المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف التاسع - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي إبراهيم أحمد عمايرة أيمن ناصر صندوقه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هـذا الكتاب في مـدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقم (2022/8)، تاريـخ 2022/12/15 م، وقرار مجلس التربيـة والتعليم رقم (2022/131)، تاريـخ 2022/12/28 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 407 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/783)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتاب الطالب: الصف التاسع: الفصل الدراسي الثاني/ المركز الوطني لتطوير المناهج.– عمّان: المركز، 2023

(174) ص.

ر.إ.: 2023/2/783

الواصفات: / الرياضيات/ / الكتب الدراسية/ / أساليب التدريس/ / التعليم الإعدادي/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1443 هـ / 2022 م

أعيدت طباعته 2023 – 2025 م

المقدمة

الحمد لله رَبِّ العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمُرسَلين، وبعد؛ فانطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُسهِم في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المقدمة لهم.

احتوى هذا الكتاب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المسائل يُعَدُّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا نُدرِك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُستخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، لا سيَّما في شبكة الإنترنت التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لِما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت طلبتنا أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي الذي ينمو بتسارع في عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نأمل أنْ ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 5

العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ

Relationships in Triangles and Trigonometric Ratios

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

المُثلَّثُ هوَ أبسطُ المُضلَّعاتِ، لكنَّ أضلاعَهُ وزواياهُ تمتازُ بخصائصَ فريدةٍ جعلتْهُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ الهندسيةِ استعمالًا في التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ. فمثلًا، يستعملُ المهندسونَ المُثلَّثاتِ لتصميمِ جسورٍ قويةٍ تتوزَّعُ فيها الأحمالُ على الأعمدةِ بالتساوي، ويستعملونَ النسبَ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ لتحديدِ المسافاتِ التي يصعبُ قياسُها بصورةٍ مباشرةٍ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتشابِهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابهِ: SAS، وSSS، و AA.
- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتطابِقةِ باستعمالِ الحالاتِ الآتيةِ: SSS، و SAS، و AAS، و ASA، و HL.
- ✓ توظيفَ نظريةِ فيثاغورس في إيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ استعمالَ تشابهِ المُثلَّثاتِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تطبيقَ النظرياتِ الخاصةِ بالأجزاءِ المُتناسِبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- استعمالَ مُنصِّفاتِ المُثلَّثِ العموديةِ ومُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادَ مركزِ مُثلَّثٍ، وملتقى ارتفاعاتِهِ.
- تمييزَ جيبِ الزاويةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ.

مشروعُ الوحدةِ

الهندسةُ والفنُّ

فكرةُ المشروعِ توظيفُ مفاهيمَ هندسيةٍ في عملِ لوحةٍ فنيةٍ.

الموادُّ والأدواتُ ورقةٌ مقاسُها (A3)، ألوانٌ، أدواتٌ هندسيةٌ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أرسمُ على الورقةِ مجموعةً منَ المُثلَّثاتِ المختلفةِ، بحيثُ تكونُ مُتداخِلةً في ما بينَها، وتمتدُّ على مساحةِ الورقةِ كلِّها.

2 أختارُ مُثلَّثينِ منْ هذهِ المُثلَّثاتِ، ثمَّ أرسمُ مُثلَّثَ القطعِ المُنصِّفةِ لكلٍّ منْهُما.

3 أُشاهِدُ مقطعَ الفيديو في الرمزِ المجاورِ الذي تظهرُ فيهِ خطواتُ رسمِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.

4 أختارُ مُثلَّثينِ منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ لكلٍّ منْهُما دائرةً خارجيةً، مُتَّبِعًا الخطواتِ الواردةَ في مقطعِ الفيديو.

5 أُشاهِدُ مقطعَ الفيديو في الرمزِ المجاورِ الذي تظهرُ فيهِ خطواتُ رسمِ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.

6 أختارُ مُثلَّثينِ منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ لكلٍّ منْهُما دائرةً داخليةً، مُتَّبِعًا الخطواتِ الواردةَ في مقطعِ الفيديو.

7 أختارُ مُثلَّثًا منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ ارتفاعاتِهِ الثلاثةَ.

8 أُلوِّنُ أجزاءَ اللوحةِ بألوانٍ مناسبةٍ.

9 أختارُ ثلاثةَ مُثلَّثاتٍ قائمةٍ منَ اللوحةِ، ثمَّ أجدُ جميعَ النسبِ المُثلَّثيةِ لزواياها الحادَّةِ.

10 أختارُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ منَ اللوحةِ، ثمَّ أكتبُ مسألةً لإيجادِ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في هذا المُثلَّثِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلٍ لي إيجادَ الطولِ المجهولِ.

11 أختارُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ منَ اللوحةِ، ثمَّ أكتبُ مسألةً لإيجادِ قياسِ زاويةٍ حادَّةٍ في هذا المُثلَّثِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلٍ لي إيجادَ قياسِ الزاويةِ المجهولةِ.

عرضُ النتائجِ:

أُصمِّمُ مطويةً أعرِضُ فيها:

- خطواتِ عملِ المشروعِ، والنتائجَ التي توصَّلْتُ إليْها.
- شرحًا مُختصَرًا عنِ العلاقاتِ في المُثلَّثاتِ التي ظهرَتْ في اللوحةِ.
- معلومةً إضافيةً عرفْتُها عنِ المُثلَّثاتِ في أثناءِ العملِ في المشروعِ.

الدرس
1

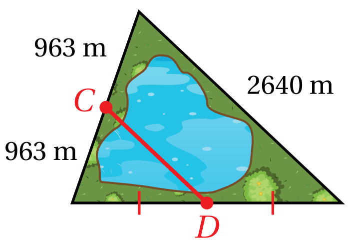
الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثاتِ
Proportional Parts in Triangles

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الأجزاءِ المُتناسِبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

المصطلحاتُ القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ.

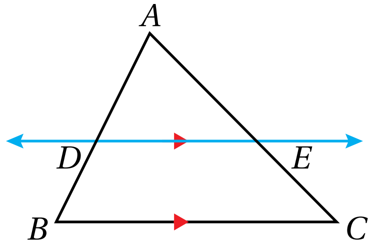
مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المُجاوِرُ بحيرةً شُــيِّدَ فوقَها الجسرُ $\overline{CD}$.

أجِدُ طولَ الجسرِ.



الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثِ

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ المُثلَّثَ ABC، حيثُ: $\overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$، و $\overleftrightarrow{DE}$ يقطعُ $\overline{AB}$ في D، ويقطعُ $\overline{AC}$ في E. ما العلاقةُ بينَ ΔABC و ΔADE؟



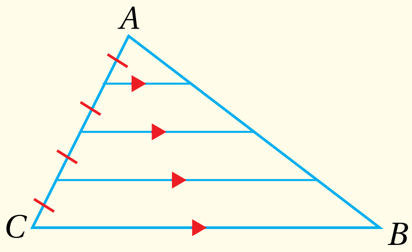
يُمكِنُ استكشافُ هذهِ العلاقةِ عنْ طريقِ تنفيذِ النشاطِ الهندسيِّ الآتي.

نشاطٌ هندسيٌّ **التناسبُ في المُثلَّثِ**

الإجراءاتُ:

الخطوةُ 1: أرسمُ المُثلَّثَ ABC مُختلفَ الأضلاعِ كما في الشكلِ المجاورِ.

الخطوةُ 2: أُقسِّمُ أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، وليكنْ $\overline{AC}$، إلى أربعةِ أجزاءٍ مُتطابقةٍ، ثمَّ أستعملُها لرسمِ قطعٍ مستقيمةٍ مُوازيةٍ للضلعِ $\overline{CB}$ كما في الشكلِ المُجاورِ.



أُحلِّلُ النتائجَ:

1 كمْ مُثلَّثًا في الشكلِ يُشابِهُ المُثلَّثَ ABC ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2 ما علاقةُ طولِ كلِّ قطعةٍ منَ القطعِ المستقيمةِ المُتوازيةِ بطولِ $\overline{CB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتذكَّرُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إثباتُ تشابهِ مُثلَّثينِ باستعمالِ عددٍ منَ المُسلَّماتِ والنظرياتِ، مثلِ: التشابهِ بزاويتينِ (AA)، والتشابهِ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)، والتشابهِ بضلعينِ وزاويةٍ محصورةٍ (SAS).

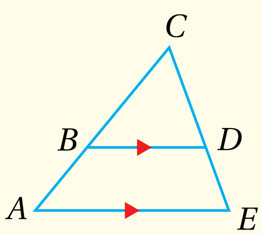
أتذكَّرُ

تنصُّ مُسلَّمةُ التشابهِ بزاويتينِ (AA) على أنَّهُ إذا طابقَتْ زاويتانِ في مُثلَّثٍ زاويتينِ في مُثلَّثٍ آخرَ، فإنَّ المُثلَّثينِ مُتشابِهانِ.

أستنتجُ منَ النشاطِ السابقِ أنَّهُ عندَ رسمِ مستقيمٍ يوازي أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، ويقطعُ ضلعيْهِ الآخرينِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إثباتُ أنَّ المُثلَّثينِ الناتجينِ مُتشابِهانِ، وذلكَ باستعمالِ مُسلَّمةِ التشابهِ AA. وبما أنَّ المُثلَّثينِ مُتشابِهانِ، فإنَّ أطوالَ أضلاعِهِما المُتناظِرةِ مُتناسِبةٌ، وهذا يقودُنا إلى النظريةِ الآتيةِ.

نظريةٌ — **التناسبُ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: إذا وازى مستقيمٌ ضلعًا منْ أضلاعِ مُثلَّثٍ، وقطعَ ضلعيْهِ الآخرينِ، فإنَّهُ يُقسِّمُهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ.



بالرموزِ: إذا كانَ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإنَّ $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$.

إثباتُ نظريةٍ

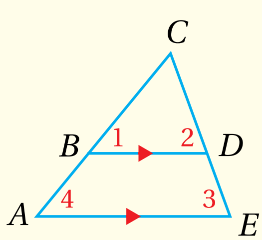
الخطوةُ 1: أُحدِّدُ المعطياتِ والمطلوبَ.

المعطياتُ: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$.

الخطوةُ 2: أُخطِّطُ للبرهانِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أُسمِّي الزوايا كما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ المُجاورِ.
- أستعملُ مُسلَّمةَ التشابهِ AA لإثباتِ أنَّ $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.
- أستعملُ تشابهَ المُثلَّثاتِ وتناسبَ الأضلاعِ في المُثلَّثاتِ المُتشابِهةِ لإثباتِ التناسبِ المطلوبِ.



نظريةٌ

الخطوةُ 3: أُبرهِنُ.

- بما أنَّ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإنَّ $\angle 1 \cong \angle 4$، و $\angle 3 \cong \angle 2$، وَفقًا لمُسلَّمةِ الزاويتينِ المُتناظِرتينِ. وبذلكَ، فإنَّ $\Delta ACE \sim \Delta BCD$ بحسبِ مُسلَّمةِ التشابهِ (AA).
- بناءً على تعريفِ المُضلَّعاتِ المُتشابِهةِ، فإنَّ $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$.
- بما أنَّ $CA = BA + CB$، و$CE = DE + CD$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ التناسبِ المطلوبِ على النحوِ الآتي:

تعريفُ المُضلَّعاتِ المُتشابِهةِ	$\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$
بالتعويضِ	$\frac{BA+CB}{CB} = \frac{DE+CD}{CD}$
بتوزيعِ المقامِ على البسطِ	$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$
$\frac{CB}{CB} = 1, \frac{CD}{CD} = 1$	$\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$
بطرحِ 1 منْ طرفيِ المعادلةِ	$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$

أتذكَّرُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمينِ مُتوازيينِ في المستوى نفسِهِ، فإنَّ هذا يقودُ إلى مجموعةٍ منَ النظرياتِ عنِ العلاقةِ بينَ أزواجِ الزوايا الناتجةِ منْ هذا التقاطعِ، مثلِ النظريةِ التي تنصُّ على أنَّ الزوايا المُتناظِرةَ مُتطابِقةٌ.

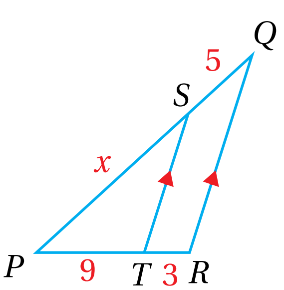
أتذكَّرُ

إذا تشابهَ مُضلَّعانِ، فإنَّ زواياهُما المُتناظِرةَ مُتطابِقةٌ، وأطوالَ أضلاعِهِما المُتناظِرةِ مُتناسِبةٌ.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ لإيجادِ أطوالِ قطعٍ مستقيمةٍ مجهولةٍ.

مثال 1

في ΔPQR، إذا كانَ $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$، $SQ = 5, PT = 9, TR = 3$، فأجدُ PS.



نظريةُ الأجزاءِ المُتناسِبةِ	$\frac{SQ}{PS} = \frac{TR}{PT}$
بالتعويضِ	$\frac{5}{x} = \frac{3}{9}$
بالتبسيطِ	$\frac{5}{x} = \frac{1}{3}$
باستعمالِ خاصيةِ الضربِ التبادليِّ	$x = 15$

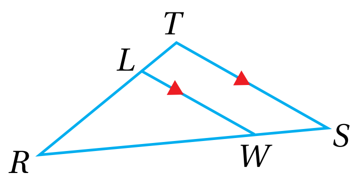
أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ كتابةُ التناسبِ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحقَّقُ منْ فهمي

في ΔRTS، إذا كانَ $RL = 5, RT = 9, WS = 6$

$\overline{TS} \parallel \overline{LW}$، فأجدُ RW.



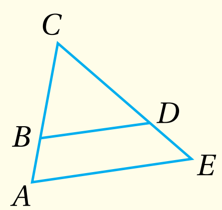
عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ

إنَّ عكسَ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ صحيحٌ أيضًا، وهذا ما تنصُّ عليْهِ النظريةُ الآتيةُ.

نظريةٌ

عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ

بالكلماتِ: إذا قطعَ مســتقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ.



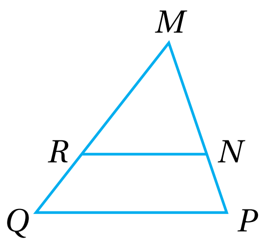
بالرموزِ: إذا كانَ $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$، فإنَّ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 17.

مثال 2

فــي ΔQMP، إذا كانَ $MN = 12, NP = 3, MR = 16$

$RQ = 4$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$، مُبرِّرًا إجابتي.



$\frac{RQ}{MR} = \frac{4}{16}$ بتعويضِ $MR = 16, RQ = 4$

$= \frac{1}{4}$ بالتبسيطِ

$\frac{NP}{MN} = \frac{3}{12}$ بتعويضِ $MN = 12, NP = 3$

$= \frac{1}{4}$ بالتبسيطِ

ومنْ ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{RQ}{MR} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{4}$$

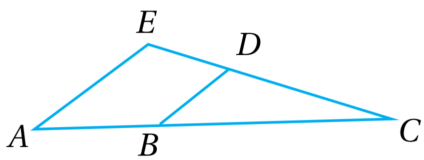
إذنْ، وبحسبِ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ، فإنَّ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

في ΔAEC، إذا كانَ

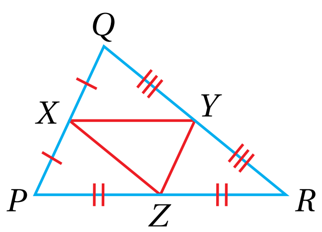
$ED = 12, DC = 20, BC = 25, AB = 15$،

فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{AE} \parallel \overline{DB}$، مُبرِّرًا إجابتي.



القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ

القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ (midsegment) هيَ قطعةٌ مستقيمةٌ طرفاها نقطتا منتصفِ ضلعينِ في المُثلَّثِ، وفي كلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُنصِّفةٍ. فمثلًا، القطعُ المُنصِّفةُ في ΔPQR المُجاورِ هيَ: $\overline{XY}, \overline{YZ}, \overline{XZ}$.



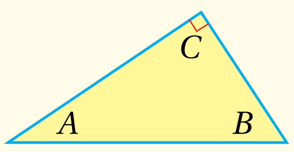
سأستكشفُ في النشاطِ الآتي العلاقةَ بينَ أضلاعِ المُثلَّثِ وقطعةٍ مُنصِّفةٍ فيهِ.

