  $T(n) = 3n + 1$

8  $T(n) = 2n^2 + 1$

9  $T(n) = 5n^3 + 2$

10  $T(n) = n(n^2 + 1)$

أجدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممَّا يأتي:

11 6, 11, 16, 21, 26, ...

12 -4, 3, 22, 59, 120, ...

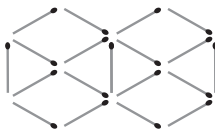
13 0, 3, 8, 15, ...

14 5, 11, 21, 35, 53, ...

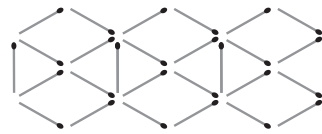
في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يمثّلُ عددَ أعوادِ الثقابِ فيه متتاليةٌ:



1



2



3

15 أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ.

16 أجدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ.

17 ما أكبرُ مجموعةٍ منَ النماذجِ يُمكنُ بناؤها باستخدامِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟

أختبرُ معلوماتي بحلِّ التدريباتِ أولاً، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابة، أستعينُ بالمشالِ المُعطى.

إيجادُ ميلِ المستقيمِ (الدرس 1)

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممَّا يأتي:

1 (3, 3), (5, 7)

2 (6, 1), (4, 3)

3 (-2, -6), (-2, 6)

4 (5, -7), (0, -7)

5 (-1, 0), (0, -5)

6 (4, 1), (12, 8)

7 (-1, 2), (3, 5)

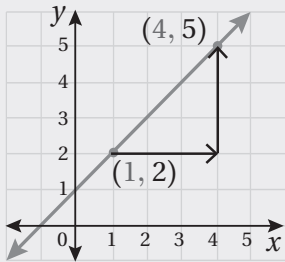
8 (-1, -2), (-4, 1)

9 (1, 2), (-3, 2)

10 (1, 5), (1, -4)

مثال: أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممَّا يأتي:

a) (1, 2), (4, 5)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{5 - 2}{4 - 1}$$

$$= \frac{3}{3} = 1$$

صيغةُ الميلِ

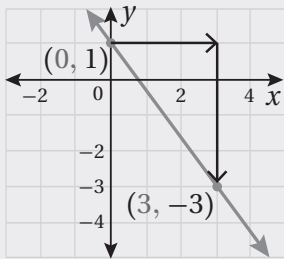
بالتعويضِ عن  $(x_1, y_1)$  بـ  $(1, 2)$

وعن  $(x_2, y_2)$  بـ  $(4, 5)$

بالتبسيطِ

إذن، ميلُ المستقيمِ هو 1

b) (0, 1), (3, -3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3 - 1}{3 - 0}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

صيغةُ الميلِ

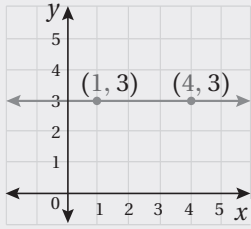
بالتعويضِ عن  $(x_1, y_1)$  بـ  $(0, 1)$

وعن  $(x_2, y_2)$  بـ  $(3, -3)$

بالتبسيطِ

إذن، ميلُ المستقيمِ هو  $-\frac{4}{3}$

c) (1, 3), (4, 3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

صيغة الميل

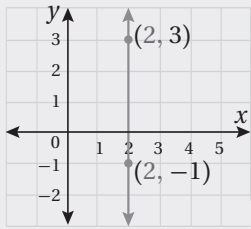
بالتعويض عن  $(x_1, y_1)$  بـ (1, 3)

وعن  $(x_2, y_2)$  بـ (4, 3)

بالتبسيط

إذن، ميل المستقيم هو 0

d) (2, 3), (2, -1)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-1 - 3}{2 - 2}$$

$$= \frac{-4}{0}$$

صيغة الميل

بالتعويض عن  $(x_1, y_1)$  بـ (2, 3)

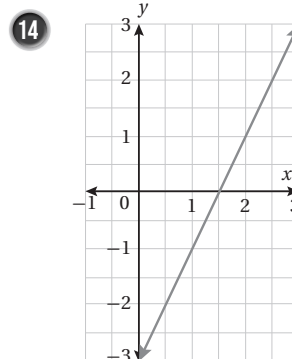
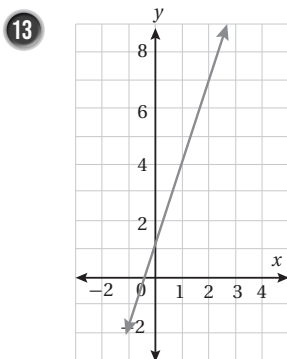
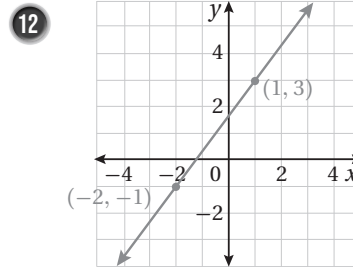
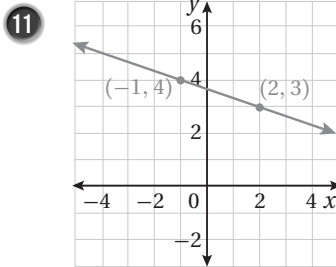
وعن  $(x_2, y_2)$  بـ (2, -1)

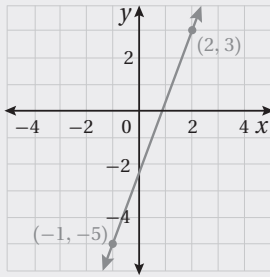
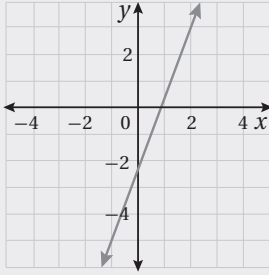
بالتبسيط

إذن، ميل هذا المستقيم غير مُعرَّف.

### إيجاد ميل مستقيم ممثِّل بيانيًا (الدرس 1)

أجد ميل المستقيم الممثِّل بيانيًا في كلِّ ممَّا يأتي:





مثال: أجد ميل المستقيم الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

أختار نقطتين على المستقيم وأجد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)}$$

بالتعويض عن  $(x_1, y_1)$  بـ  $(-1, -5)$

وعن  $(x_2, y_2)$  بـ  $(2, 3)$

$$= \frac{8}{3}$$

بالتبسيط

حلُّ المعادلات الخطية (الدرس 2)

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

15  $5x + 5 = 4 - 7x$

16  $2(1 - 2x) = 8x - 3$

17  $3(4x - 2) = 8(x + 6)$

مثال: أحلُّ المعادلة  $3x + 5 = x - 3$

$$3x + 5 = x - 3$$

المعادلة الأصلية

$$2x + 5 = -3$$

ب طرح  $x$  من الطرفين

$$2x = -8$$

ب طرح 5 من الطرفين

$$x = -4$$

بقسمة الطرفين على 2

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ (الدرس 2)

أحلُّ كلاً من المعادلاتِ الآتية:

18  $x^2 - 3x + 2 = 0$

19  $x^2 + 6x + 9 = 0$

20  $x^2 - 4x + 7 = 0$

مثال: أحلُّ المعادلة:  $x^2 + x - 6 = 0$

أحلُّ هذه المعادلة باستعمالِ التحليلِ إلى العوامل:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0, x - 2 = 0$$

$$x = -3, x = 2$$

المعادلة الأصلية

بالتحليلِ إلى العوامل

خاصية الضربِ الصفرية

بحلِّ المعادلتين الناتجتين

إذن، حلُّ المعادلة هو:  $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكن أيضاً حلُّ المعادلة باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أجدُّ قيمَ المعاملات:  $a = 1, b = 1, c = -6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$$

القانون العام

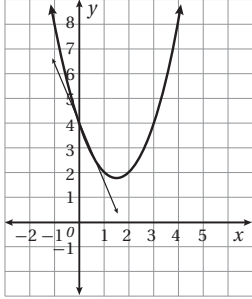
بالتعويض، والتبسيط

إذن، حلُّ المعادلة هو:  $x_1 = -3, x_2 = 2$

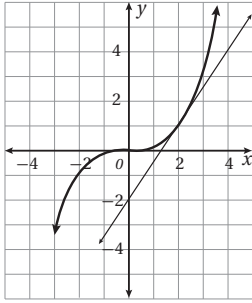
# الدرس 1

## تقدير ميل المنحنى Estimating Slope

الوحدة 6: المشتقات



- 1 يُمثّل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى الاقتران  $y = x^2 - 3x + 4$  عند النقطة  $A(0, 4)$ . أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة  $A$ .



- 2 يُمثّل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى الاقتران  $y = \frac{1}{8}x^3$  عند النقطة  $A(2, 1)$ . أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة  $A$ .

- 3 أقدّر ميل منحنى الاقتران  $y = x^3 - 3x + 1$  عند النقطة  $(2, 3)$ .

- 4 أقدّر ميل منحنى الاقتران  $y = 4x - 3x^2$  عند النقطة  $(2, -4)$ .

- 5 يُمثّل الاقتران  $s(t) = 40t - 16t^2$  موقع جسم يتحرك في مسارٍ مستقيم، حيث  $s$  موقع الجسم بالمتري، و  $t$  الزمن بالثواني. أقدّر سرعة الجسم اللحظية بعد ثانيتين.

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-2	1	2	1

- أرسم منحنى الاقتران  $f(x)$  في الفترة  $-2 \leq x \leq 2$  باستعمال جدول القيم المجاور:

- 6 أرسم مماسًا لمنحنى الاقتران عند النقطة  $(2, 1)$ .

- 7 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة  $(2, 1)$ .

- 8 ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفرًا؟

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

- أرسم منحنى الاقتران  $f(x)$  في الفترة  $-1 \leq x \leq 3$  باستعمال جدول القيم المجاور:

- 9 أرسم مماسًا لمنحنى الاقتران عند النقطة  $(2, 1)$ .

- 10 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة  $(2, 1)$ .

- 11 ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفرًا؟

## الاشتقاق Differentiation

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1  $f(x) = -\frac{7}{3}$

2  $f(x) = \frac{8}{5}$

3  $f(x) = -6x$

4  $f(x) = 3.2x$

5  $f(x) = 3x^{41}$

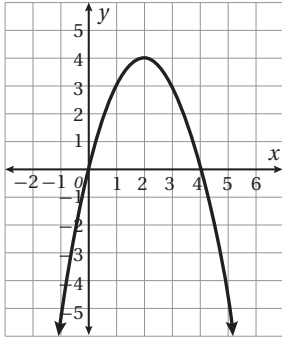
6  $f(x) = -x^{64}$

7  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

8  $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$

9  $f(x) = (x + 4)(x - 2)$

10  $f(x) = (x - 5)^2$



أستعمل التمثيل البياني لمنحنى الاقتران  $f(x) = 4x - x^2$  في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

11 أجد  $f'(x)$ .

12 أجد ميل منحنى الاقتران عند نقطتي تقاطعه مع محور  $x$

13 أحدد على المنحنى النقطة التي يكون عندها الميل 1

14 أحدد على المنحنى النقطة التي يكون عندها الميل -2

أجد قيمة  $f'(-1)$  في كل مما يأتي:

15  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

16  $f(x) = x^3 - x^2 - 2$

17 أجد النقطة التي يكون عندها ميل منحنى  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  يساوي -9

إذا كان  $f(x) = x^2 + 5x + 7$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

18 ميل المنحنى  $f(x)$  عندما  $x = 2$

19 قيمة  $x$  التي يكون عندها ميل منحنى  $f(x)$  يساوي 0

20 تُمثّل العلاقة  $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$  الموقع (بالمتر) لجسم يتحرك في مسارٍ مستقيم، حيث  $t$  الزمن بالثواني.

أجد سرعة الجسم عندما  $t = 2$

21 إذا كان  $f(x) = ax^n + b$ ، حيث  $a$ ، و  $b$  عدداً حقيقيين، و  $n$  عدد صحيح غير سالب، فأجد  $f'(x)$

## القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى Maximum and Minimum Values

أجدُ القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى لكلِّ من الاقترانات الآتية (إن وُجدت):

1  $f(x) = 2$

2  $f(x) = -3$

3  $f(x) = 2x - 1$

4  $f(x) = 5x + 3$

5  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6  $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

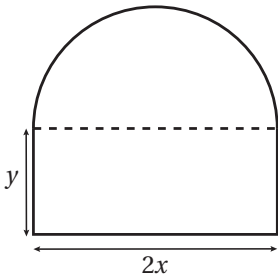
9  $f(x) = x^3(4 - x)$

10  $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أجدُ قيمةَ الثابت  $k$ ، علمًا بأنَّ للاقتران  $f(x) = kx^2 + x$  قيمةً حرجةً عندما  $x = 1$

12 أجدُ العددين الموجبين اللذين مجموعُهُما 150، وحاصل ضربيهما أكبر ما يُمكنُ.

13 يُمثِّل الاقتران  $A(x) = x(9 - x)$  مساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أعدته المهندسةُ شفاءً، حيثُ  $x$  الطولُ بالمتر. أجدُ أكبر مساحةٍ ممكنةٍ للغرفة.



يُمثِّل الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطها 80 m، وهي على شكلٍ مستطيلٍ طولُهُ  $2x$  مترًا، وعرضُهُ  $y$  مترًا، وبجانبه نصفُ دائرةٍ:

14 أبينُ أنَّ الاقتران  $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$  يُمثِّل مساحةَ الحديقة.

15 أستمعُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ  $x$  التي تجعلُ مساحةَ الحديقةِ أكبر ما يُمكنُ.

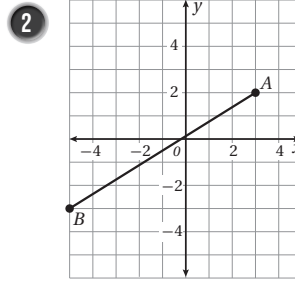
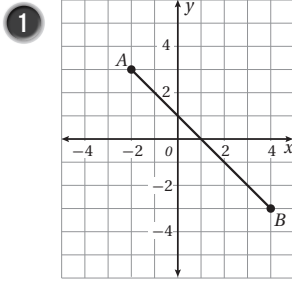
16 أجدُ أكبر مساحةٍ ممكنةٍ للحديقة.

17 أجدُ قيمتي الثابتين  $a, b$  إذا كان للاقتران  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$  قيمةً حرجةً عند النقطة  $(-4, -3)$ ، ثمَّ أحددُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي.