نشاطٌ هندسيٌّ

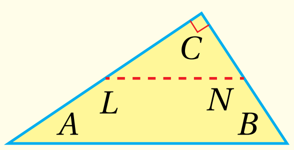
القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ

الإجراءاتُ:

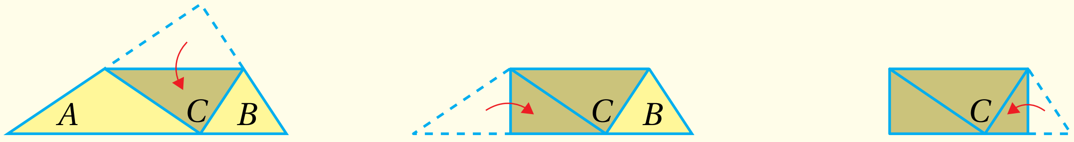
الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ، ثمَّ أقصُّهُ، وأُسمّي رؤوسَهُ: A, B, C كما في الشكلِ المُجاورِ.



الخطوةُ 2: في المُثلَّثِ ABC، أطوي A على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{AC}$، وأُسمّيها L، ثمَّ أطوي B على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{BC}$، وأُسمّيها N، ثمَّ أرسمُ $\overline{LN}$.



الخطوةُ 3: أطوي المُثلَّثَ حولَ $\overline{LN}$، ثمَّ أطوي كُلًّا منْ A و B على C كما في الشكلِ الآتي.



الخطوةُ 4: أرسمُ مُثلَّثًا حادَّ الزوايا، ومُثلَّثًا مُنفرِجَ الزاويةِ، وأُكرِّرُ ما فعلْتُهُ في الخطواتِ السابقةِ.

أُحلِّلُ النتائجَ:

1. ما علاقةُ طولِ $\overline{LN}$ بطولِ $\overline{AB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
2. أُعطي تخمينًا يختصُّ بعلاقةِ القطعةِ المُنصِّفةِ لضلعينِ في مُثلَّثٍ بالضلعِ الثالثِ فيهِ، مُبرِّرًا إجابتي.
3. أُقارِنُ إجابتي بإجاباتِ زملائي.

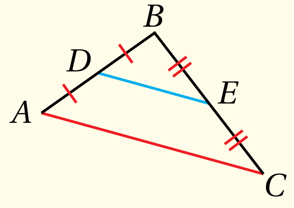
توجـدُ علاقتانِ بينَ القطعةِ المُنصِّفـةِ في المُثلَّثِ والضلعِ المُقابِلِ لهـا، وهما مُوضَّحتانِ في النظريةِ الآتيةِ.

نظريةٌ — **القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ توازي الضلعَ المُقابِلَ لها، وطولُها يساوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ.

بالرموزِ: إذا كانَتِ النقطةُ D والنقطةُ E هما نقطتَيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ على الترتيبِ، فإنَّ:

$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ و $DE = \frac{1}{2}AC$



أتعلَّمُ

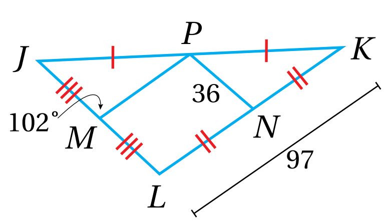
تُعَدُّ نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ حالةً خاصةً مِنْ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 18.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ لإيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ.

مثال 3

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



1 طولُ $\overline{JL}$.

$PN = \frac{1}{2}JL$ نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ

$36 = \frac{1}{2}JL$ بتعويضِ $PN = 36$

$JL = 72$ بالتبسيطِ

2 طولُ $\overline{PM}$.

$PM = \frac{1}{2}LK$ نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ

$= \frac{1}{2}(97)$ بتعويضِ $LK = 97$

$= 48.5$ بالتبسيطِ

3 قياسُ $\angle MPN$.

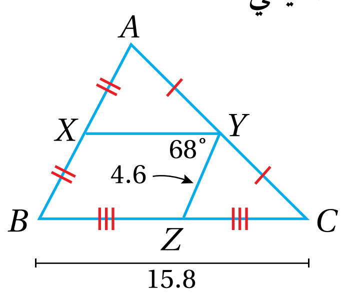
$\angle MPN \cong \angle JMP$	نظريةُ الزاويتينِ المُتبادِلتينِ داخليًّا
$m\angle MPN = m\angle JMP$	تعريفُ تطابقِ الزوايا
$= 102°$	بالتعويضِ

أتذكَّرُ

بما أنَّ $\overline{PN} \parallel \overline{JL}$، فإنَّ $\angle MPN \cong \angle JMP$؛ لأنَّهُما زاويتانِ مُتبادِلتانِ داخليًّا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



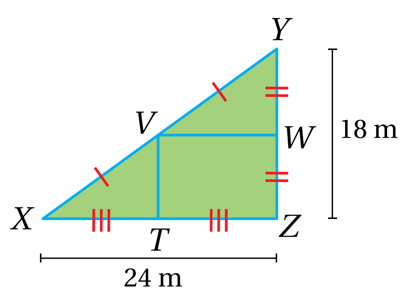
a) طولُ $\overline{XY}$.

b) طولُ $\overline{AX}$.

c) قياسُ $\angle YZC$.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ



حديقةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مُخطَّطًا لحديقةٍ عامةٍ على شكلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، وفي داخلِها ممرّا مشاةٍ بحاجةٍ إلى إعادةِ تبليطٍ، هما: $\overline{VW}$، و $\overline{TV}$. أجدُ تكلفةَ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ، علمًا بأنَّ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ للممرِّ هيَ **JD 12**.

الخطوةُ 1: أجدُ طولَ كلٍّ منَ الممرَّينِ.

- أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{VW}$:

$VW = \frac{1}{2} XZ$	نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ
$= \frac{1}{2}(24)$	بتعويضِ $XZ = 24$
$= 12$	بالتبسيطِ

• أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{TV}$:

نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ $TV = \frac{1}{2} YZ$

بتعويضِ $YZ = 18$ $= \frac{1}{2}(18)$

بالتبسيطِ $= 9$

إذنْ، مجموعُ طولِ الممرَّينِ معًا هوَ: $9\text{ m} + 12\text{ m} = 21\text{ m}$

الخطوةُ 2: أجدُ التكلفةَ.

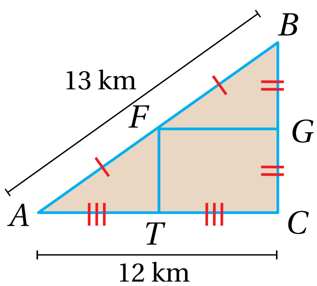
لإيجادِ تكلفةِ إعادةِ تبليطِ الممرَّينِ، أضربُ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ في مجموعِ طولَيِ الممرَّينِ على النحوِ الآتي:

$$12 \times 21 = 252$$

إذنْ، تكلفةُ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ هيَ: JD 252

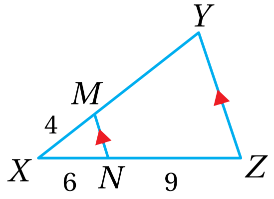
أتحقَّقُ من فهمي

مرورٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُخطَّطًا لمنطقةٍ منْ مدينةِ عمّانَ على شكلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ. تقودُ غديرُ سيّارتَها في هذهِ المنطقةِ أثناءَ توجُّهِها إلى عملِها، وتسيرُ على الطريقِ $\overline{GF}$ والطريقِ $\overline{FT}$. أجدُ المسافةَ التي تقطعُها غديرُ بسيّارتِها يوميًّا.

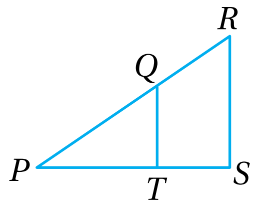


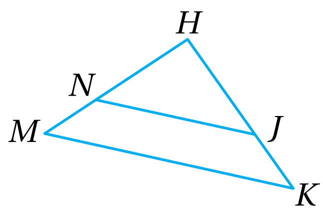
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

1 في ΔXYZ، إذا كانَ $\overline{NM} \parallel \overline{YZ}$ ، $XM = 4, XN = 6, NZ = 9$، فأجدُ XY.

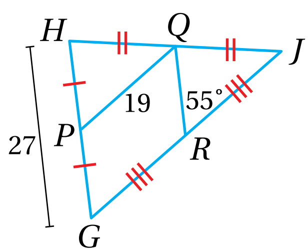


2 في ΔPRS، إذا كانَ $PR = 30, QR = 9, PT = 12, PS = 18$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{QT} \parallel \overline{RS}$، مُبرِّرًا إجابتي.





3 فـــي ΔHKM، إذا كانَ $HM = 15, HN = 10, HJ = 2JK$، فأُحـــدِّدُ إذا كانَ $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$، مُبرِّرًا إجابتي.



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

4 GJ

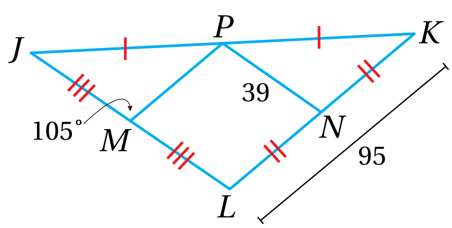
5 RQ

6 RJ

7 $m\angle PQR$

8 $m\angle HGJ$

9 $m\angle GPQ$



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

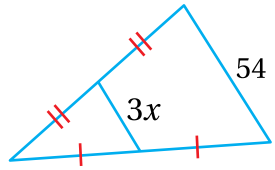
10 JL

11 PM

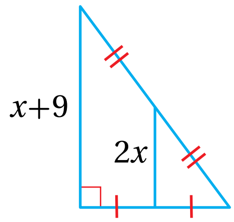
12 $m\angle MPN$

أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

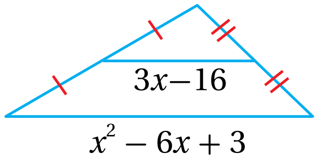
13



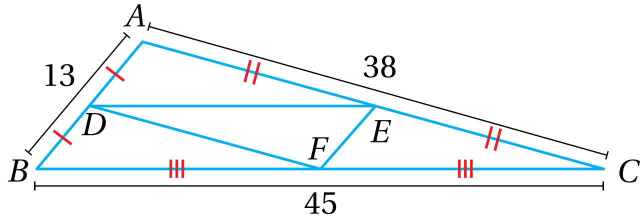
14



15



16 أجدُ محيطَ ΔDEF المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي.

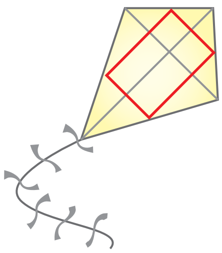


أُثبِتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودينِ:

17 إذا قطعَ مستقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ.

18 القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ توازي أحدَ أضلاعِهِ، وطولُها يساوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ.

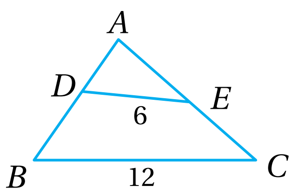
19 **طائرةٌ ورقيةٌ:** صنعَتْ هديلُ طائرةً ورقيةً، طولُ قُطْرَيْها 80 cm و 60 cm، ثمَّ استعملَتْ شريطًا لربطِ نقاطِ منتصفِ أضلاعِ الطائرةِ. أجدُ طولَ الشريطِ.



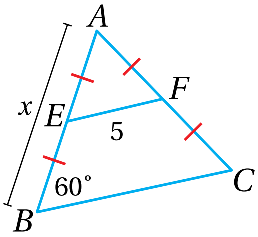
20 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

21 **أكتشفُ الخطأَ:** قالَ خالدٌ: "بما أنَّ $DE = \frac{1}{2}BC$ في الشكلِ المُجاورِ، فإنَّ $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ بحسبِ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ". هلْ ما قالَهُ خالدٌ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

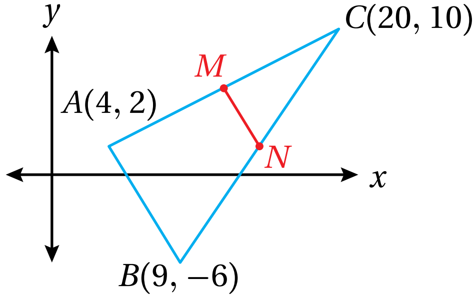


22 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ x في الشكلِ المُجاورِ، مُبرِّرًا إجابتي.



23 **تحدٍّ:** إذا كانَتْ مساحةُ ΔABC هيَ $48\ cm^2$، وكانَتِ النقطةُ D والنقطةُ E هما نقطتَيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على الترتيبِ، فأجدُ مساحةَ ΔADE، مُبرِّرًا إجابتي.

24 **تبريرٌ:** في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانَتِ $\overline{MN}$ قطعةً مُنصِّفةً في ΔABC، فأجدُ ميلَ $\overline{MN}$ بطريقتينِ مختلفتينِ، مُبرِّرًا إجابتي.



معمل برمجية جيوجبرا

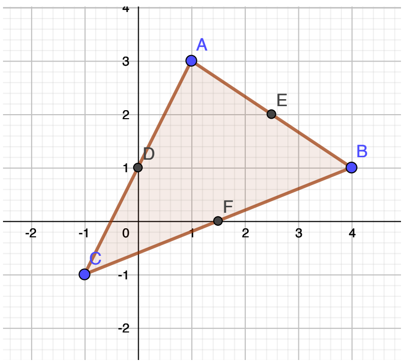
توسُّعٌ: مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ

Extension: Midsegment Triangle

مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ هوَ مُثلَّثٌ ناتجٌ منَ القطعِ المُنصِّفةِ الثلاثِ في المُثلَّثِ.

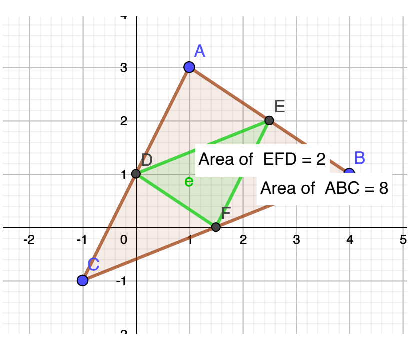
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ علاقةِ مساحةِ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ بمساحةِ المُثلَّثِ الأصليِّ.

نشاط



1 أرسمُ المُثلَّثَ مختلفَ الأضلاعِ ABC في المستوى الإحداثيِّ، وذلكَ بتحديدِ ثلاثِ نقاطٍ في المستوى باستعمالِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ اختيارِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ بالمُؤشِّرِ على مواقعِ النقاطِ التي تُمثِّلُ رؤوسَ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ نقرِ الرأسِ الأوَّلِ لإغلاقِ الشكلِ.

2 أُحدِّدُ نقطةَ منتصفِ كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.



3 أرسمُ مُثلَّثَ القطعِ المُنصِّفةِ، مُتَّبِعًا الإجراءاتِ نفسَها الواردةَ في الخطوةِ 1.

4 أجدُ مساحةَ ΔABC، ومساحةَ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ باختيارِ أيقونةِ Area منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ داخلَ كلِّ مُثلَّثٍ.

5 **أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجملةِ الآتيةِ:**

تُعادِلُ مساحةُ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ .... مساحةِ ΔABC.

6 أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ، وأُطبِّقُها على مُثلَّثٍ حادِّ الزوايا، ومُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، ثمَّ أُدوِّنُ النتيجةَ التي أتوصَّلُ إليْها.

7 أُثبِتُ النتيجةَ باستعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ.

الدرس 2

مُنصِّفاتٌ في المُثلَّثِ
Bisectors in Triangle

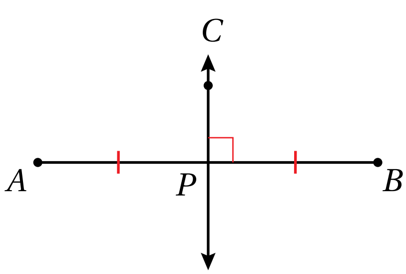
فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ نظريةِ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- تعرُّفُ نظريةِ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

المصطلحاتُ المُنصِّفُ العموديُّ، مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ، مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.

مسألةُ اليومِ يظهرُ في الصورةِ المُجاورةِ جزءٌ منْ جسرِ كمالِ الشاعرِ في العاصمةِ عمّانَ. إذا كانَتْ حافةُ الجسرِ عموديةً على الدعامةِ $\overline{BD}$، وكانَ $AD = CD$، فما العلاقةُ بينَ $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$؟

المُنصِّفُ العموديُّ

المُنصِّفُ العموديُّ (perpendicular bisector) لقطعةٍ مستقيمةٍ هوَ مستقيمٌ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ عندَ نقطةِ منتصفِها.

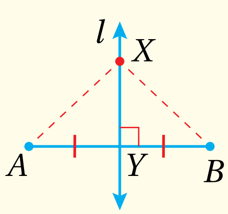


$\overleftrightarrow{CP}$ المُنصِّفُ العموديُّ لـ $\overline{AB}$.

للمُنصِّفِ العموديِّ بعضُ الخصائصِ التي تُمثِّلُها النظريتانِ الآتيتانِ.

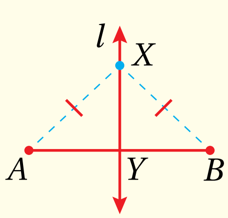
نظريتانِ — المُنصِّفُ العموديُّ

- **نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيِ القطعةِ المستقيمةِ.



مثالٌ: إذا كانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ $AX = BX$، لأيِّ نقطةٍ X على l.

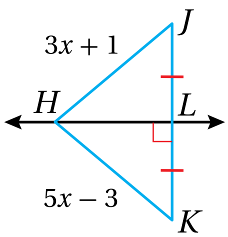
- **عكسُ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيْ قطعةٍ مستقيمةٍ تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لتلكَ القطعةِ.



مثالٌ: إذا كانَ $AX = BX$، وكانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ X تقعُ على l.

أتذكَّرُ
يشيرُ الرمزُ AB إلى طولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$.

مثال 1



أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 طولُ $\overline{HJ}$.

الخطوةُ 1: أجدُ قيمةَ x.

$HJ = HK$ نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ

$3x + 1 = 5x - 3$ بالتعويضِ

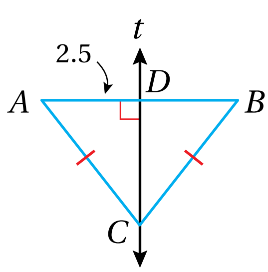
$x = 2$ بحَلِّ المعادلةِ لـ x

الخطوةُ 2: أجدُ طولَ $\overline{HJ}$.

$HJ = 3(2) + 1$ بتعويضِ $x = 2$

$= 7$ بالتبسيطِ

2 طولُ $\overline{AB}$.



بما أنَّ $AC = BC$، و t عموديٌّ على $\overline{AB}$، فإنَّ t مُنصِّفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$ بحسبِ عكسِ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:

$AB = 2AD$ تعريفُ المُنصِّفِ العموديِّ

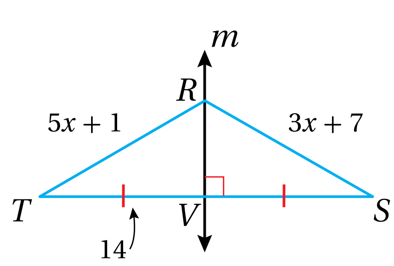
$= 2(2.5)$ بالتعويضِ

$= 5$ بالتبسيطِ

أتعلَّم

أنْ يكونَ $AC = BC$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ على أنَّ t هوَ مُنصِّفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$.

أتحقَّقُ من فهمي



أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) طولُ $\overline{TS}$.

b) طولُ $\overline{RS}$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ إذا عُلِمَ ميلُهُ ونقطةٌ يمرُّ بها. ومنْ ثَمَّ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ كما في المثالِ الآتي.

مثال 2

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, 4)$، و $Q(1, 2)$.

الخطوةُ 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ

$M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$

$M(0, 3)$ بالتبسيطِ

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ M الواقعةِ في منتصفِ $\overline{PQ}$، هما: $(0, 3)$.

الخطوةُ 2: أجدُ ميلَ المُنصِّفِ العموديِّ.

ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ القطعةِ المستقيمةِ نفسِها؛ لذا أجدُ أوَّلًا ميلَ القطعةِ المستقيمةِ:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{2-4}{1-(-1)}$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$

$= \frac{-2}{2} = -1$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ هوَ سالبُ مقلوبِ ميلِ $\overline{PQ}$، ويساوي 1.

الخطوةُ 3: أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغةُ الميلِ ونقطةٍ

$y - 3 = 1(x - 0)$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 3), m = 1$

$y = x + 3$ بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ

إذنْ، معادلةُ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ هيَ: $y = x + 3$.

أتذكَّرُ

إذا تعامدَ مستقيمانِ كلٌّ منْهُما ليسَ رأسيًّا، فإنَّ حاصلَ ضربِ ميليهِما هوَ -1؛ أيْ إنَّ ميلَ أحدِهِما يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ الآخرِ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ إذا عُلِمَ ميلُ المستقيمِ وإحداثياتُ نقطةٍ يمرُّ بها.

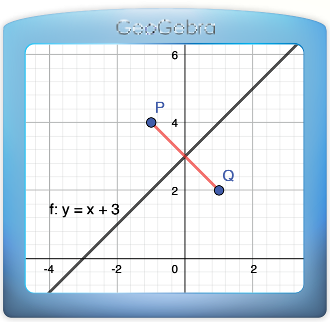
الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

1) أُحدِّدُ نقطتيْ نهايتي القطعةِ المستقيمةِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ A مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على موقعي النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.

2) أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ النقطتينِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Segment مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على النقطتينِ.

3) أختارُ أيقونةَ Perpendicular Bisector لإظهارِ المُنصِّفِ العموديِّ في المستوى الإحداثيِّ، وإظهارِ معادلتِهِ في شريطِ المعادلةِ.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, -5)$، و $Q(3, -1)$.

المُنصِّفاتُ العموديةُ للمُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الخارجيةِ

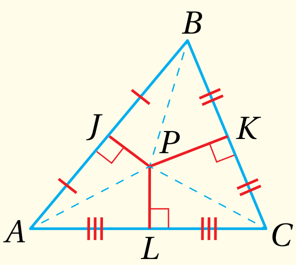
إذا تلاقَتْ ثلاثةُ مستقيماتٍ أوْ أكثرُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ، فإنَّ هذهِ المستقيماتِ تُسمّى **مستقيماتٍ مُتلاقِيةً**، وتُسمّى النقطةُ التي تلتقي فيها المستقيماتُ **نقطةَ التلاقي**.

بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثةَ أضلاعٍ، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصِّفاتٍ عموديةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

المُنصِّفاتُ العموديةُ للمُثلَّثِ

نظريةٌ

تلتقي المُنصِّفاتُ العموديــةُ لأضلاعِ مُثلَّثٍ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِ المُثلَّثِ.



مثالٌ: إذا كانَــتْ $\overline{PJ}, \overline{PL}, \overline{PK}$ هــيَ المُنصِّفــاتِ العموديةَ لـِ ΔABC، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PA = PB = PC$.

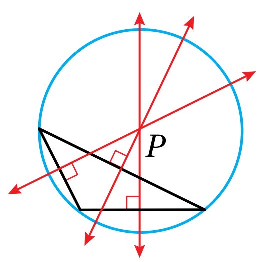
إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 14.

أتعلَّمُ

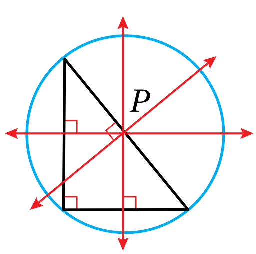
يوجدُ فرقٌ بيــنَ المُنصِّفِ العموديِّ للمُثلَّثِ والقطعةِ المُنصِّفــةِ فــي المُثلَّثِ. فالقطعــةُ المُنصِّفةُ تُنصِّفُ الضلعينِ اللذينِ يتقاطعانِ معها، ولا يكــونُ التقاطعُ عموديًّا بالضرورةِ.
أمّــا المُنصِّــفُ العموديُّ فهوَ مُنصِّــفٌ لضلعٍ واحدٍ في المُثلَّثِ، وهوَ عموديٌّ بالضــرورةِ علــى ذلــكَ الضلعِ.

نقطةُ تلاقــي المُنصِّفاتِ العموديــةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما هــيَ **مركزُ الدائرةِ الخارجيــةِ للمُثلَّثِ** (circumcenter of the triangle)؛ وهــيَ دائرةٌ تمرُّ برؤوسِ المُثلَّثِ جميعِها؛ إذْ إنَّ نقطةَ تلاقي المُنصِّفاتِ العموديةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ؛ لذا فهيَ مركزٌ للدائرةِ الخارجيةِ.

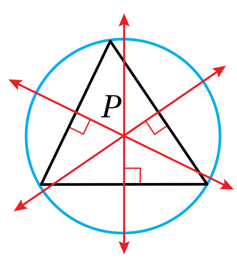
يعتمدُ موقعُ مركزِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:



مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.



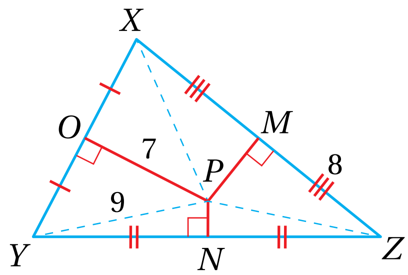
مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P على وترِ المُثلَّثِ.



مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

مثال 3

إذا كانَــتِ النقطةُ P هــيَ مركزَ الدائــرةِ الخارجيةِ لـِ ΔXYZ في الشكلِ المُجاوِرِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



1 طولُ $\overline{PX}$.

$PX = PY$ نظريةُ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ

$= 9$ بتعويضِ $PY = 9$

2 طولُ $\overline{PM}$.

نظريةُ فيثاغورس	$(PX)^2 = (MX)^2 + (PM)^2$
بتعويضِ $PX = 9,\ MX = 8$	$(9)^2 = (8)^2 + (PM)^2$
بإيجادِ القوى	$81 = 64 + (PM)^2$
بطرحِ 64 منْ طرفي المعادلةِ	$(PM)^2 = 17$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ	$PM = \pm\sqrt{17}$

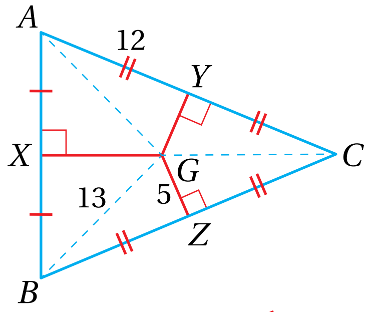
بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $PM = \sqrt{17}$.

أتذكَّرُ

بالرجوعِ إلى تعريفِ المُنصِّفِ العموديِّ، فإنَّ: $MX = ZM = 8$

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـ $\triangle ABC$ في الشكلِ المُجاورِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



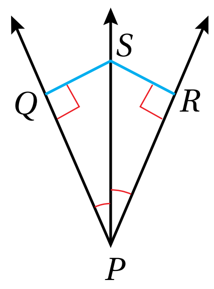
a) طولُ $\overline{AG}$.

b) طولُ $\overline{GY}$.

c) طولُ $\overline{CZ}$.

مُنصِّفُ الزاويةِ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مُنصِّفَ الزاويةِ شعاعٌ يُقسِّمُ الزاويةَ إلى زاويتينِ مُتطابِقتينِ، وتعلَّمْتُ أيضًا أنَّ البُعْدَ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليْهِ هوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديةِ على المستقيمِ منْ تلكَ النقطةِ. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $\overrightarrow{PS}$ في الشكلِ المُجاورِ مُنصِّفٌ لـ $\angle QPR$، وإنَّ البُعْدَ بينَ النقطةِ S و $\overrightarrow{PQ}$ هوَ SQ.



رموزٌ رياضيةٌ

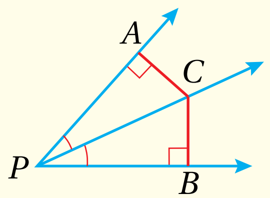
يُستعمَلُ الرمزُ $\overrightarrow{PS}$ للدلالةِ على الشعاعِ الذي يبدأُ بالنقطةِ P، ويمرُّ بالنقطةِ S.

نظريتانِ

مُنصِّفُ الزاويةِ

- **نظريةُ مُنصِّفِ الزاويةِ:**

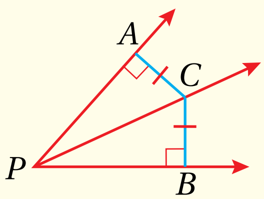
كلُّ نقطةٍ على مُنصِّفِ الزاويةِ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها.



مثالٌ: إذا كانَ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفًا لـ $\angle APB$، وكانَ $\overline{CA} \perp \overrightarrow{PA},\ \overline{CB} \perp \overrightarrow{PB}$، فإنَّ $CA = CB$.

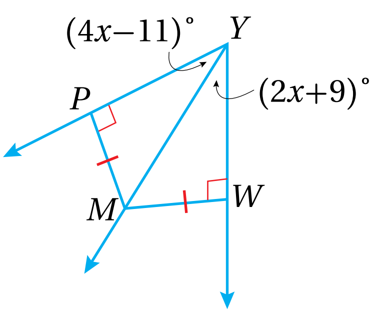
- **عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ:**

إذا وقعَتْ نقطةٌ داخلَ زاويةٍ، وكانَتْ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها، فإنَّها تقعُ على مُنصِّفِ الزاويةِ.



مثالٌ: إذا كانَ $\overline{CA} \perp \overrightarrow{PA}, \overline{CB} \perp \overrightarrow{PB}$ ،$CA = CB$، فإنَّ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفٌ لـ $\angle APB$.

مثال 4



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ $m\angle PYM$.

الخطوةُ 1: أجدُ قيمةَ x.

$\angle PYM \cong \angle WYM$	عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ
$m\angle PYM = m\angle WYM$	تعريفُ تطابقِ الزوايا
$4x - 11 = 2x + 9$	بالتعويضِ
$x = 10$	بحَلِّ المعادلةِ لـ x

الخطوةُ 2: أجدُ $m\angle PYM$.

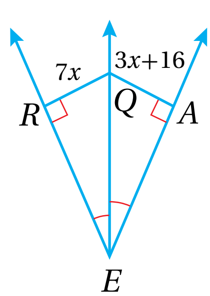
$m\angle PYM = (4x - 11)°$	معطى
$= (4(10) - 11)°$	بتعويضِ $x = 10$
$= 29°$	بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أنْ يكـونَ $MP = MW$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ علـى أنَّ $\overrightarrow{YM}$ هوَ مُنصِّفٌ لـ $\angle PYW$، وإنَّما يُشترَطُ أنْ يكونَ $\overline{MW} \perp \overline{YW}$، و $\overline{MP} \perp \overline{YP}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ QA.

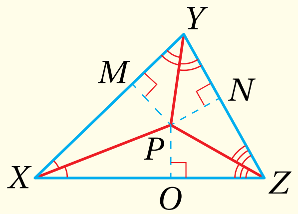


مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ

بمـا أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثَ زوايا، فإنَّ لهُ ثلاثـةَ مُنصِّفاتٍ للزوايا تلتقي في نقطـةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

نظريةٌ

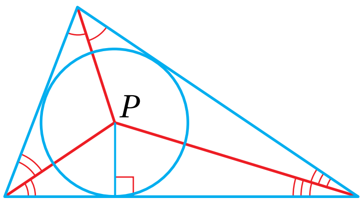
تلتقي مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.



مثالٌ: إذا كانَتْ $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ هيَ مُنصِّفاتِ زوايا ΔXYZ، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PM = PN = PO$.

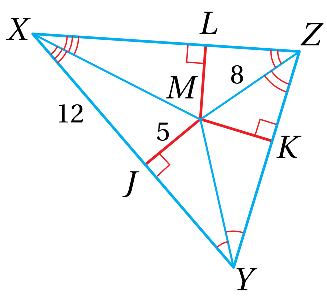
إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 15.

نقطةُ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ هيَ **مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ** (incenter of the triangle)؛ وهيَ دائرةٌ تمسُّ أضلاعَ المُثلَّثِ جميعَها؛ ذلكَ أنَّ نقطةَ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ أضلاعِهِ؛ ما يعني أنَّها مركزُ الدائرةِ الداخليةِ.



مثال 5

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ LZ.



نظريةُ فيثاغورس	$(MZ)^2 = (LM)^2 + (LZ)^2$
بتعويضِ $MZ = 8, LM = MJ = 5$	$(8)^2 = (5)^2 + (LZ)^2$
بإيجادِ القوى	$64 = 25 + (LZ)^2$
بطرحِ 25 منْ طرفيِ المعادلةِ	$(LZ)^2 = 39$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفيِ المعادلةِ	$LZ = \pm\sqrt{39}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $LZ = \sqrt{39}$.

أتذكَّرُ

$LM = MJ$ بحسبِ نظريةِ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ.

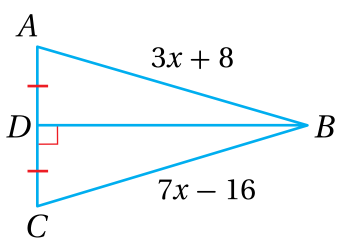
أتحقَّقُ منْ فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الواردِ في المثالِ 5 لإيجادِ XL.