أختبرُ معلوماتي بحلِّ التدريباتِ أولاً، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي من الإجابة، أستعينُ بالمثلِّ المُعطى.

• إيجاد المسافة بين نقطتين (الدرس 1)

أجدُ المسافة بين النقطتين  $A$  و  $B$  في كلِّ ممَّا يأتي:



3  $A(-5, -7), B(2, -3)$

4  $A(8, 0), B(-4, -5)$

5  $A(-4, 7), B(-3, 6)$

مثال: أجدُ المسافة بين النقطتين:  $(-2, -8)$ ، و  $(-6, -5)$ .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

قانون المسافة بين نقطتين

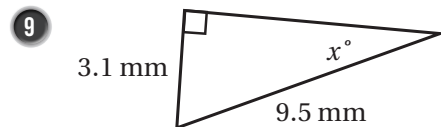
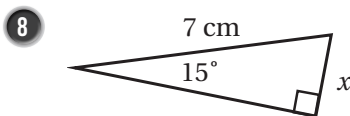
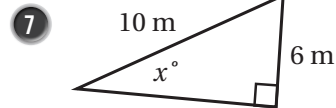
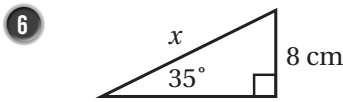
بتعويض إحداثيات النقطتين

بالتبسيط

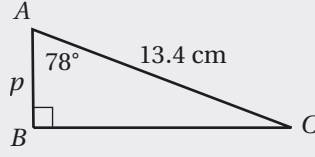
إذن، المسافة بين النقطتين:  $(-2, -8)$ ، و  $(-6, -5)$  هي 5 وحدات طول.

• استعمال النسب المثلثية في إيجاد أطوال أضلاع في مثلث (الدرس 1)

أستعملُ النسبة المثلثية المناسبة لإيجاد قيمة  $x$  في كلِّ من المثلثات الآتية، ثمَّ أجدُ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة الكبرى:



مثال: أستخدمُ النسبة المثلثية المناسبة لإيجاد طول  $\overline{AB}$  في المثلث الآتي، ثمَّ أجدُ النسب المثلثية للزاوية  $A$ :



الضلعُ المجهولُ  $\overline{AB}$  مجاورٌ للزاوية  $A$ ؛ لذا أستخدمُ نسبةً جيبِ التمام للزاوية  $A$ :

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \\ \cos 78^\circ &= \frac{p}{13.4} \\ 0.21 &= \frac{p}{13.4} \\ p &= (0.21)(13.4) \\ p &= 2.81\end{aligned}$$

تعريفُ نسبةِ جيبِ التمام

بتعويضِ القياساتِ المعلومة

بتعويضِ قيمةِ  $78^\circ$

بالضربِ التبادليِّ

بالتبسيطِ

لحسابِ نسبتي الجيبِ والظلِّ للزاوية  $A$ ، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاوية، فإنَّني أستخدمُ نظريةَ فيثاغورس:

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= (BC)^2 + (AB)^2 \\ (13.4)^2 &= (BC)^2 + (2.81)^2 \\ 179.56 &= (BC)^2 + 7.90 \\ 179.56 - 7.90 &= (BC)^2 \\ 171.66 &= (BC)^2 \\ 13.10 &= BC\end{aligned}$$

نظريةُ فيثاغورس

بالتعويضِ

بالتبسيطِ

ب طرحِ 7.90

بالتبسيطِ

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتي الجيبِ والظلِّ للزاوية  $A$ :

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \\ \sin 78^\circ &= \frac{13.10}{13.4} \\ \sin 78^\circ &\approx 0.98 \\ \tan A &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \\ \tan 78^\circ &= \frac{13.10}{2.79} \\ \tan 78^\circ &\approx 4.7\end{aligned}$$

تعريفُ نسبةِ الجيبِ

بالتعويضِ

بالتبسيطِ

تعريفُ نسبةِ الظلِّ

بتعويضِ القياساتِ المعلومة

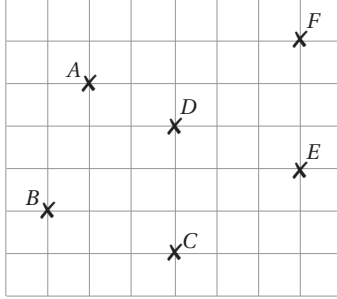
بالتبسيطِ

# الدرس 1

## المتجهات في المستوى الإحداثي Vectors in the Coordinate Plane

الوحدة 7: المتجهات

إذا كان  $\vec{AD} = \langle 2, -1 \rangle$ ، فأكتب كلاً مما يأتي بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره:



1  $\vec{AF}$

2  $\vec{AB}$

3  $\vec{CA}$

4  $\vec{EB}$

5  $\vec{EF}$

6  $\vec{DC}$

7 أكتب كلاً من  $\vec{BD}$ ، و  $\vec{BF}$  بالصورة الإحداثية. ماذا أستنتج من موقع  $B$ ، و  $D$ ، و  $F$ ؟

أستعمل إحداثي النقطة  $A(6, 3)$  للإجابة عن المسائل الآتية:

8 إذا كان  $\vec{AB} = \langle 2, -5 \rangle$ ، فأجد إحداثي النقطة  $B$ .

9 إذا كان  $\vec{AC} = \langle -3, 4 \rangle$ ، فأجد إحداثي النقطة  $C$ .

10 إذا كان  $\vec{AD} = \langle 6, 0 \rangle$ ، فأجد إحداثي النقطة  $D$ .

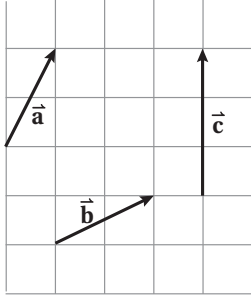
11 شاحنات: أكتب بالصورة الإحداثية السرعة المتجهة لشاحنة تسير على طريق منحدر، علماً بأن سرعتها الأفقية  $v_x = 58 \text{ km/h}$ ، وسرعتها الرأسية  $v_y = 37 \text{ km/h}$ .

12 يدفع صالح مكنسة كهربائية بقوة مقدارها  $272 \text{ N}$ ، وبزاوية قياسها  $51^\circ$  مع المحور الأفقي. أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية.

13 إذا كان  $|\vec{AB}| = 7$ ، حيث  $A(-1, 4)$  هي نقطة بدايته، والنقطة  $B(x, 2)$  هي نقطة نهايته، فأجد قيمة  $x$ ، مبرراً إجابتي.