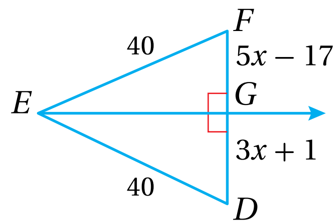
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

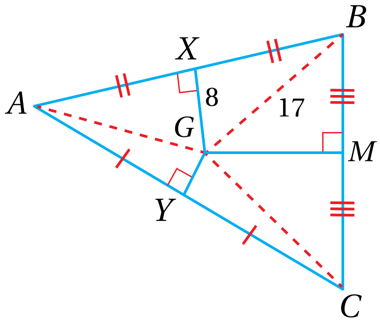
1 AB



2 FG



أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



3 GA

4 AX

5 AB

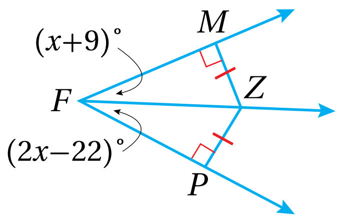
أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ المعطى نهايتاها في كلٍّ ممّا يأتي:

6 $P(-2, 0), Q(6, 12)$

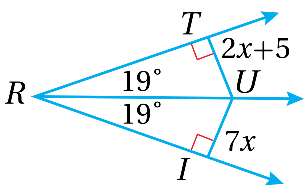
7 $P(-7, 5), Q(1, -1)$

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

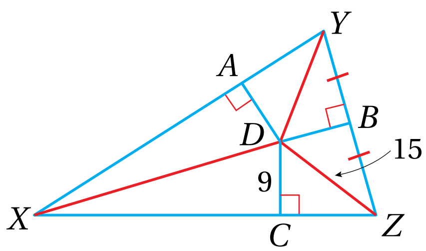
8 $m\angle MFZ$



9 TU



إذا كانَــتِ النقطةُ D هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔXYZ، فأجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

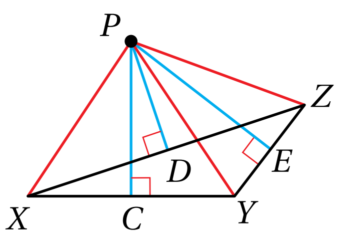


10 DB

11 CZ

12 YZ

13 إذا كانَــتِ النقطةُ P هيَ مركــزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔXYZ، فأســتعملُ المعلومةَ المعطاةَ تاليًا لإيجادِ PY.



$$PX = 4x + 3$$

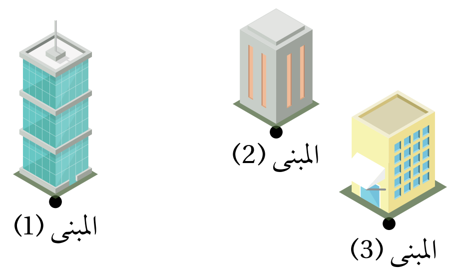
$$PZ = 6x - 11$$

أُثبِتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ:

14 نظريةُ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ.

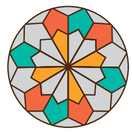
15 نظريةُ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ.

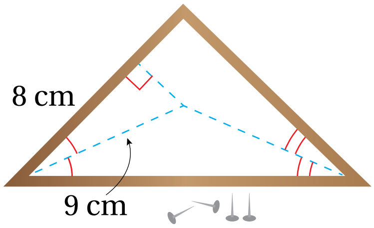
16 **اتصالاتٌ:** ترغبُ شــركةُ اتصالاتٍ في بناءِ بُرْجٍ للبثِّ على أبعادٍ متســاويةٍ منْ ثلاثةِ مبانٍ كبيرةٍ. أُوضِّحُ كيفَ يُمكِنُ استعمالُ الشكلِ الآتي لتحديدِ موقعِ البُرْجِ.



17 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

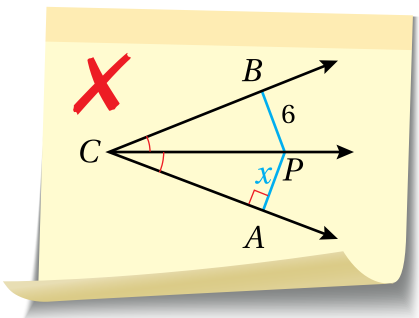
18 يريدُ فنّانٌ أنْ يضعَ قطعةً دائريــةً منَ الزجاجِ المُلوَّنِ داخلَ إطارٍ على شــكلِ مُثلَّثٍ أبعادُهُ مُبيَّنةٌ في الشكلِ المُجاوِرِ، وأنْ يجعلَ الزجاجَ يُلامِسُ كُلًّا مــنْ جوانبِ الإطارِ. أجدُ طولَ قُطْرِ قطعةِ الزجاجِ الدائريةِ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



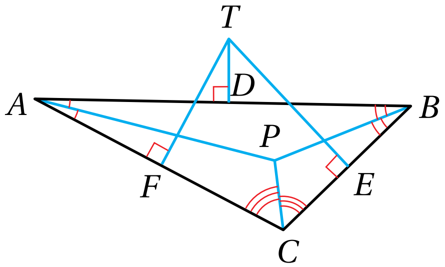


مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **أكتشــفُ الخطأَ:** قالَتْ أحلامُ: "قيمةُ x في الشــكلِ الآتي هيَ 6 بحسبِ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ". أكتشفُ الخطأَ في قولِ أحلامَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



تبريرٌ: إذا كانَتِ النقاطُ: D، وE، وF هيَ مُنصِّفاتِ أضلاعِ ΔABC في الشكلِ المُجاوِرِ، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

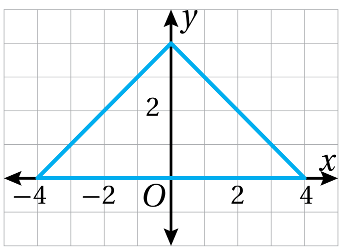


20 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ الدائرةِ المارَّةِ بالنقاطِ: A، وB، وC؟

21 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ دائرةٍ تمسُّ كلَّ ضلعٍ منْ أضلاعِ ΔABC؟

22 إذا كانَ $TA = 8.2$، فما طولُ $\overline{TC}$؟

23 **تحدٍّ:** أجدُ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ في المســتوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.



نشاط مفاهيميٌّ

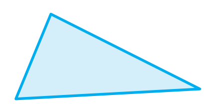
القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ

Medians of Triangle

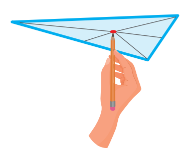
الهدفُ: استكشافُ العلاقةِ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ ونقطةِ توازنِ المُثلَّثِ، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطةِ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لها.

نشاط 1

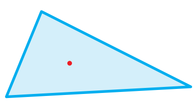
الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلَّثًا على قطعةٍ منَ الورقِ المُقوّى، ثمَّ أقصُّهُ.



الخطوةُ 2: أضعُ المُثلَّثَ على قلمِ الرصاصِ، ثمَّ أُعدِّلُ موقعَهُ حتّى يتوازنَ.

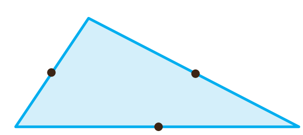


الخطوةُ 3: أُحدِّدُ نقطةَ توازنِ المُثلَّثِ، ثمَّ أضعُ علامةً عندَها.

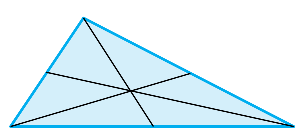


نشاط 2

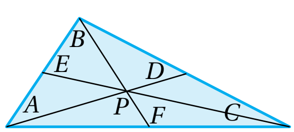
الخطوةُ 1: أستعملُ المسطرةَ لتحديدِ نقطةِ المنتصفِ لكلٍّ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ الذي رسمْتُهُ في النشاطِ 1.



الخطوةُ 2: أرسمُ قطعةً مستقيمةً تصلُ بينَ كلِّ منتصفِ ضلعٍ ورأسِ المُثلَّثِ المُقابِلِ لهُ.



الخطوةُ 3: أُسمّي المُثلَّثَ كما في الشكلِ الآتي.



أُحلِّلُ النتائجَ:

1 ما العلاقةُ بينَ النقطةِ P في النشاطِ 2 ونقطةِ توازنِ المُثلَّثِ في النشاطِ 1؟

2 أستعملُ المسطرةَ لأملأَ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

$AD =$ ___	$BF =$ ___	$CE =$ ___
$AP =$ ___	$BP =$ ___	$CP =$ ___
$PD =$ ___	$PF =$ ___	$PE =$ ___

3 ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والنقطةِ P؟

4 ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لهُ؟

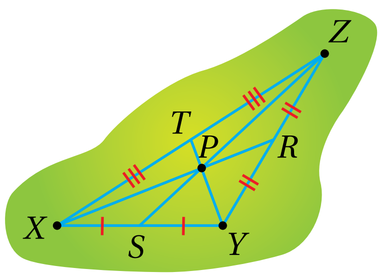
الدرس 3

القطعُ المُتوسِّطةُ والارتفاعاتُ في المُثلَّثِ
Medians and Altitudes in Triangle

فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ نظريةِ مركزِ المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادُ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ.

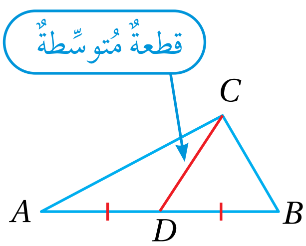
المصطلحاتُ القطعةُ المُتوسِّطةُ للمثلثِ، مركزُ المُثلَّثِ، ارتفاعُ المُثلَّثِ، ملتقى الارتفاعاتِ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ P في الشكلِ المُجاوِرِ موقعَ مستشفى حكوميٍّ في إحدى المحافظاتِ الأردنيةِ، وتُمثِّلُ النقاطُ الأُخرى في الشكلِ عددًا منَ المناطقِ السكنيةِ القريبةِ منْهُ. إذا كانَ بُعْدُ المنطقةِ S عنِ المنطقةِ Z هوَ 8 km، فما بُعْدُ المستشفى عنِ المنطقةِ Z؟



القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ

القطعةُ المُتوسِّطةُ للمُثلَّثِ (median of triangle) هيَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

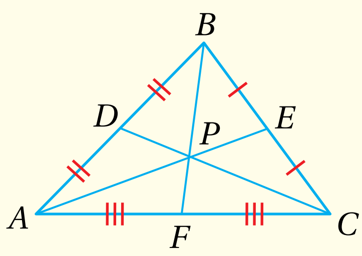


لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُتوسِّطةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى **مركزَ المُثلَّثِ** (centroid)، وكنْتُ قدْ توصَّلْتُ في النشاطِ المفاهيميِّ الذي يسبقُ هذا الدرسَ إلى أنَّها نقطةُ اتِّزانِ المُثلَّثِ.

أتعلَّمُ
يقعُ مركزُ المُثلَّثِ دائمًا داخلَ المُثلَّثِ.

نظريةٌ — مركزُ المُثلَّثِ

يبعدُ مركزُ المُثلَّثِ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ ثلثَيْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

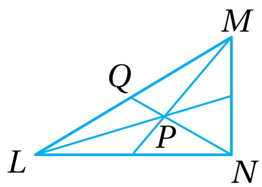


مثالٌ: إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ ΔABC، فإنَّ:

$$AP = \frac{2}{3}AE,\ BP = \frac{2}{3}BF,\ CP = \frac{2}{3}CD$$

أتعلَّمُ
نسبةُ بُعْدِ مركزِ المُثلَّثِ عنِ الرأسِ إلى بُعْدِهِ عنْ منتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ هيَ 2:1

مثال 1



إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ ΔLMN، وكانَ $NQ = 30$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 طولُ $\overline{NP}$.

نظريةُ مركزِ المُثلَّثِ	$NP = \frac{2}{3} NQ$
بتعويضِ $NQ = 30$	$= \frac{2}{3}(30)$
بالتبسيطِ	$= 20$

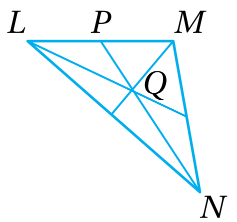
2 طولُ $\overline{PQ}$.

مسلّمةُ جمعِ القطعِ المستقيمةِ	$NP + PQ = NQ$
بتعويضِ $NQ = 30, NP = 20$	$20 + PQ = 30$
بطرحِ 20 منْ طرفيِ المعادلةِ	$PQ = 10$

أتعلَّمُ

$PQ = \frac{1}{3} NQ$

أتحقَّقُ منْ فهمي



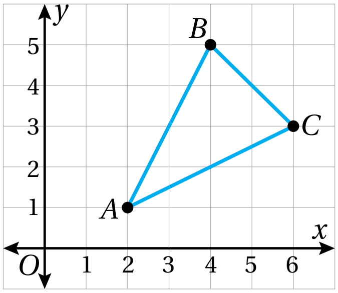
إذا كانَتِ النقطةُ Q هيَ مركزَ ΔLMN، وكانَ $NP = 20$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) طولُ $\overline{NQ}$.

b) طولُ $\overline{QP}$.

يُمكِنُ إيجادُ مركزِ أيِّ مُثلَّثٍ في المستوى الإحداثيِّ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ رؤوسِهِ.

مثال 2



يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.

أجدُ إحداثييْ مركزِ هذا المُثلَّثِ.

الخطوةُ 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ أحدِ أضلاعِ المُثلَّثِ.

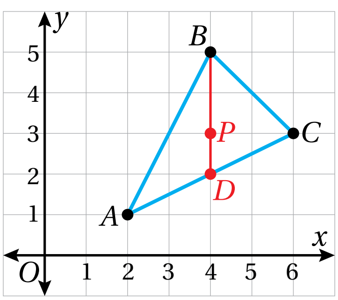
أستعملُ صيغةَ نقطةِ المنتصفِ لإيجادِ منتصفِ $\overline{AC}$، ولتكنْ D:

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (6, 3)$ $D\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$

بالتبسيطِ $D\,(4, 2)$

الخطوةُ 2: أجدُ مركزَ المُثلَّثِ.



- أُعيِّنُ النقطةَ D في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ $\overline{DB}$.
- أُلاحِظُ أنَّ $\overline{DB}$ رأسيةٌ، وأنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِها على النحوِ الآتي:

صيغةُ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ رأسيةٍ $DB = |y_2 - y_1|$

بالتعويضِ $y_1 = 2, y_2 = 5$ $= |5 - 2|$

بالتبسيطِ، وإيجادِ القيمةِ المُطلَقةِ $= 3$

إذنْ، طولُ $\overline{DB}$ هوَ 3 وحداتٍ.

- أفترضُ أنَّ النقطةَ P هيَ مركزُ ΔABC. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $BP = \frac{2}{3}DB$؛ لذا يقعُ المركزُ على بُعْدِ $\frac{2}{3}(3) = 2$ وحدةٍ أسفلَ الرأسِ B.

إذنْ، إحداثيّا مركزِ هذا المُثلَّثِ (إحداثيّا النقطةِ P) هما: $(4, 3)$.

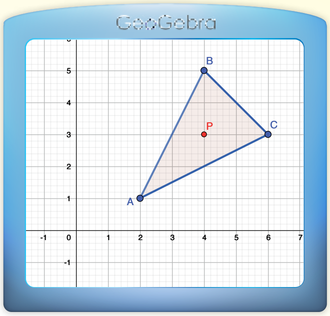
أتعلَّمُ

يُمكِنُ إيجادُ طولِ القطعةِ المُتوسِّطةِ $\overline{DB}$ بسهولةٍ؛ لأنَّها رأسيةٌ، ولأنَّ الضلعَ $\overline{AC}$ هوَ الذي اختيرَ في بادئِ الأمرِ؛ ما يعني أنَّ اختيارَ الضلعِ المناسبِ للمُثلَّثِ يُسهِّلُ أحيانًا إجراءاتِ الحَلِّ.

أتعلَّمُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ باستعمالِ قطعةٍ مُتوسِّطةٍ أُخرى لإيجادِ مركزِ المُثلَّثِ.

الدعمُ البيانيُّ:



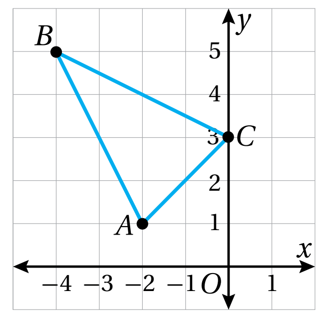
أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ مركزِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

2) أُحدِّدُ مركزَ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ في وسطِ المُثلَّثِ لإظهارِ إحداثييْ مركزِ المُثلَّثِ في شريطِ المعادلةِ.

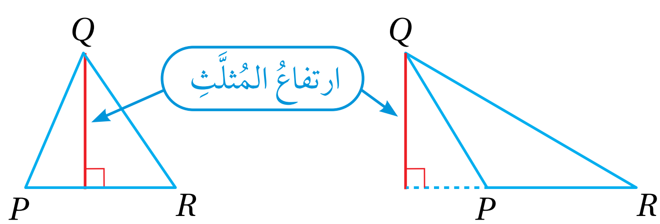
أتحقَّقُ منْ فهمي

يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ. أجدُ إحداثييْ مركزِ هذا المُثلَّثِ.

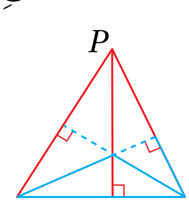


ارتفاعاتُ المُثلّثِ

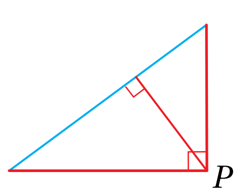
ارتفاعُ المُثلَّثِ (altitude of a triangle) هوَ القطعةُ المستقيمةُ العموديةُ النازلةُ منْ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ إلى الضلعِ المُقابِلِ لهُ، أوْ إلى المستقيمِ الذي يحوي الضلعَ المُقابِلَ لهُ.



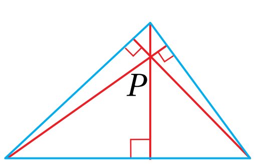
لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثةُ ارتفاعاتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ تُسمّى **ملتقى الارتفاعاتِ** (orthocenter)، ويعتمدُ موقعُها على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:



مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.



مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.

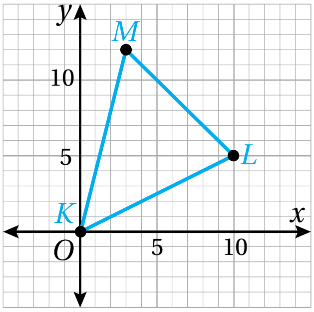


مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ في الأشكالِ المُجاوِرةِ أنَّ ساقَيِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ هما منَ ارتفاعاتِهِ، وأنَّ رأسَ الزاويةِ القائمةِ هوَ ملتقى ارتفاعاتِهِ.

مثال 3



إذا كانَتْ: $K(0, 0), M(3, 12), L(10, 5)$، فأجِدُ إحداثيَّيْ ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ ΔKLM بيانيًّا.

الخطوةُ 2: أجدُ ميلَيْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

ميلُ $\overline{KL}$ $\quad m_{\overline{KL}} = \frac{5-0}{10-0} = \frac{1}{2}$

ميلُ $\overline{LM}$ $\quad m_{\overline{LM}} = \frac{12-5}{3-10} = -1$

الخطوةُ 3: أجدُ معادلةَ الارتفاعِ العموديِّ على كلٍّ منَ الضلعينِ اللذينِ اخترْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ.

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (3, 12), m = -2$ $\quad y - 12 = -2(x - 3)$

بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ $\quad y = -2x + 18$

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 0), m = 1$ $\quad y - 0 = 1(x - 0)$

بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ $\quad y = x$

الخطوةُ 4: أحُلُّ نظامَ المعادلتينِ الناتجَ لإيجادِ إحداثيَّيْ ملتقى الارتفاعاتِ.

بما أنَّ المعادلةَ الثانيةَ مكتوبةٌ بالنسبةِ إلى y، فإنَّني أُعوِّضُ x بدلًا منْ y في المعادلةِ الأولى:

المعادلةُ الأولى $\quad y = -2x + 18$

بالتعويضِ عنْ y بـ x $\quad x = -2x + 18$

بجمعِ $2x$ لطرفي المعادلةِ $\quad 3x = 18$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 3 $\quad x = 6$

بما أنَّ $x = 6$، فإنَّ $y = 6$، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ x في أيٍّ منَ المعادلتينِ.

إذنْ، إحداثيّا ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM هما: $(6, 6)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يشيرُ الرمزُ $m_{\overline{KL}}$ إلى ميلِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{KL}$.

أتعلَّمُ

- الرأسُ M هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{KL}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{KL}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي -2.

أتعلَّمُ

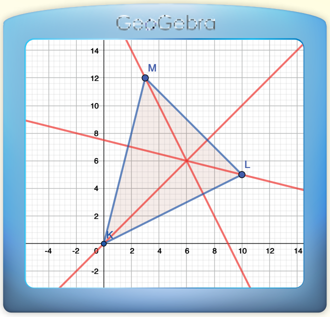
- الرأسُ K هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{ML}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{ML}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي 1.

أفكِّرُ

لماذا يُعَدُّ إيجادُ إحداثيَّيْ نقطةِ التقاءِ ارتفاعينِ منَ الارتفاعاتِ الثلاثةِ كافيًا لتحديدِ ملتقى الارتفاعاتِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ ملتقى ارتفاعاتِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:



1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

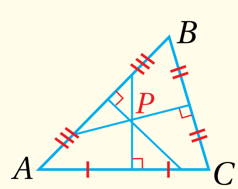
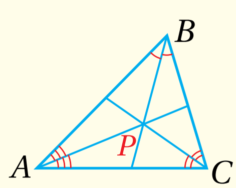
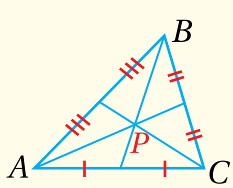
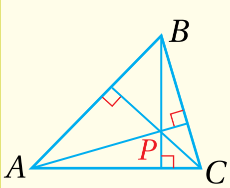
2) أرسمُ جميعَ الارتفاعاتِ في المُثلَّثِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Perpendicular Line منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على رأسِ كلِّ زاويةٍ والضلعِ المُقابِلِ لها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

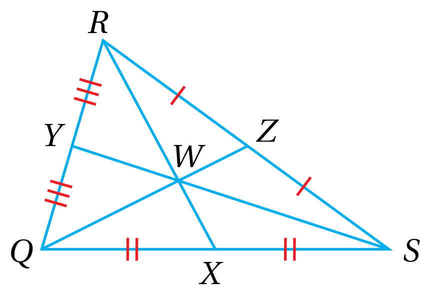
إذا كانَتْ: $A(-5, -1), B(-2, 4), C(3, -1)$، فأجِدُ إحداثيَّيْ ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔABC.

مُلخَّصُ المفهومِ

قطعٌ مستقيمةٌ ونقاطٌ خاصةٌ في المُثلَّثِ

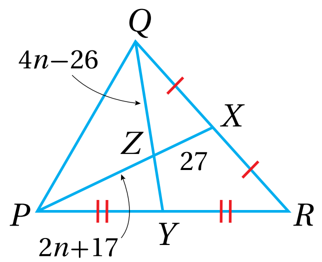
	المُنصِّفاتُ العموديةُ	مُنصِّفاتُ الزوايا	القطعُ المُتوسِّطةُ	الارتفاعاتُ
نقطةُ التلاقي	مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ المُثلَّثِ.	ملتقى الارتفاعاتِ.
الخاصيةُ	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ رؤوسِهِ.	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ أضلاعِهِ.	النقطةُ P مركزُ ΔABC، وهيَ تبعدُ عنْ كلِّ رأسٍ ثلثَيْ طولِ القطعةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.	النقطةُ P هيَ ملتقى ارتفاعاتِ ΔABC.
مثالٌ				

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ



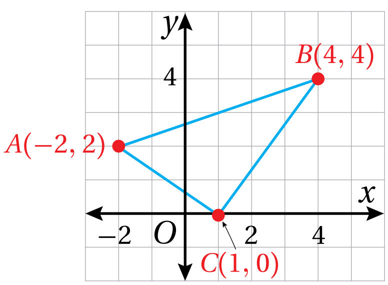
إذا كانَتِ النقطةُ W هيَ مركزَ ΔQRS، وكانَ $RX = 48, QW = 30$،
فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 RW
2 WX
3 QZ
4 WZ



أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

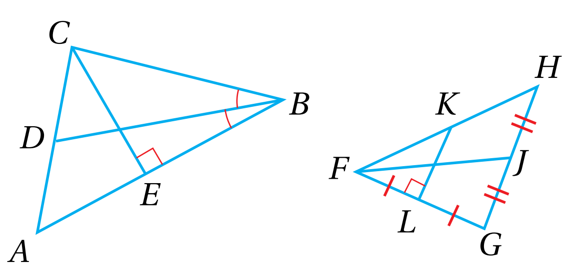
5 PZ
6 PX
7 QZ
8 YZ



9 يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.
أجدُ إحداثيَّيْ مركزِ هذا المُثلَّثِ.

أجدُ إحداثيَّيْ مركزِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

10 $F(1, 5), G(-2, 7), H(-6, 3)$
11 $A(5, 5), B(11, -3), C(-1, 1)$



يظهرُ ΔABC و ΔGFH في الشكلِ المُجاوِرِ. أُحدِّدُ إذا كانَتْ كلُّ قطعةٍ مستقيمةٍ في ما يأتي تُمثِّلُ ارتفاعًا، أوْ عمودًا مُنصِّفًا، أوْ قطعةً مُتوسِّطةً، أوْ مُنصِّفَ زاويةٍ:

12 BD
13 FJ
14 CE
15 KL

أجدُ إحداثييْ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

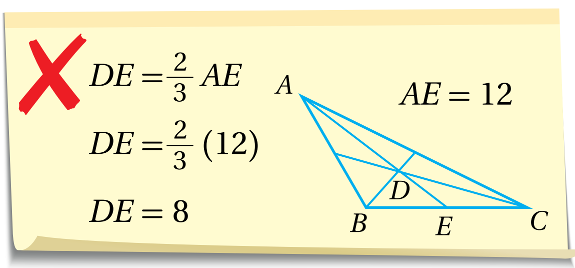
17 $A(4, -3), B(8, 5), C(8, -8)$

16 $X(-2, -2), Y(6, 10), Z(6, 6)$

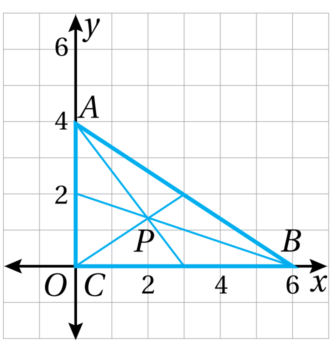
18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

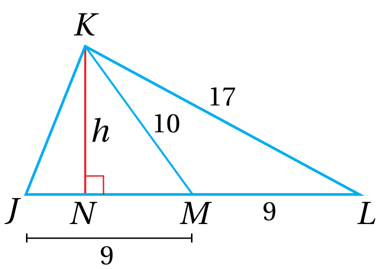
19 **أكتشفُ الخطأَ:** يُمثِّلُ الشكلُ المُجاورُ حَلَّ خالدٍ لإيجادِ طولِ $\overline{DE}$ في $\triangle ABC$، حيثُ D مركزُ المُثلَّثِ. أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ خالدٍ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



20 **تبريرٌ:** يظهرُ في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ $\triangle ABC$ الذي مركزُهُ النقطةُ P. إذا حُرِّكَتِ النقطةُ B إلى اليمينِ على المحورِ x، وظلَّتْ كلٌّ منَ النقطةِ A والنقطةِ C في موقعِها، فما تأثيرُ ذلكَ في موقعِ كلٍّ منْ مركزِ $\triangle ABC$ وملتقى ارتفاعاتِهِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



تحدٍّ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ $\triangle JKL$. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ السؤالينِ الآتيينِ:



21 أجدُ مساحةَ كلٍّ منَ $\triangle JKM$، و $\triangle KML$ بدلالةِ h، مُقارنًا بينَ مساحتي المُثلَّثينِ.

22 في السؤالِ السابقِ، هلْ تختلفُ العلاقةُ بينَ مساحتي المُثلَّثينِ الناتجينِ منَ القطعةِ المُتوسِّطةِ للمُثلَّثِ تبعًا لاختلافِ نوعِ المُثلَّثِ، مُبرِّرًا إجابتي؟

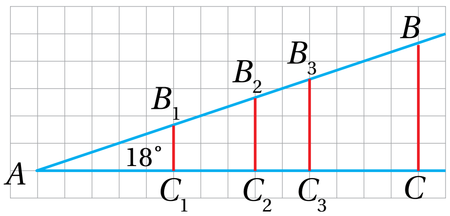
نشاط مفاهيميٌّ

النسبُ المُثلَّثيةُ

Trigonometric Ratios

الهدفُ: استقصاءُ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ ذاتِ الزوايا القائمةِ.

نشاطٌ



الخطوةُ 1: أرسمُ الشكلَ المُجاوِرَ على ورقةِ مُربَّعاتٍ.

الخطوةُ 2: في كلٍّ مِنْ مُثلَّثاتِ الشكلِ، أجدُ طولَ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ، وطولَ الضلعِ المُجاوِرِ لها، وطولَ الوترِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ (إنْ لَزِمَ)، ثمَّ أُدوِّنُ ما أتوصَّلُ إليْهِ في الجدولِ التالي.

الخطوةُ 3: أجدُ النسبَ المطلوبةَ في الجدولِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ.

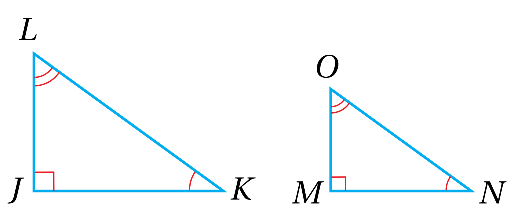
النسبُ			طولُ الوترِ	طولُ الضلعِ المُجاوِرِ للزاويةِ A	طولُ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A	المُثلَّثُ
(المُقابِلُ) / (المُجاوِرِ)	(المُجاوِرُ) / (الوترِ)	(المُقابِلُ) / (الوترِ)				
						ΔAB_1C_1
						ΔAB_2C_2
						ΔAB_3C_3
						ΔABC

أُحلِّلُ النتائجَ:

1. ما قياسُ الزاويةِ A لكلِّ مُثلَّثٍ في الشكلِ؟
2. ما العلاقةُ بينَ المُثلَّثاتِ جميعِها في الشكلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
3. أدرسُ النسبَ بينَ أطوالِ الأضلاعِ في الجدولِ، ثمَّ أكتبُ ثلاثَ جملٍ لوصفِ النمطِ الذي يظهرُ.

أُفكِّرُ:

أكتبُ ثلاثةَ تناسباتٍ باستعمالِ أطوالِ ساقَيِ المُثلَّثينِ المُجاوِرينِ.



النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحاتُ النسبُ المُثلَّثيةُ، الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ، معكوسُ النسبةِ المُثلَّثيةِ، مُتطابِقةُ فيثاغورس.

مسألةُ اليومِ تُبيِّنُ الصورةُ المُجاوِرَةُ آلةً حاسبةً علميةً. فيمَ يُستعمَلُ كلٌّ منَ المفاتيحِ الثلاثةِ المشارِ إليْها؟

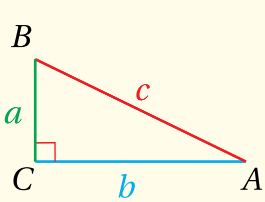
النسبُ المُثلَّثيةُ

النسبةُ المُثلَّثيةُ (trigonometric ratio) هيَ نسبةٌ بينَ طولَيْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

تتضمَّنُ النظريةُ الآتيةُ ثلاثَ نسبٍ مُثلَّثيةٍ مشهورةٍ، لها أسماءٌ ورموزٌ خاصةٌ بها.

نظريةٌ — **النسبُ المُثلَّثيةُ**

إذا كانَ ΔABC قائمَ الزاويةِ، وكانَتِ $\angle A$ زاويةً حادَّةً فيهِ، فإنَّ نسبَ المُثلَّثِ التي هيَ أكثرُ شيوعًا تُعرَفُ بدلالةِ الوترِ، والضلعِ المُقابِلِ، والضلعِ المُجاوِرِ كما يأتي:



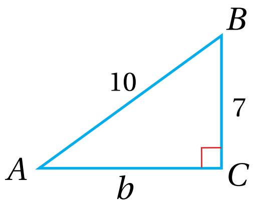
- **الجيبُ** (sine) $\sin A = \dfrac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{الوترِ})} = \dfrac{a}{c}$
- **جيبُ التمامِ** (cosine) $\cos A = \dfrac{(\text{المُجاوِرَ})}{(\text{الوترِ})} = \dfrac{b}{c}$
- **الظلُّ** (tangent) $\tan A = \dfrac{(\text{المُقابِلَ})}{(\text{المُجاوِرِ})} = \dfrac{a}{b}$

رموزٌ رياضيةٌ

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ (A, B, C) إلى رؤوسِ المُثلَّثِ، في حينِ تشيرُ الأحرفُ الصغيرةُ (a, b, c) إلى الأطوالِ المُقابِلةِ لتلكَ الرؤوسِ. فمثلًا، يشارُ إلى طولِ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A بالحرفِ a، وهكذا.