## جمع المتجهات وطرحها Adding and Subtracting Vectors

الوحدة 7: المتجهات



أمثل بيانيًا كلاً من المتجهات الآتية اعتمادًا على الشكل المجاور:

1  $\vec{a} + \vec{b}$

2  $-\vec{a}$

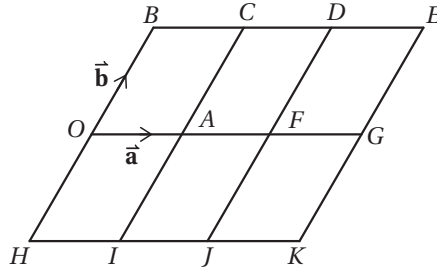
3  $\vec{a} - \vec{c}$

4  $\vec{b} - \vec{a}$

5  $-\vec{c}$

6  $-\vec{a} - \vec{b}$

اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يبين مجموعتين من المستقيمات المتوازية، أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$



7  $\vec{OH}$

8  $\vec{OK}$

9  $\vec{OJ}$

10  $\vec{OI}$

11  $\vec{OC}$

12  $\vec{CO}$

13  $\vec{AK}$

14  $\vec{DI}$

15  $\vec{JE}$

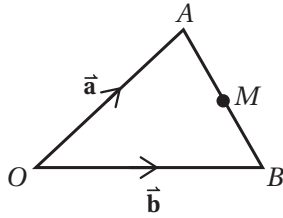
16  $\vec{AB}$

17  $\vec{CK}$

18  $\vec{DK}$

## جمع المتجهات وطرحها

### Adding and Subtracting Vectors



في الشكل المجاور،  $M$  هي نقطة منتصف  $\overline{AB}$   
أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة المتجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :

19  $\overrightarrow{AB}$

20  $\overrightarrow{BO}$

21  $\overrightarrow{AM}$

22  $\overrightarrow{OM}$

23 أحدد على الشكل موقعي النقطتين  $X$  و  $Y$ ، بحيث يكون  $\overrightarrow{OY} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ،  $\overrightarrow{OX} = 2\vec{a} + \vec{b}$ .

24 أكتب  $\overrightarrow{XY}$  بدلالة  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$

25 ما المتجهات الأخرى المكافئة لـ  $\overrightarrow{XY}$ ؟

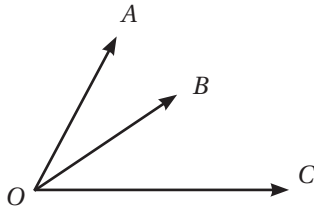
إذا كان  $\vec{a} = \langle 27, -15 \rangle$ ،  $\vec{b} = \langle 9, -21 \rangle$ ،  $\vec{c} = \langle -12, 0 \rangle$  فأجد كلاً مما يأتي:

26  $\vec{a} - \vec{c}$

27  $\vec{b} - 2\vec{a}$

28  $3\vec{c} - \vec{b}$

29  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



يُمثل الشكل المجاور المتجهات الآتية، علماً بأن  $O$  هي نقطة الأصل:

$$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 2 \rangle \quad \overrightarrow{OB} = \langle 4, 1 \rangle \quad \overrightarrow{OC} = \langle 6, 0 \rangle$$

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية، ثم أرسمه على الشكل:

30  $\overrightarrow{AB}$

31  $\overrightarrow{AC}$

32  $\overrightarrow{BC}$

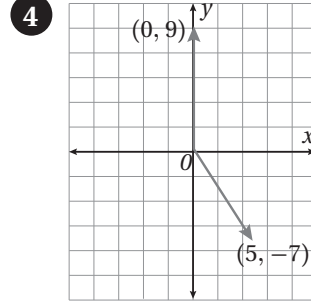
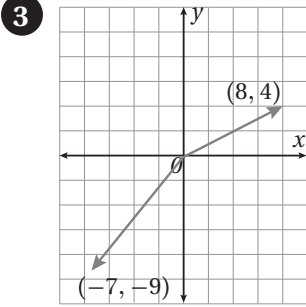
## الضرب القياسي Scalar Product

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

1  $\vec{a} = \langle -1, 5 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle -6, -2 \rangle$

2  $\vec{u} = \langle 3, 9 \rangle$ ,  $\vec{v} = \langle 6, 5 \rangle$

الوحدة 7: المتجهات

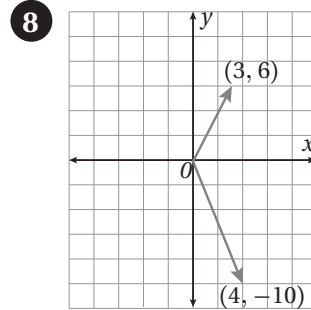
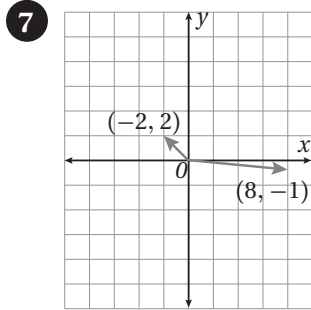


أحدد إذا كان المتجهان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي:

5  $\vec{u} = \langle 4, -9 \rangle$ ,  $\vec{v} = \langle -9, 4 \rangle$

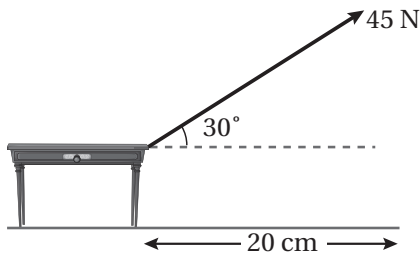
6  $\vec{u} = \langle -5, 2 \rangle$ ,  $\vec{v} = \langle -10, 25 \rangle$

أجد قياس الزاوية بين المتجهين في كل مما يأتي:



9 يُمثل الشكل المجاور سحب طاولة بقوة مقدارها 45 N، وزاوية قياسها  $30^\circ$  مع الأفقي. إذا سُحِبَت الطاولة مسافة

20 cm، فأجد مقدار الشغل الذي بُدِّل.



أختبرُ معلوماتي بحلِّ التدريباتِ أولاً، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي من الإجابة، أستعينُ بالمثلِ المُعطى.

المَدَى والمَدَى الرَّبِيعِيُّ (الدرس 2)

أجدُ المَدَى والرُّبَيعِيَّاتِ والمَدَى الرَّبِيعِيَّ لِكُلِّ مَجْمُوعَةٍ مِن بَيَانَاتٍ مِمَّا يَأْتِي:

1 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

2 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

3

السائق	الورقة
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاح:  $19|3 = 193$

4

السائق	الورقة
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
10	
11	7

المفتاح:  $5|0 = 5.0$

سرعة: يبيِّن الجدولُ أدناه سرعةَ مجموعةٍ مِنَ الحيواناتِ بِالْكِيلومترِ لِكُلِّ ساعةٍ.

الحيوانُ	السرعةُ (km/h)
الفهدُ الصيَّادُ	100
التمرُّ	58
القطَّةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

5 أجدُ المَدَى الرَّبِيعِيَّ للبياناتِ.

6 أصفُ توزيعَ البياناتِ.



إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة (الدرس 3)

أجد الوسط الحسابي لكلٍّ من البيانات الآتية:

أهداف مباريات كرة قدم.	8
4, 3, 1, 2, 3, 5	

نقاط أشواط لعبة إلكترونية.	7
77, 66, 49, 58, 75	

9 مواليد: كانت كتل المواليد الجدد يوم الخميس في أحد المستشفيات بالكيلوغرام كما يأتي:  
3.7, 2.8, 4, 3.2, 3.1, 2.9, 3.4 أجد الوسط الحسابي لكتل هؤلاء المواليد.