مثال 1

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



الخطوةُ 1: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b.

نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويضِ $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيطِ	$49 + b^2 = 100$
بطرحِ 49 منْ طرفي المعادلةِ	$b^2 = 51$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ	$b = \pm\sqrt{51}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

الخطوةُ 2: أجدُ النسبَ المُثلَّثيةَ الثلاثَ.

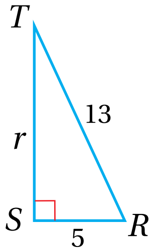
$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}} \qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10} \qquad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$$

أفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ استعمالُ وصفِ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ النسبِ المُثلَّثيةِ للزاويةِ القائمةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ T في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



النسبُ المُثلَّثيةُ، والآلةُ الحاسبةُ

يُمكِنُ إيجادُ قِيَمِ النسبِ المُثلَّثيةِ لزوايا معلومةٍ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

1 $\sin 54°$

أضغطُ على مفتاحِ sin ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 54، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 5 4 = 0.8090169944

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.809

إذنْ، $\sin 54° \approx 0.809$.

2 $\cos 80°$

أضغطُ على مفتاحِ cos ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 80، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

cos 8 0 = 0.1736481777

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.174

إذنْ، $\cos 80° \approx 0.174$.

3 $\tan 25°$

أضغطُ على مفتاحِ tan ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 25، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 2 5 = 0.4663076582

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.466

إذنْ، $\tan 25° \approx 0.466$.

أتعلَّمُ

أضبطُ الآلةَ الحاسبةَ على خيارِ (DEGREES) قبلَ استعمالِها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) $\sin 36°$ **b)** $\cos 70°$ **c)** $\tan 82°$

يُمكِنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَتْ إحدى نسبِها، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المُثلَّثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ جيبِ التمامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الظلِّ ($\tan^{-1}$).

مثال 3

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1 $\sin A = \frac{3}{8}$

$\sin A = \frac{3}{8}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 8) = 22.024312837

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $22.0°$

إذنْ، $m\angle A \approx 22.0°$.

2 $\cos A = \frac{10}{13}$

$\cos A = \frac{10}{13}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ معكوسُ جيبِ التمامِ

لغةُ الرياضياتِ

- يُقرَأُ معكوسُ الجيبِ: sine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\sin^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ جيبِ التمامِ: cosine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\cos^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ الظلِّ: tan inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\tan^{-1}$.

أتعلَّمُ

تحتوي بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ على مفاتيحَ خاصةٍ بمعكوسِ كلٍّ منَ النسبِ المُثلَّثيةِ، ويُمكِنُ استعمالُ هذهِ المفاتيحِ مباشرةً منْ دونِ استعمالِ مفتاحِ SHIFT .

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ كما يأتي:

SHIFT | cos | (| 10 | ÷ | 13 |) | = | 39.7151372318

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $39.7°$

إذنْ، $m\angle A \approx 39.7°$.

3 $\mathbf{\tan A = \frac{12}{5}}$

النسبةُ المعطاةُ $\tan A = \frac{12}{5}$

معكوسُ الجيبِ $m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ كما يأتي:

SHIFT | tan | (| 12 | ÷ | 5 |) | = | 67.380135052

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $67.4°$

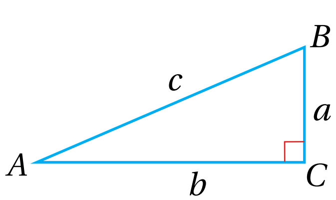
إذنْ، $m\angle A \approx 67.4°$.

أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

a) $\sin A = \frac{4}{9}$ **b)** $\cos A = 0.64$ **c)** $\tan A = 0.707$

العلاقةُ بينَ الجيبِ وجيبِ التمامِ



في المُثلَّــثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{b}{c}$, $\sin A = \frac{a}{c}$،
فما قيمةُ $\sin^2 A + \cos^2 A$؟

يُمكِنُ إيجادُ قيمةِ $\sin^2 A + \cos^2 A$ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

بالتعويضِ $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

بالتبسيطِ $= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$

أتعلَّمُ

$\sin^2 A$ تعني $(\sin A)^2$،
و $\cos^2 A$ تعني $(\cos A)^2$.

بجمعِ الكسورِ	$= \frac{a^2+b^2}{c^2}$
باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس	$= \frac{c^2}{c^2}$
بالتبسيطِ	$= 1$

إذنْ، $\sin^2 A+\cos^2 A=1$، وتُسمّى هذهِ العلاقةُ **مُتطابِقةَ فيثاغورس** (Pythagorean identity).

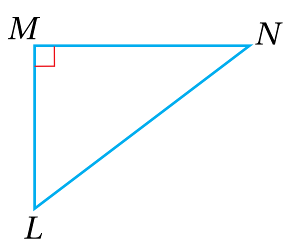
نظريةٌ **مُتطابِقةُ فيثاغورس**

في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، حيثُ A زاويةٌ حادَّةٌ فيهِ، فإنَّ:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثال 4

في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\sin N = \frac{2}{3}$، فأجدُ $\cos N$.



مُتطابِقةُ فيثاغورس	$\sin^2 N + \cos^2 N = 1$
بتعويضِ $\sin N = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$
بالتربيعِ	$\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$
بطرحِ $\frac{4}{9}$ منْ طرفي المعادلةِ	$\cos^2 N = \frac{5}{9}$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ	$\cos N = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

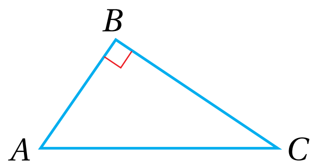
بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ N في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ LMN هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاورِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ $\cos N$ قيمةٌ موجبةٌ؛ أيْ إنَّ $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

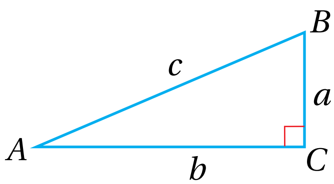
أتعلَّمُ

قيمةُ كلٍّ منَ الجيبِ، وجيبِ التمامِ، والظلِّ موجبةٌ لأيِّ زاويةٍ حادَّةٍ.

أتحقَّقُ من فهمي

في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{4}{5}$، فأجِدُ $\sin A$.





تُعَدُّ الزاويتانِ الحادَّتانِ في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ مُتتامَّتينِ. ولكنْ، ما العلاقةُ بينَ نسبِهِما المُثلَّثيةِ؟

في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، ألاحِظُ أنَّ:

$$\sin A = \frac{a}{c}\ , \cos A = \frac{b}{c}\ , \sin B = \frac{b}{c}\ , \cos B = \frac{a}{c}$$

ومنْ ثَمَّ، يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ جيبَ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ تمامِ مُتمِّمتِها، وأنَّ جيبَ تمامِ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ مُتمِّمتِها.

أتذكَّرُ

الزاويتانِ المُتتامَّتانِ هما زاويتانِ مجموعُ قياسَيْهِما $90°$.

مفهومٌ أساسيٌّ — الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

إذا كانَ A و B زاويتينِ مُتتامَّتينِ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، فإنَّ:

$$\sin B = \cos(90° - B) = \cos A \qquad \sin A = \cos(90° - A) = \cos B$$

$$\cos B = \sin(90° - B) = \sin A \qquad \cos A = \sin(90° - A) = \sin B$$

مثال 5

إذا كانَ $\cos 34° = 0.829$، فأجِدُ $\sin 56°$.

$\cos A = \sin(90° - A)$ — تعريفُ الجيبِ وجيبِ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

$\cos 34° = \sin(90° - 34°)$ — بتعويضِ $A = 34°$

$\cos 34° = \sin 56°$ — بالتبسيطِ

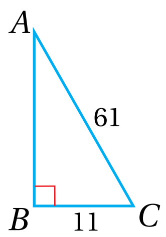
$\sin 56° = 0.829$ — بتعويضِ $\cos 34° = 0.829$

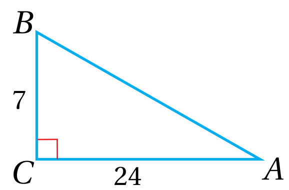
أتحقَّقُ من فهمي

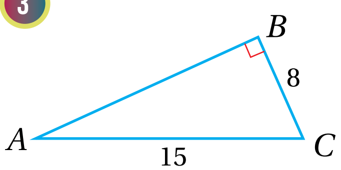
إذا كانَ $\sin 70° = 0.9397$، فأجِدُ $\cos 20°$.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1) 

2) 

3) 

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4) $\sin 43°$ 5) $\sin 67.2°$ 6) $\sin 90°$

7) $\cos 80°$ 8) $\cos 22°$ 9) $\cos 90°$

10) $\tan 20°$ 11) $\tan 45°$ 12) $\tan 30°$

13) $4 \sin 63°$ 14) $7 \tan 52°$ 15) $9 \cos 8°$

16) $\dfrac{5}{\sin 31°}$ 17) $\dfrac{3}{\tan 64°}$ 18) $\dfrac{7}{\cos 60°}$

أجدُ قياسَ $\angle B$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

19) $\sin B = 0.5$ 20) $\sin B = 0.999$ 21) $\sin B = 0.877$

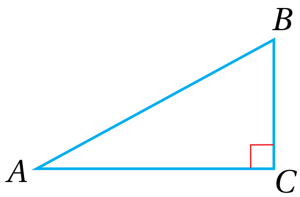
أجدُ قياسَ $\angle N$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

22) $\cos N = 0.2$ 23) $\cos N = 0.5$ 24) $\cos N = 0.999$

أجدُ قياسَ $\angle M$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

25) $\tan M = 0.6$ 26) $\tan M = 2.67$ 27) $\tan M = 4.38$

28 في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{8}{17}$، فأجدُ $\cos A$.

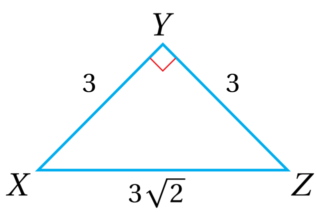


29 إذا كانَ $\cos 55° = 0.57358$، فأجدُ $\sin 35°$.

30 إذا كانَ $\sin 78° = 0.9781$، فأجدُ $\cos 12°$، و $\sin 12°$.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:



31 أُحدِّدُ النسبَ المُثلَّثيةَ المتساويةَ في الشكلِ.

32 ما قياسُ كلٍّ منَ الزاويةِ X، والزاويةِ Z؟

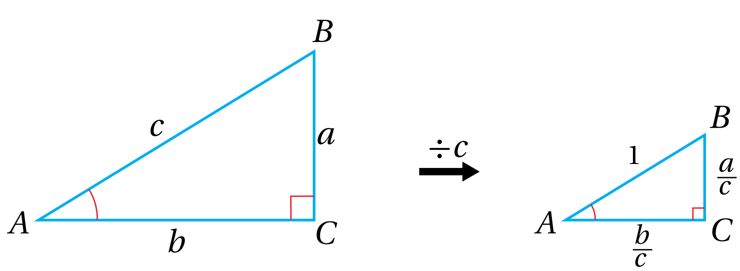
33 أكتبُ استنتاجًا بناءً على إجابتي عنِ السؤالينِ السابقينِ.

تبريرٌ: إذا كانَ ΔLMN قائمَ الزاويةِ في M، فأُثبِتُ صحَّةَ كلِّ متباينةٍ ممّا يأتي:

34 $\sin L < 1$

35 $\cos L < 1$

36 **تحدٍّ:** مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، أُثبِتُ أنَّ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.



الدرس 5

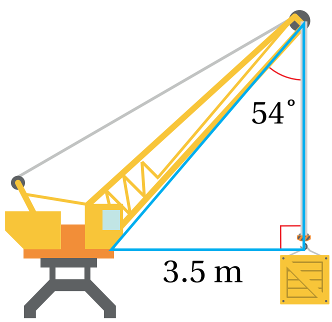
تطبيقاتُ النسبِ المُثلَّثيةِ

Applications of Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرسِ استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحاتُ زاويةُ الارتفاعِ، زاويةُ الانخفاضِ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ رافعةً، في نهايةِ ذراعِها حبلٌ متينٌ يرفعُ حاويةً كبيرةً. إذا كانَتِ الزاويةُ بينَ الحبلِ والذراعِ °54، وكانَ بُعْدُ الحاويةِ عنْ بدايةِ الذراعِ 3.5 m، فأجدُ طولَ ذراعِ الرافعةِ.

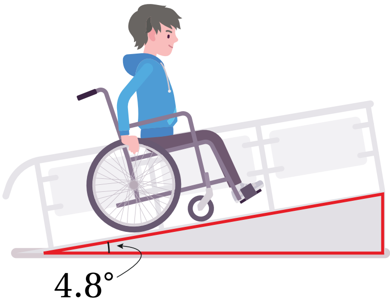


استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ أطوالِ أضلاعٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ في كثيرٍ منَ السياقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

بناءٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ الممرَّ المُنحدِرَ الخاصَّ بذوي الإعاقةِ الحركيةِ في أحدِ الأبنيةِ. إذا كانَ ارتفاعُ نهايةِ هذا الممرِّ عنْ سطحِ الأرضِ هوَ 45 cm، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها الممرُّ معَ الأرضِ هيَ °4.8، فأجدُ طولَهُ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.



أُلاحِظُ منَ الشكلِ أنَّ الزاويةَ المَقيسةَ هيَ °4.8، ولتكنْ A، وأنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لها هوَ 45 cm، وأنَّ الضلعَ المجهولَ هوَ الوترُ، وليكنْ d؛ لذا أستعملُ نسبةَ الجيبِ لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ.

$$\sin A = \frac{\text{(المُقابِل)}}{\text{(الوترِ)}}$$ نسبةُ الجيبِ

$$\sin 4.8° = \frac{45}{d}$$ بالتعويضِ

$$d\,(\sin 4.8°) = 45$$ بضربِ طرفيِ المعادلةِ في d

$$d = \frac{45}{\sin 4.8°}$$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على $\sin 4.8°$

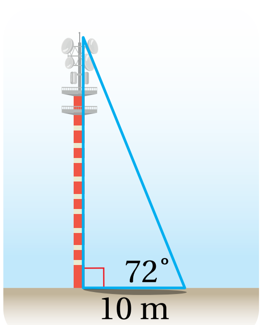
$$d \approx 538$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، طولُ الممرِّ المُنحدِرِ هوَ 538 cm تقريبًا.

أفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ استعمالُ نسبةٍ مُثلَّثيةٍ أُخرى لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ منْ فهمي



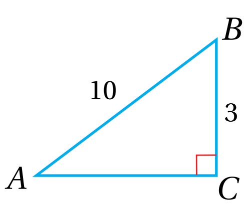
يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ برجَ اتصالاتٍ، طولُ ظلِّهِ 10 m. إذا كانَتِ الزاويةُ التي تصنعُها أشعةُ الشمسِ معَ نهايةِ الظلِّ على سطحِ الأرضِ هيَ 72°، فأجدُ ارتفاعَ البرجِ.

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ استعمالَ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ باستعمالِ النسبِ المُثلَّثيةِ ومعكوسِ النسبِ المُثلَّثيةِ.

مثال 2

أجدُ قياسَ $\angle A$ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنَّني أستعملُ الجيبَ:

$$\sin A = \frac{3}{10}$$ تعريفُ الجيبِ

$$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$$ معكوسُ الجيبِ

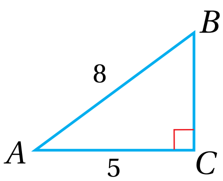
والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 10) = 17.4576031237

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $17.5°$

إذنْ، $m\angle A \approx 17.5°$.

2



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُجاوِرِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنَّني أستعملُ جيبَ التمامِ:

$$\cos A = \frac{5}{8}$$ تعريفُ جيبِ التمامِ

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$$ معكوسُ جيبِ التمامِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (5 ÷ 8) = 51.3178125465

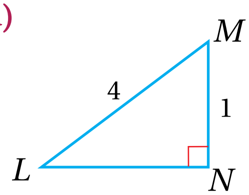
بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $51.3°$

إذنْ، $m\angle A \approx 51.3°$.

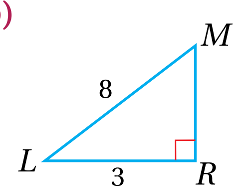
أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قياسَ $\angle L$ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

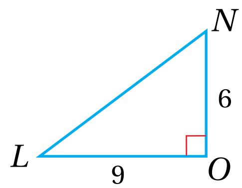
a)



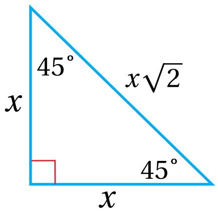
b)



c)

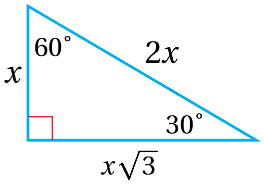


استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ في المُثلَّثاتِ القائمةِ الزاويةِ الخاصةِ



يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ المُثلَّثَ $90° - 45° - 45°$؛ وهوَ مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، ومُتطابِقُ الضلعَينِ.

يمتازُ هذا المُثلَّثُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي $\sqrt{2}$ مَرَّةً طولَ كلِّ ساقٍ منْ ساقيْهِ.



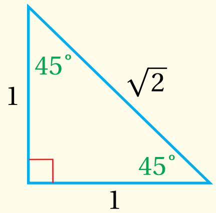
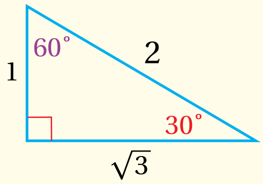
أمّا الشكلُ المُجاوِرُ فيُبيِّنُ المُثلَّثَ $90° - 60° - 30°$ الذي يمتازُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي مثليْ طولِ الساقِ المُقابِلةِ للزاويةِ $30°$، وبأنَّ طولَ الساقِ المُقابِلةِ للزاويةِ $60°$ يساوي $\sqrt{3}$ مَرَّةً طولَ الساقِ المُقابِلةِ للزاويةِ $30°$.

أتعلَّمُ

بكلماتٍ أُخرى، فإنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ $30°$ في المُثلَّثِ $90° - 60° - 30°$ يساوي نصفَ طولِ الوترِ.

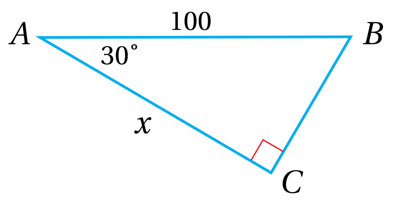
تُستعمَلُ النسبُ المُثلَّثيةُ للزوايا الخاصةِ: $30°, 60°, 45°$ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ. وفي ما يأتي تلخيصٌ لهذهِ النسبِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **النسبُ المُثلَّثيةُ للزوايا الخاصةِ**

الظلُّ	جيبُ التمامِ	الجيبُ	المُثلَّثُ
$\tan 45° = 1$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	

مثال 3

أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



نسبةُ جيبِ التمامِ
$$\cos A = \frac{\text{(المُجاوِرَ)}}{\text{(الوترِ)}}$$

بالتعويضِ
$$\cos 30° = \frac{x}{100}$$

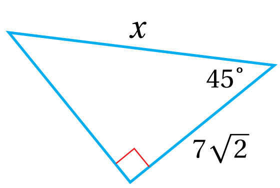
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100}$$

بضربِ طرفي المعادلةِ في 100
$$\frac{100\sqrt{3}}{2} = x$$

بالتبسيطِ
$$x = 50\sqrt{3}$$

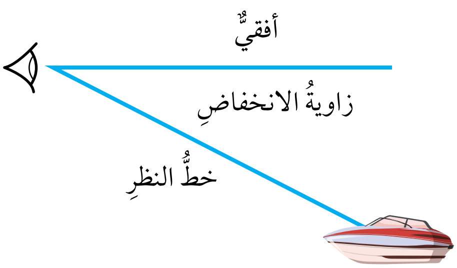
أتحقَّقُ منْ فهمي

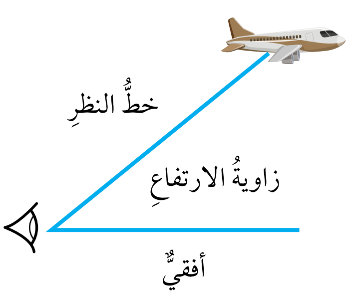
أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ

يُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأعلى والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الارتفاعِ** (angle of elevation)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ سطحِ الأرضِ إلى طائرةٍ في السماءِ والخطِّ الأفقيِّ. ويُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأسفلِ والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الانخفاضِ** (angle of depression)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ منارةٍ إلى سفينةٍ في البحرِ والخطِّ الأفقيِّ.

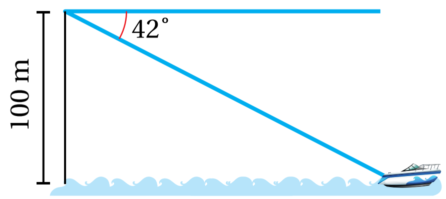




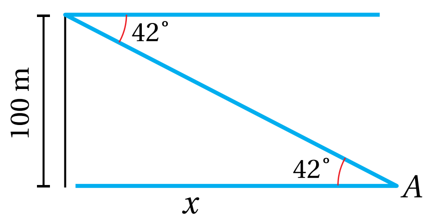
يُمكِنُ استعمالُ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

قارِبٌ: ينظرُ عليٌّ منْ أعلى جُرْفٍ إلى قارِبٍ في البحرِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها $42°$. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرْفِ عنْ سطحِ البحرِ هوَ 100 m، فأجدُ بُعْدَ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ.



بما أنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ (زاويةُ الانخفاضِ) هوَ $42°$، فإنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ هوَ $42°$؛ لأنَّهُما زاويتانِ مُتبادِلتانِ داخليًّا.



أفترضُ أنَّ زاويةَ الانخفاضِ هيَ A، وأنَّ بُعْدَ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ x:

$$\tan A = \frac{\text{(المُقابِل)}}{\text{(المُجاوِر)}}$$ نسبةُ الظلِّ

$$\tan 42° = \frac{100}{x}$$ بالتعويضِ

$$x \tan 42° = 100$$ بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في x

$$x = \frac{100}{\tan 42°}$$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على $\tan 42°$

$$x \approx 111$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

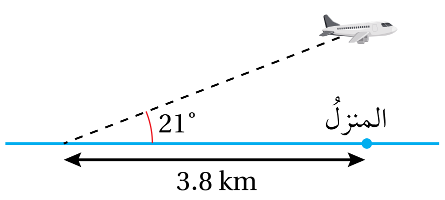
إذنْ، بُعْدُ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ 111 m تقريبًا.

أتعلَّمُ

الخطُّ الأفقيُّ ومستوى سطحِ البحرِ مُتوازِيانِ؛ لذا فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ والزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ مُتبادِلتانِ داخليًّا، إذنْ، فَهُما متطابقتانِ.

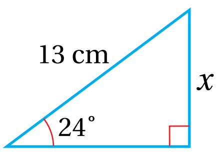
أتحقَّقُ منْ فهمي

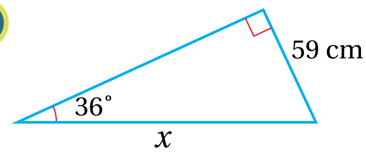
طائرةٌ: رصدَتْ ليلى طائرةً في السماءِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها $21°$ لحظةَ مرورِها فوقَ سطحِ أحدِ المنازلِ. إذا كانَ بُعْدُ ليلى عنِ المنزلِ هوَ 3.8 km، فأجدُ ارتفاعَ الطائرةِ عنِ المنزلِ.

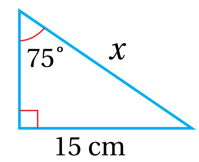


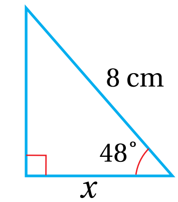
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

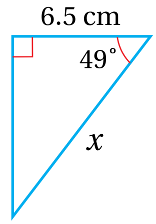
أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ:

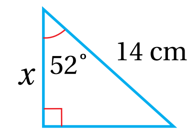
1 

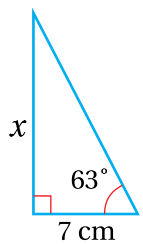
2 

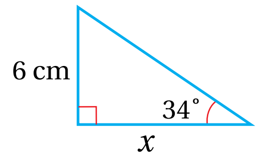
3 

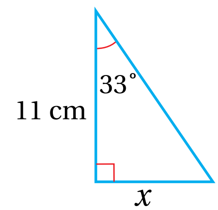
4 

5 

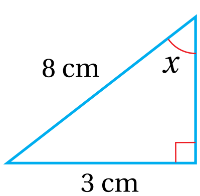
6 

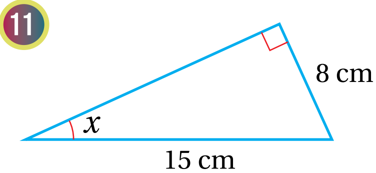
7 

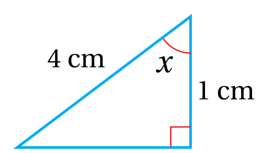
8 

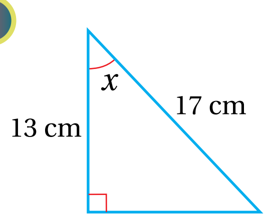
9 

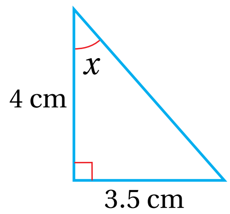
أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

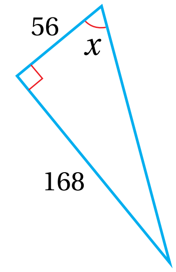
10 

11 

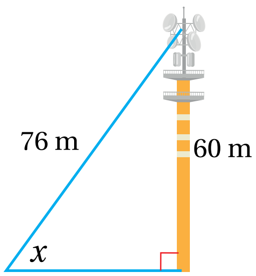
12 

13 

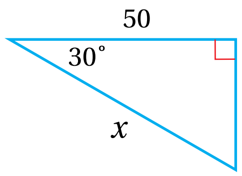
14 

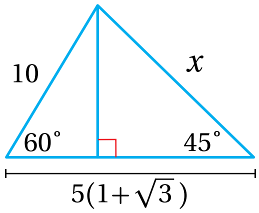
15 

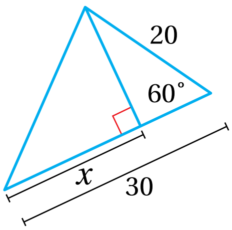
16 وُضِعَ هوائيٌّ بثٍّ فوقَ بُرْجِ محطَّةٍ إذاعيةٍ، واستُعمِلَ سلكٌ داعمٌ طولُهُ 76 m لتثبيتِ طرفِ الهوائيِّ بسطحِ الأرضِ كما في الشكلِ المُجاورِ. إذا كانَ ارتفاعُ البُرْجِ والهوائيِّ هوَ 60 m، فأجدُ قياسَ الزاويةِ بينَ السلكِ وسطحِ الأرضِ مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ.



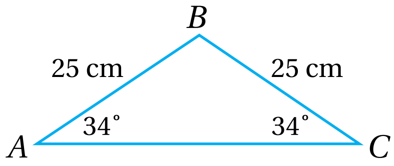
أستعملُ النسبَ المُثلَّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

17


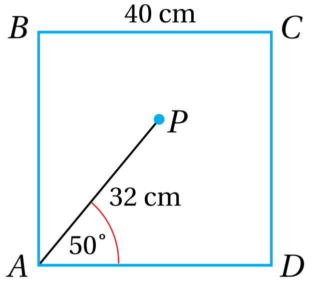
18


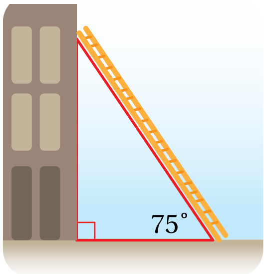
19


20 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي ΔABC. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ أقصرِ مسافةٍ بينَ النقطةِ B و $\overline{AC}$.



21 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي المُربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 40 cm. إذا كانَتِ النقطةُ P تقعُ داخلَ المُربَّعِ كما في الشكلِ، فأجدُ بُعْدَ هذهِ النقطةِ عنْ كلٍّ منْ $\overline{AD}$، و $\overline{AB}$، و $\overline{CD}$.





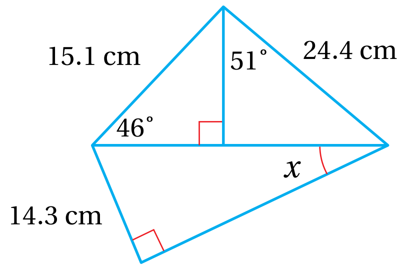
22 وُضِعَ سُلَّمٌ على أحدِ أطرافِ مبنًى كما في الشكلِ المُجاوِرِ، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها السُّلَّمُ معَ الأرضِ هيَ $75°$؛ لتجنُّبِ السقوطِ عنْهُ. أجدُ ارتفاعَ طرفِ السُّلَّمِ عنْ سطحِ الأرضِ في هذهِ الحالةِ إذا كانَ طولُهُ 6 m.

23 وقفَ عصفورٌ على شجرةٍ ارتفاعُها 12 m، مُراقِبًا دودةً على سطحِ الأرضِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها $34°$. أجدُ المسافةَ بينَ الدودةِ والعصفورِ.

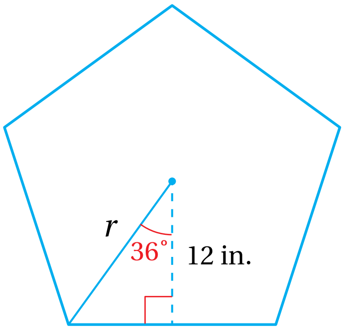
24 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

25 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُبرِّرًا إجابتي.

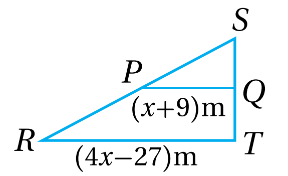


26 **تحدٍّ:** يُبيِّنُ الشكلُ الآتي خماسيًّا مُنتظَمًا، طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ التي تمرُّ برؤوسِهِ r. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ مساحةِ الخماسيِّ.



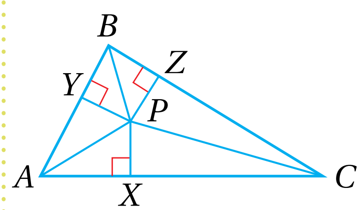
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَتِ $\overline{PQ}$ قطعةً مُنصِّفةً في المُثلَّثِ RST، فإنَّ طولَ $\overline{RT}$ بالأمتارِ هوَ:



a) 9 b) 21 c) 45 d) 63

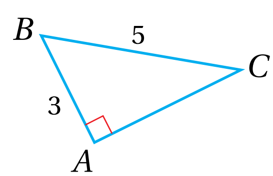
2 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، فإنَّ الجملةَ الصحيحةَ ممّا يأتي هيَ:



a) $PA = PB$ b) $YA = YB$

c) $PX = PY$ d) $AX = BZ$

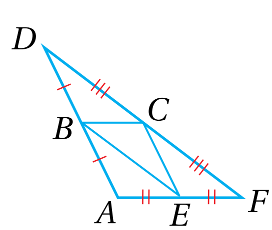
3 جيبُ تمامِ الزاويةِ C في الشكلِ المُجاوِرِ يساوي:



a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$

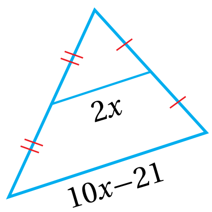
c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

4 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَ: $DF = 24$, $BC = 6$, $DB = 8$، فأجدُ محيطَ المُثلَّثِ ADF.