مثال: أجد الوسط الحسابي للأعداد الآتية: 19, 5, 123, 37

$$19 + 5 + 123 + 37 = 184$$

$$\bar{x} = \frac{184}{4} = 46$$

بإيجاد مجموع القيم

بقسمة المجموع على عدد القيم

إذن: الوسط الحسابي يساوي 46

إيجاد الوسيط لبيانات مفردة (الدرس 3)

أجد الوسيط لكل مجموعة من الأعداد الآتية:

10 14, 70, 55, 3, 2, 100, 9

11 4, 3, 2, 4, 7, 1

12 ارتفاعات بعض المباني بالأمتار: 20, 24, 21, 23, 23, 21, 23, 21

13 أعمار معلّمين بالسنوات: 28, 26, 41, 32, 49

مثال: أجد الوسيط لكل مجموعة من الأعداد الآتية:

a) 13, 20, 11, 15, 30, 27, 10

الخطوة 1 أرتب القيم تصاعدياً: 10, 11, 13, 15, 20, 27, 30

الخطوة 2 أبدأ بشطب قيمة من اليسار مع قيمة من اليمين، إلى أن أجد القيمة التي في المنتصف.

~~10~~, ~~11~~, ~~13~~, (15), ~~20~~, ~~27~~, ~~30~~

إذن: الوسيط هو 15

b) 400, 290, 355, 310, 430, 300, 270, 320

الخطوة 1 أرتب القيم تصاعدياً، وأشطب الأعداد من اليمين واليسار إلى أن أصل إلى الوسيط:

~~270~~, ~~290~~, ~~300~~, (310, 320), ~~355~~, ~~400~~, ~~430~~

الخطوة 2 توجد قيمتان وسيطتان. إذن: الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين:

$$\frac{310 + 320}{2} = 315$$

### إيجاد المنوال لبيانات مفردة (الدرس 3)

أجد المنوال لكل مجموعة بيانات مما يأتي:

14 علامات مجموعة من الطلبة في اختبار الرياضيات: 15, 14, 10, 6, 13, 9, 16, 13, 13, 19

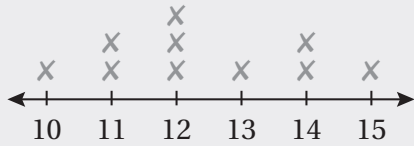
15 الرياضة المفضلة لدى مجموعة من الطلبة: كرة القدم، كرة السلة، السباحة، كرة القدم، كرة الطائرة، كرة القدم، تنس الطاولة.

أجد المنوال لكل مجموعة من الأعداد الآتية:

16 3, 5, 3, 1, 2, 3, 9, 9, 9, 3, 7

17 5, 12, 24, 10, 12, 5, 3, 12, 3, 7, 17, 5

أعمارُ المشاركين في المسابقة



مثال: أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعة بياناتٍ ممَّا يأتي:

(a) أعمارُ المشاركين في إحدى المسابقات

ألاحظُ مِنَ الشَّكْلِ أَنَّ أَكْثَرَ قِيَمَةٍ تَكَرَّرَتْ هِيَ 12

إذن: المنوالُ 12

(b) مجموعة الأحرف الأولى مِنْ أسماءِ أفرادِ عائلةٍ:

س، ل، س، ن، ل، ن

ألاحظُ أَنَّ كُلَّ حَرْفٍ تَكَرَّرَ مَرَّتَيْنِ، وَلَا يَوْجَدُ حَرْفٌ تَكَرَّرَ أَكْثَرَ مِنْ غَيْرِهِ؛ لِذَا، لَا يَوْجَدُ مَنْوَالٌ لِهَذِهِ الْبَيَانَاتِ.

### تقدير مقاييس النزعة المركزية لبياناتٍ منظمّةٍ في جداول تكرارية ذات فئاتٍ (الدرس 3)

أطوالُ أزهارِ النرجسِ ( $t$ )	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$10 \leq t < 14$	21
$14 \leq t < 18$	57
$18 \leq t < 22$	65
$22 \leq t < 26$	52
$26 \leq t < 30$	12



أزهار: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ مِنْ أزهارِ

النرجسِ، مُقَرَّبَةً إِلَى أَقْرَبِ سَنْتِيْمَتَرٍ:

18 أقدِّرُ الوَسْطَ الْحَسَابِيَّ لِأَطْوَالِ الْأَزْهَارِ.

19 أقدِّرُ مَنْوَالَ أطْوَالِ الْأَزْهَارِ.

20 أقدِّرُ وَسِيْطَ أطْوَالِ الْأَزْهَارِ.

عددُ الكُتُبِ الْمَبِيْعَةِ	
عددُ الكُتُبِ	التكرارُ
1 - 3	10
4 - 6	8
7 - 9	4
10 - 12	1
13 - 15	2

كتب: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكُتُبِ الَّتِي اشْتَرَاهَا 25 شَخْصًا مِنْ

مكتبةٍ زِيَادٍ فِي أَحَدِ الْأَيَّامِ:

21 أقدِّرُ الوَسْطَ الْحَسَابِيَّ لِلْبَيَانَاتِ.

22 أقدِّرُ مَنْوَالَ الْبَيَانَاتِ.

23 أقدِّرُ وَسِيْطَ الْبَيَانَاتِ.

مثال:

طقس: يُبين الجدول المجاور توزيعًا لأيام شهر آذار بحسب درجات الحرارة (إلى أقرب درجة سلسية) في محافظة عجلون:

درجات الحرارة ( $T$ )	
درجات الحرارة ( $^{\circ}\text{C}$ )	التكرار
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	7
$14 \leq T < 16$	12
$16 \leq T < 18$	5
$18 \leq T < 20$	3

(a) أقدّر الوسط الحسابي لدرجات الحرارة.

أنشئ جدولًا بإضافة عمودين إلى الجدول المعطى، أنظّم فيهما مراكز الفئات ونواتج ضرب التكرارات في مراكز الفئات على النحو الآتي:

درجات الحرارة ( $^{\circ}\text{C}$ )	$f$	$x$	$f \times x$
$10 \leq T < 12$	3	11	33
$12 \leq T < 14$	7	13	91
$14 \leq T < 16$	12	15	180
$16 \leq T < 18$	5	17	85
$18 \leq T < 20$	3	19	57
المجموع	30		446

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} \\ &= \frac{446}{30} \\ &\approx 14.9 \end{aligned}$$

صيغة الوسط الحسابي

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الحرارة هو  $14.9^{\circ}\text{C}$  تقريبًا.

(b) أقدّر منوال درجات الحرارة.

لتقدير المنوال، أبحث عن مركز الفئة الأكثر تكرارًا. وبالرجوع إلى البيانات في الجدول أعلاه، ألاحظ أن الفئة:  $14 \leq t < 16$  تُقابل أعلى تكرار، وهو 12. وبذلك، فإن المنوال هو مركز هذه الفئة تقريبًا.

إذن، منوال درجات الحرارة هو  $15^{\circ}\text{C}$  تقريبًا.

(c) أقدِّر وسيط درجات الحرارة.

درجات الحرارة (°C)	التكرار التراكمي
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \leq T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \leq T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \leq T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

**الخطوة 1** أنشئ جدول التكرار التراكمي بإضافة عمود التكرار التراكمي كما في الجدول المجاور.

**الخطوة 2** أجدُّ رتبة الوسيط.

$$\text{رتبة الوسيط هي: } \frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$$

**الخطوة 3** أجدُّ الفترة التي يقع فيها وسيط البيانات.

بما أن رتبة الوسيط هي 15.5، فإن وسيط درجات الحرارة يقع في الفترة:  $14 \leq t < 16$ ؛ لأن التكرار التراكمي لهذه الفترة هو أوَّل تكرار تراكمي أكبر من أو يساوي 15.5. وبذلك، فإن الوسيط هو مركز هذه الفئة تقريبًا. إذن، وسيط درجات الحرارة هو 15 تقريبًا.

### • إيجاد الانحراف المعياري، والتباين لبيانات منمّمة في جداول تكرارية (الدرس 3)

**24** أجدُّ المدى، والانحراف المعياري، والتباين للبيانات في الجدول التكراري الآتي:

القيمة	التكرار
5	3
6	5
7	8
8	3
15	1

القيمة $x$	10	12	15	17
التكرار $f$	1	3	4	2

مثال: أجد الانحراف المعياري، والتباين للبيانات في الجدول التكراري المجاور:

أضيف إلى الجدول أعمدة لأحسب فيها القيم الآتية:

$$x \times f, x - \mu, (x - \mu)^2, (x - \mu)^2 f$$

القيمة $x$	التكرار $f$	$x \times f$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 f$
10	1	10	-4	16	16
12	3	36	-2	4	12
15	4	60	1	1	4
17	2	34	3	9	18
المجموع	10	140			50

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} \quad \text{الوسط الحسابي}$$

$$= \frac{140}{10} = 14 \quad \text{بالتعويض والتبسيط}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2 \times f}{(\sum f)} \quad \text{التباين}$$

$$= \frac{50}{10} = 5 \quad \text{بالتعويض والتبسيط}$$

$$\sigma = \sqrt{5} \approx 2.24 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

### • إيجاد احتمال وقوع حادث في تجربة عشوائية (الدرس 4)

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء، و5 كرات زرقاء، و4 كرات خضراء، علمًا بأن جميع الكرات مُتماثلة. سحبت هند كرة واحدة عشوائيًا، ما احتمال سحب كرة:

27 صفراء؟

26 ليست زرقاء؟

25 حمراء؟

**مثال:** رمى خليل حجرَ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. أجدُ احتمالَ وقوع كلِّ من الحادَينِ الآتَينِ:

(a) ظهورُ عددٍ أقلَّ من 3

إذا افترضتُ أنَّ  $A$  هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أقلَّ من 3، فإنَّ:

$$A = \{1, 2\}, n(A) = 2$$

عناصرَ الحادثِ  $A$ ، وعددها

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6$$

عناصرَ فضاءِ العَيَّة، وعددها

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

احتمالَ الحادثِ  $A$

(b) ظهورُ عددٍ أكبرَ من 6

إذا افترضتُ أنَّ  $B$  هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أكبرَ من 6، فإنَّ:

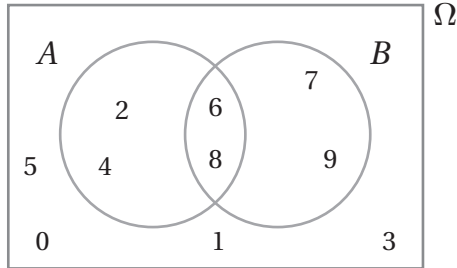
$$B = \emptyset, n(B) = 0$$

عناصرَ الحادثِ  $B$ ، وعددها

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

احتمالَ الحادثِ  $B$

### إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ فنِّ (الدرس 4)



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ من 0 إلى 9 على مجموعةٍ من البطاقاتِ المُتطابِقة، ثمَّ اختيرتْ بطاقةٌ عشوائياً، ومثَّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادَينِ  $A$  و  $B$  في شكلٍ فنِّ المجاورِ. أجدُ كُلاً من الاحتمالاتِ الآتية:

28  $P(A)$

29  $P(B)$

30  $P(A \cap B)$

31  $P(A \cup B)$

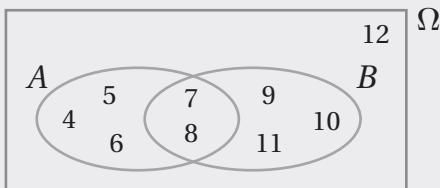
32  $P(\bar{A})$

33  $P(\bar{B})$

34  $P(\overline{A \cap B})$

35  $P(\overline{A \cup B})$

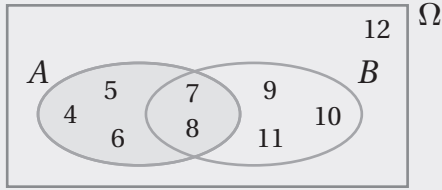
36  $P(B - A)$



**مثال:** كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ من 4 إلى 12 على مجموعةٍ من البطاقاتِ

المُتطابِقة، ثمَّ اختيرتْ بطاقةٌ عشوائياً، ومثَّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادَينِ  $A$  و  $B$  في شكلٍ فنِّ المجاورِ. أجدُ كُلاً من الاحتمالاتِ الآتية:

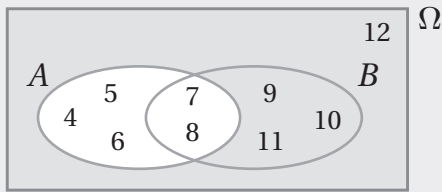
a)  $P(A)$



بما أن عدد عناصر الفضاء العيني هو 9، وعدد عناصر الحادث  $A$  هو 5 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور، فإن:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

b)  $P(\bar{A})$

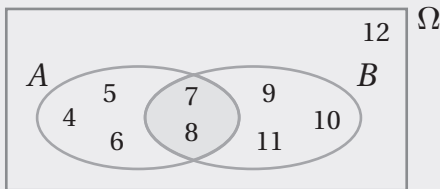


$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{صيغة احتمال المتمة}$$

$$= 1 - \frac{5}{9} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{4}{9} \quad \text{بالتبسيط}$$

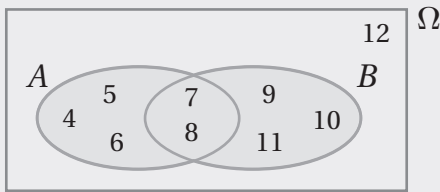
c)  $P(A \cap B)$



بما أن  $A \cap B$  يعني وقوع الحادث  $A$  والحادث  $B$  معاً، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 2 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور. إذن:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

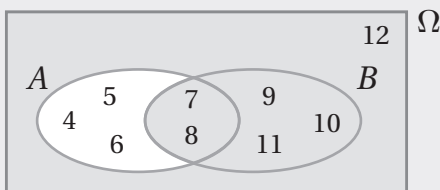
d)  $P(A \cup B)$



بما أن  $A \cup B$  يعني وقوع الحادث  $A$ ، أو وقوع الحادث  $B$ ، أو وقوع الحادثين معاً، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 8 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور. إذن:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{9}$$

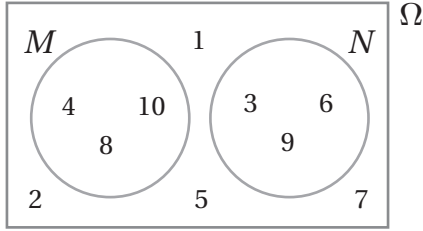
e)  $P(\bar{A} \cup B)$



بما أن عدد عناصر هذا الحادث هو 6 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور، فإن:

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{6}{9}$$

• إيجاد احتمال الحوادث المتنافية باستعمال أشكال فن (الدرس 4)

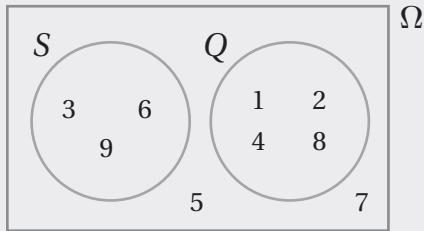


كُتِبَت الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائياً، ومثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين  $M$  و  $N$  في شكل فن المجاور. أجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

37  $P(M \cap N)$

38  $P(M \cup N)$

39  $P(M - N)$



مثال: كُتِبَت الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9 على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائياً، ومثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين  $S$  و  $Q$  في شكل فن المجاور. أجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

a)  $P(S \cap Q)$

ألاحظ من شكل فن أن الحادث  $S$  والحادث  $Q$  متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما. إذن:

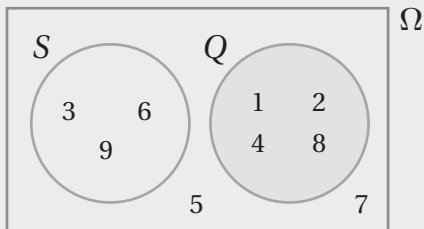
$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

b)  $P(S \cup Q)$

بما أن الحادث  $S$  والحادث  $Q$  متنافيان، فإن  $S \cup Q$  يعني وقوع الحادث  $S$  فقط، أو وقوع الحادث  $Q$  فقط؛ لأنهما لا يقعان معاً. ومن ثم، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 7 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور. إذن، احتمال الحادث  $S \cup Q$  هو:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

c)  $P(Q - S)$



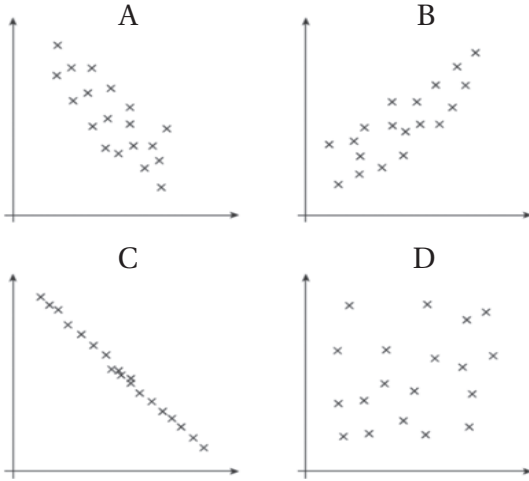
بما أن الحادث  $S$  والحادث  $Q$  متنافيان، فإن  $Q - S$  يعني وقوع الحادث  $Q$  فقط؛ لأنهما لا يقعان معاً كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور. إذن:

$$P(Q - S) = \frac{4}{9}$$

# الدرس 1

## أشكال الانتشار Scatter Graphs

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات



مستعيناً بالأشكال المجاورة، أكتب في الفراغ الآتي رمزَ

شكل الانتشار المناسب:

1 يدل شكل الانتشار ..... على عدم وجود ارتباط بين المتغيرين.

2 يدل شكل الانتشار ..... على وجود ارتباط موجب بين المتغيرين.

3 يدل شكل الانتشار ..... على وجود ارتباط سالب وقوي بين المتغيرين.

يُبين الجدول المجاور الكتل والأطوال لـ 12 طالبة في الصف السابع:

الاسم	الكتلة (kg)	الطول (cm)
مريم	41	123
شيماء	48	125
نانسي	47.5	127
خلود	52	128
أسيل	49.5	129
لانا	55	129
يقين	55	133
لورا	55.5	135
هيا	61	137
بيان	65.5	140
ياسمين	60	143
تمارا	68	145

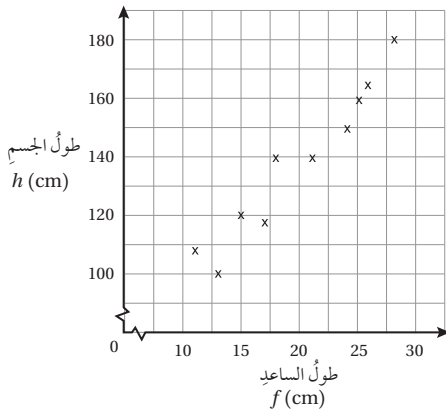
4 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول، واصف الارتباط بين الكتلة والطول.

5 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات الممثلة في شكل الانتشار.

6 صفاء إحدى طالبات الصف السابع، وطولها 132 cm أستمع المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير كتلتها.

7 انتقلت طالبة في الصف السابع من مدرسة أخرى إلى مدرسة هؤلاء الطالبات. أقدّر طول الطالبة الجديدة، علماً بأن كتلتها 45 kg

يُمثل شكل الانتشار المجاور العلاقة بين طول الساعد  $f$  بالسنتيمتر، وطول الجسم  $h$  بالسنتيمتر لعشرة أشخاص:



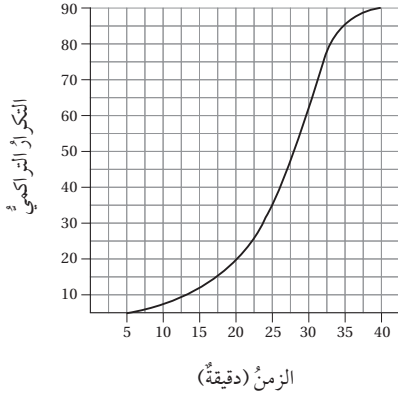
8 أصف الارتباط بين طول الجسم وطول الساعد.

9 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أكتب معادلته.

10 أستمع المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير طول شخص، طول ساعده 27 cm

# الدرس 2

## المنحنى التكراري التراكمي Cumulative Frequency Graph



سُجِّلَ الزمن الذي استغرقته سيارة الإسعاف لنقل مريض من مكانه إلى المستشفى في عدد من الحالات. مستعيناً بالمنحنى التكراري التراكمي المجاور الذي يُمثل البيانات المتعلقة بذلك:

- 1 أقدّر وسيط البيانات.
- 2 أجد المدى الربيعي.
- 3 أجد المئين 40، مُفسراً معناه.

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات

الفتات (عدد القراء)	التكرار (عدد الأخبار)
$0 \leq x < 50$	6
$50 \leq x < 100$	9
$100 \leq x < 150$	15
$150 \leq x < 200$	25
$200 \leq x < 250$	31
$250 \leq x < 300$	37
$300 \leq x < 350$	32
$350 \leq x < 400$	17
$400 \leq x \leq 450$	5

نشر موقع إخباري 177 خبراً في أحد الأيام. وقد رصد القائمون على الموقع عدد الأشخاص الذين قرؤوا كل خبر، ثم نظموا البيانات في الجدول التكراري المجاور:

- 4 أكمل جدول التكرار التراكمي.
- 5 أرسم المنحنى التكراري التراكمي.
- 6 أقدّر وسيط البيانات، والمدى الربيعي.
- 7 إذا قرّر القائمون على هذا الموقع حذف الأخبار التي قرأها أقل من 60 شخصاً، فما عدد الأخبار التي ستُحذف؟

خضعت مجموعتان لاختبار حساب ذهني. وقد رُصد عدد الإجابات الصحيحة لكل مجموعة في الجدول الآتي:

عدد الإجابات الصحيحة	$0 \leq x < 4$	$4 \leq x < 8$	$8 \leq x < 12$	$12 \leq x < 16$	$16 \leq x \leq 20$
A: الفتيان	5	9	23	28	17
B: الفتيات	6	10	19	25	22

8 أرسم المنحنى التكراري التراكمي لكل من الفتيان والفتيات على ورقة الرسم البياني نفسها.

9 أقدّر وسيط البيانات، والمدى الربيعي لكل منهما.

10 أي المجموعتين أداؤها أفضل في الاختبار؟ أبرر إجابتي.

# الدرس 3

## مقاييس التشتت للجداول التكرارية ذات الفئات Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

يُبيّن الجدول التكراري الآتي توزيعاً لأطوال بعض النباتات على مدار أسبوع في تجربة زراعية:

الطول (cm)	(f)	(x)	f · x	(x - μ)	(x - μ) <sup>2</sup>	f × (x - μ) <sup>2</sup>
25 ≤ t < 29	2					
30 ≤ t < 34	4					
35 ≤ t < 39	7					
40 ≤ t < 44	10					
45 ≤ t < 49	8					
50 ≤ t < 54	6					
55 ≤ t ≤ 59	3					
المجموع						

1 أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول.

2 أقدّر كلاً من الوسط الحسابي، والتباين.

الزمن (min)	التكرار
0 ≤ t < 5	4
5 ≤ t < 10	9
10 ≤ t < 15	20
15 ≤ t < 20	7
20 ≤ t ≤ 25	5

يُبيّن الجدول المجاور توزيع مدّة الانتظار t بالدقيقة لعدد من مُراجعي دائرة حكومية من لحظة أخذ المُراجع بطاقة المراجعة إلى لحظة استدعائه من الموظف المعني:

3 أقدّر الوسط الحسابي.

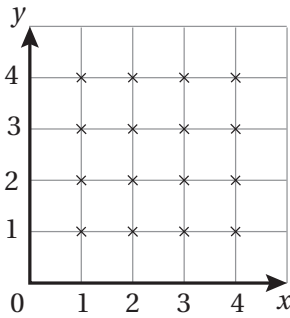
4 أقدّر التباين، والانحراف المعياري.

5 مسألة مفتوحة: أجمع بيانات لـ 20 مشاهدة، وأنظّمها في جدول تكراري ذي فئات، ثم أقدّر الوسط الحسابي والتباين.

## احتمالات الحوادث المتنافية Probability of Mutually Exclusive Events

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من بين الأعداد: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10، إذا كان (A) حادث اختيار عدد أكبر من 4، و (B) حادث اختيار عدد يقبل القسمة على 3 من دون باقي، فأجد:

- 1 احتمال اختيار عدد أقل من 4، ويقبل القسمة على 3
- 2 احتمال اختيار عدد أقل من 4، أو يقبل القسمة على 3



- 3 يُبين التمثيل البياني المجاور فضاء العينة  $\Omega$  لتجربة عشوائية. إذا كان (A) يُمثل النقاط الواقعة على المستقيم  $x = 3$ ، وكان (B) يُمثل النقاط الواقعة على المستقيم  $y = 5 - x$ ، إذا اختيرت نقطة عشوائية، فما احتمال أن تقع على كلا المستقيمين:  $x = 3$  و  $y = 5 - x$ ؟

إذا كان A و B حادثين في تجربة عشوائية، وكان  $P(A) = 0.5$ ،  $P(B) = 0.6$ ،  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

4  $P(A \cap B)$

5  $P(A \cap \bar{B})$

6  $P(B \cup \bar{A})$

المجموع	الرياضيات	العلوم	المبحث المفضل
175	85	90	مهندسة كهربائية:
171	80	91	مهندسة كيميائية:
170	89	81	مهندسة ميكانيكية:
516	254	262	المجموع:

سُئِلت 516 مهندسة كهربائية وكيميائية وميكانيكية عن المبحث المفضل لكل منهن عندما كنَّ في الصف العاشر، وقد نُظِّمَّت إجابتهنَّ في الجدول المجاور. إذا اختيرت مهندسة عشوائياً من هذه العيّنة، فما احتمال:

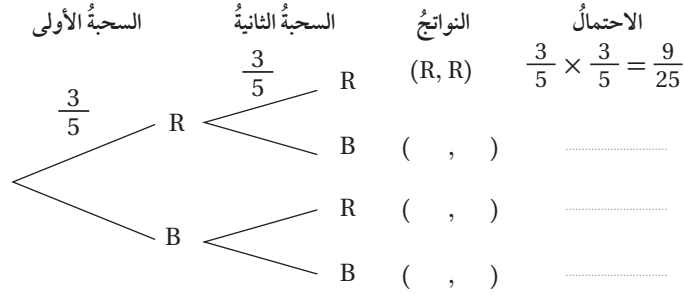
- 7 اختيار مهندسة كهربائية تُفضّل مبحث العلوم؟
- 8 اختيار مهندسة ميكانيكية تُفضّل مبحث الرياضيات؟
- 9 اختيار مهندسة ميكانيكية، أو مهندسة تُفضّل مبحث الرياضيات؟
- 10 اختيار مهندسة لا تُفضّل مبحث الرياضيات، لكنها ليست مهندسة كيميائية؟

# الدرس 5

## احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة Probability of Independent and Dependent Events

يحتوي كيسٌ على 3 كراتٍ زجاجيةٍ حمراء (R)، وكرتين زجاجيتين زرقاوين (B)، علمًا بأن جميع الكرات مُتماثلة. إذا سُحِبَت من الكيسِ كرتانِ على التوالي مع الإرجاع:

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات

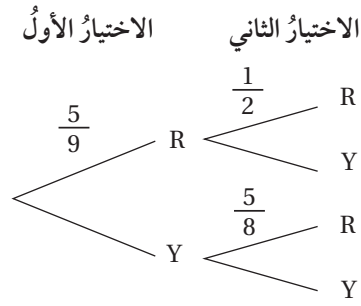


1 أكمل الشجرة الاحتمالية المجاورة.

2 أجد احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه.

3 أجد احتمال أن تكون واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة حمراء اللون.

4 أجد احتمال ألا تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.



يحتوي كيسٌ على 5 حبات حلوى بنكهة النعناع (R)، و4 حباتٍ أخرى بنكهة الكراميل (Y)، علمًا بأن جميع الحبات مُتماثلة. اختارَ طفلٌ من الكيسِ حبةً حلوى عشوائيًا وأكلها، ثم اختارَ حبةً أخرى عشوائيًا وأكلها:

5 أكمل الشجرة الاحتمالية المجاورة.

6 ما احتمال أن يكون الطفل قد أكل حبتَي حلوى بنكهة الكراميل؟

7 ما احتمال أن يكون الطفل قد أكل حبةً حلوى بنكهة النعناع في المرة الثانية، علمًا بأنه أكل حبةً بنكهة الكراميل في المرة الأولى؟

إذا كان  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.7$ ,  $P(A \cup B) = 0.8$ ، فأجد:

8  $P(A \cap B)$

9  $P(B | A)$

10  $P(A | B)$

11 ألقى حجرًا نردٍ منتظمٍ عشوائيًا مرتين متتاليتين، وجمعَ الرقمين الظاهريين على الوجه العلوي. أجد احتمال أن يكون المجموع 8 إذا ظهر الرقم 5 مرةً واحدةً على الأقل.