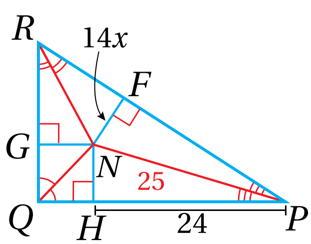


أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

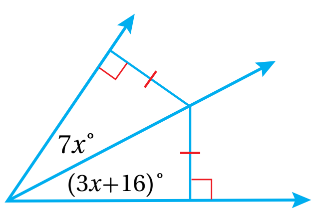
5



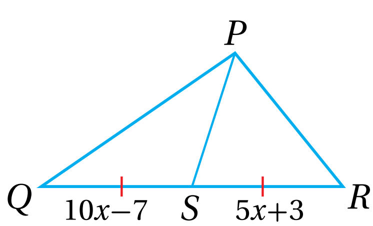
6



7



8

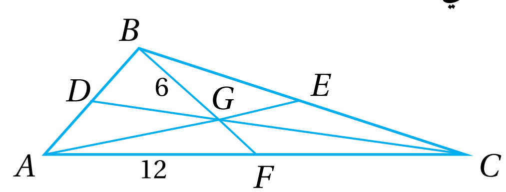


أجدُ إحداثيَّيْ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

9 $L(0, 5), M(3, 1), N(8, 1)$

10 $A(-4, 0), B(1, 0), C(-1, 3)$

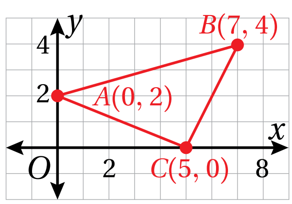
إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ ΔABC المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ كلِّ قياسٍ ممّا يلي:



11 FC

12 BF

13 يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيَّيْ مركزِ هذا المُثلَّثِ.



14 إذا كانَتِ $\angle A$ زاويةً حادَّةً في مُثلَّثٍ، وكانَ $\cos A = \frac{4}{7}$، فأجدُ $\sin A$.

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

15 $\sin 5°$

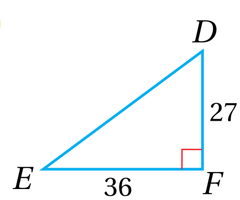
16 $\sin 81°$

17 $\cos 33°$

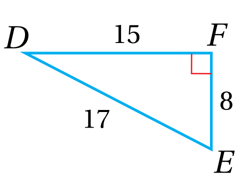
18 $\tan 70°$

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي:

19

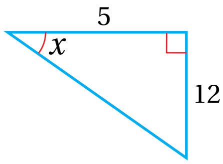


20

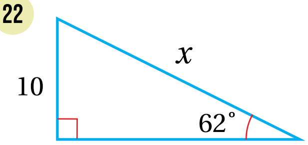


أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

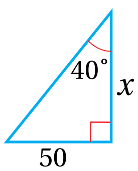
21



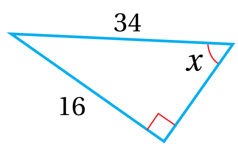
22



23



24



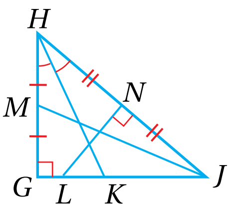
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

25 إذا كانَتِ $A(1, 3)$، وكانَتِ $B(1, 9)$، فإنَّ النقطةَ التي تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لـ $\overline{AB}$ هيَ:

a) $(3, 3)$　　b) $(1, 5)$

c) $(6, 6)$　　d) $(3, 12)$

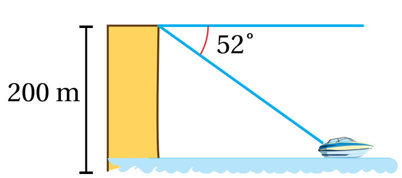
26 الوصفُ الصحيحُ لـ $\overline{LN}$ في الشكلِ المُجاورِ هوَ:



a) مُنصِّفٌ عموديٌّ.　　b) قطعةٌ مُتوسِّطةٌ.

c) مُنصِّفُ زاويةٍ.　　d) ارتفاعٌ.

27 رُصِدَ قارِبٌ في البحرِ منْ أعلى قِمَّةِ جُرْفٍ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها $52°$. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرْفِ عنْ سطحِ البحرِ 200 m، فأجدُ بُعْدَ القارِبِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ.



الوحدة 6

المقاديرُ الأُسِّيَّةُ والمقاديرُ الجذريةُ
Exponential and Radical Expressions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ المقاديرُ الأُسِّيَّةُ والمقاديرُ الجذريةُ لنمذجةِ كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ والعلميةِ، ويُمكِنُ توظيفُ المعادلاتِ الجذريةِ في تحديدِ قِيَمٍ علميةٍ دقيقةٍ، مثلِ: سرعةِ الصوتِ، والزمنِ الذي يستغرقُهُ البندولُ في أثناءِ حركتِهِ التذبذبيةِ ذهابًا وإيابًا.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تبسيطَ مقاديرَ جبريةَ تحوي جذورًا صمّاءَ.
- ✓ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ✓ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ النسبيةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ✓ حَلَّ المعادلاتِ الخطيةِ والمعادلاتِ التربيعيةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ◄ تبسيطَ المقاديرِ الجذريةِ.
- ◄ إجراءَ العملياتِ على المقاديرِ الجذريةِ.
- ◄ حَلَّ معادلاتٍ تحوي جذورًا.

مشروعُ الوحدةِ

المُجسَّماتُ والمقاديرُ الأُسِّيَّةُ والجذرية

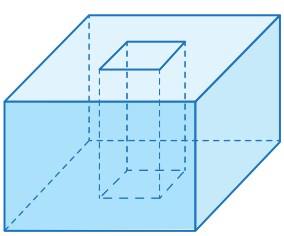
فكرةُ المشروعِ تصميمُ مُجسَّماتٍ، وتوظيفُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ والمقاديرِ الجذريةِ في التعبيرِ عنْ أبعادِها.

الموادُّ والأدواتُ قطعٌ منَ البولسترينِ، أدواتٌ هندسيةٌ، مِقصٌّ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

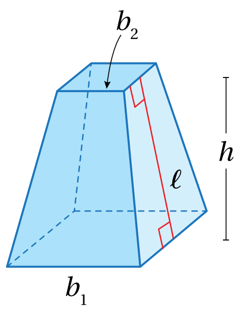
المهمةُ 1:

1. أصنعُ منْ قطعِ البولسترينِ مُكعَّبًا، وأُعبِّرُ عنْ طولِهِ بمقدارٍ أُسِّيٍّ يحوي مُتغيِّرينِ على الأقلِّ.
2. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ ومساحةَ سطحِهِ في أبسطِ صورةٍ بدلالةِ مُتغيِّراتِ المقدارِ الأُسِّيِّ.
3. أُنشِئُ في وسطِ المُكعَّبِ متوازيَ مستطيلاتٍ قاعدتُهُ مُربَّعةٌ، وطولُ ضلعِها يقلُّ بمقدارِ 5 cm عنْ طولِ ضلعِ المُكعَّبِ.
4. أجدُ حجمَ متوازي المستطيلاتِ الذي أنشأْتُهُ في الخطوةِ السابقةِ.
5. أجدُ مساحةَ سطحِ المُكعَّبِ بعدَ إنشاءِ متوازي المستطيلاتِ داخلَهُ في أبسطِ صورةٍ.
6. أُعبِّرُ عنْ طولِ ضلعِ المُكعَّبِ بمقدارٍ جبريٍّ آخرَ، وليكنْ مقدارًا جذريًّا.
7. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ ومساحةَ سطحِهِ بدلالةِ المقدارِ الجذريِّ في أبسطِ صورةٍ.



المهمةُ 2:

1. أصنعُ منْ قطعِ البولسترينِ هرمًا قاعدتُهُ مُربَّعةٌ.
2. أقصُّ الهرمَ منَ الأعلى بموازاةِ القاعدةِ كما في الشكلِ المُجاوِرِ.
3. أجدُ علاقةً يُمكِنُ بها إيجادُ الارتفاعِ الجانبيِّ للمُجسَّمِ، مُفترِضًا أنَّ طولَ قاعدتِهِ الكبيرةِ هوَ b_1، وطولَ قاعدتِهِ الصغيرةِ هوَ b_2، وارتفاعَهُ هوَ h، وارتفاعَهُ الجانبيَّ هوَ ℓ.
4. أقيسُ طولَ القاعدةِ الكبيرةِ، وطولَ القاعدةِ الصغيرةِ، والارتفاعَ الجانبيَّ للمُجسَّمِ إلى أقربِ سنتيمترٍ، ثمَّ أستعملُ العلاقةَ التي توصَّلْتُ إليْها في الفرعِ السابقِ لإيجادِ ارتفاعِ المُجسَّمِ.



عرضُ النتائجِ:

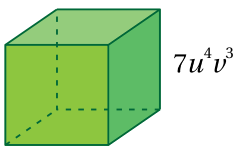
- أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمَّنُ صورًا تُوضِّحُ خطواتِ العملِ في المشروعِ.
- أعرضُ المُجسَّماتِ التي صمَّمْتُها أمامَ طلبةِ الصفِّ، مُوضِّحًا كيفَ وظَّفْتُ ما تعلَّمْتُهُ في الوحدةِ في تنفيذِ هذا المشروعِ.

الدرسُ 1

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ استعمالُ خصائصِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشـــكلُ المُجاوِرُ مُكعَّبًا طولُ ضلعِهِ $7u^4v^3$ وحدةً. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ بدلالةِ u و v في أبسطِ صورةٍ.



تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ خصائصِ ضربِ القُوى

تعلَّمْتُ ســـابقًا كيفَ أستعملُ الأُســـسَ للتعبيرِ عنِ الضربِ المُتكرِّرِ لعددٍ في نفسِهِ. وتعلَّمْتُ أيضًا أنَّ عددَ مَرّاتِ تكرارِ الضربِ يُسمّى **الأُسَّ**، وأنَّ العددَ نفسَهُ يُسمّى الأساسَ، وأنَّ كُلًّا منَ الأساسِ والأُسِّ معًا يُسمّى **القوَّةَ**.

الأُسُّ

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

الأساسُ

الصيغةُ الأُسِّيَّةُ

مراجعةُ المفهومِ

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا، وكانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times .... \times a}_{n \ \text{مَرَّةً}}$$

حيثُ:

a: الأساسُ.

n: الأُسُّ.

أتذكَّرُ

الصيغةُ الأُسِّيَّةُ هيَ صيغةٌ يُكتَــبُ فيهــا الضــربُ المُتكــرِّرُ باســتعمالِ الأُسسِ.

تعلَّمْتُ أيضًا كيفَ أســتعملُ خاصيــةَ ضربِ القوى، وقوَّةِ القوَّةِ، وقــوَّةِ ناتجِ الضربِ إذا كانَ الأســاسُ عددًا حقيقيًّا. والآنَ ســأتعلَّمُ كيفَ أســتعملُ خصائصَ ضربِ القُوى هذهِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ

خصائصُ ضربِ القُوى

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ:

الخاصيةُ		مثالٌ
1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$	ضربُ القوى	$x^3 \times x^7 = x^{3+7} = x^{10}$
2) $(a^m)^n = a^{mn}$	قوَّةُ القوَّةِ	$(y^4)^5 = y^{4\times5} = y^{20}$
3) $(ab)^m = a^m b^m$	قوَّةُ ناتجِ الضربِ	$(6g)^3 = 6^3 g^3 = 216\, g^3$

يكونُ المقدارُ الأُسِّيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ شروطٌ مُعيَّنةٌ.

أتعلَّمُ

كتابةُ المقدارِ الأُسِّيِّ في أبسطِ صورةٍ تتطلَّبُ كتابةَ مقدارٍ مُكافِئٍ للمقدارِ الأُسِّيِّ، تتوافرُ فيهِ الشروطُ الواردةُ في الصندوقِ المُجاورِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

أبسطُ صورةٍ للمقدارِ الأُسِّيِّ

يكونُ المقدارُ الأُسِّيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ:

- أنْ يظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً فقطْ، وأنْ تكونَ الأُسسُ جميعُها موجبةً، وصحيحةً في المقامِ.
- ألّا يتضمَّنَ المقدارُ قوَّةَ القوَّةِ.
- أنْ تكونَ الكسورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $(3ry^5)(6r^2y^3)$

$(3ry^5)(6r^2y^3) = (3\times6)(r\times r^2)(y^5\times y^3)$ بإعادةِ تجميعِ الثوابتِ والمُتغيِّراتِ

$= (3\times6)(r^{1+2})(y^{5+3})$ ضربُ القوى

$= 18r^3y^8$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

إذا لمْ يظهرْ أُسٌّ فوقَ المُتغيِّرِ، فإنَّ أُسَّهُ يكونُ 1؛ أيْ إنَّ:

$r = r^1$

2 $\left(\left(x^2\right)^5\right)^8$

$$\left(\left(x^2\right)^5\right)^8 = \left(x^{2\times5}\right)^8$$ قوَّةُ القوَّةِ

$$= \left(x^{10}\right)^8$$ بالتبسيطِ

$$= x^{10\times8}$$ قوَّةُ القوَّةِ

$$= x^{80}$$ بالتبسيطِ

3 $(-2a^2 b)^3$

$$(-2a^2 b)^3 = (-2)^3 (a^2)^3 b^3$$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$$= -8a^6 b^3$$ بالتبسيطِ

4 $(4x^5 y^3)(-3xy^5)^2$

$$(4x^5 y^3)(-3xy^5)^2 = (4x^5 y^3)((-3)^2 (x)^2 (y^5)^2)$$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$$= (4x^5 y^3)(9x^2 y^{10})$$ قوَّةُ القوَّةِ

$$= (4 \times 9)(x^5 \times x^2)(y^3 \times y^{10})$$ بإعادةِ تجميعِ الثوابتِ والمُتغيِّراتِ

$$= 36x^7 y^{13}$$ ضربُ القوى

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $(2m^5 n^{11})(m^2 n^4)$

b) $\left(\left(v^2\right)^6\right)^9$

c) $(5x^3 y^7)^4$

d) $(5a^3 b^4)(ab^2)^7$

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ خصائصِ قسمةِ القُوى

تعلَّمْتُ سابقًا كيفَ أستعملُ خاصيةَ قسمةِ القوى، وخاصيةَ قوَّةِ ناتجِ القسمةِ إذا كانَ الأساسُ عددًا حقيقيًّا. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هاتينِ الخاصيتينِ اللتينِ هما منْ خصائصِ قسمةِ القُوى لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ

خصائصُ قسمةِ القُوى

إذا كانَ a و b عدديــنِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبرييــنِ، حيثُ: $a \neq 0$ و $b \neq 0$، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ:

مثالٌ		الخاصيةُ
$\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$	قسمةُ القوى	1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\left(\frac{6}{g}\right)^3 = \frac{6^3}{g^3} = \frac{216}{g^3}$	قوّةُ ناتجِ القسمةِ	2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1) $\frac{u^2 v^6}{uv^2}$

$$\frac{u^2 v^6}{uv^2} = \left(\frac{u^2}{u}\right)\left(\frac{v^6}{v^2}\right)$$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$$= (u^{2-1})(v^{6-2})$$ قسمةُ القوى

$$= uv^4$$ بالتبسيطِ

2) $\left(\frac{-2x^3}{x^2y^5}\right)^4$

$$\left(\frac{-2x^3}{x^2y^5}\right)^4 = \left(\frac{-2x^{3-2}}{y^5}\right)^4$$ قسمةُ القوى

$$= \left(\frac{-2x}{y^5}\right)^4$$ بالتبسيطِ

$$= \frac{(-2)^4 x^4}{(y^5)^4}$$ قوّةُ ناتجِ القسمةِ

$$= \frac{16x^4}{y^{20}}$$ قوّةُ القوّةِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{m^4 n^5}{m^2 n^3}$

b) $\left(\frac{a^8 b^6}{a^4}\right)^5$

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَــلُّ الفرعِ 2 منَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ الأُسِّ الصفريِّ والأُسِّ السالبِ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ غيرَ الصفرِ مرفوعًا إلى الأُسِّ صفرٍ يساوي 1، وأنَّ القوَّةَ ذاتَ الأساسِ غيرِ الصفريِّ والأُسِّ السالبِ هيَ مقلوبُ القوَّةِ ذاتِ الأساسِ غيرِ الصفريِّ والأُسِّ الموجبِ، والعكسُ صحيحٌ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هاتينِ الخاصيتينِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — الأُسُّ الصفريُّ والأُسُّ السالبُ

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا أوْ مقدارًا جبريًّا، حيثُ: $a \neq 0$، وكانَ n عددًا صحيحًا، فإنَّ:

الخاصيةُ		مثالٌ
1) $a^0 = 1$	الأُسُّ الصفريُّ	$(2x^2)^0 = 1, x \neq 0$
2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	الأُسُّ السالبُ	$h^{-4} = \frac{1}{h^4}, h \neq 0$

مثال 3

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2}$

$$\frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2} = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{x^5}{x^3}\right)\left(\frac{y^{-4}}{y^2}\right)$$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$$= \left(\frac{4}{2}\right)(x^{5-3})(y^{-4-2})$$ قسمةُ القوى

$$= 2(x^2)(y^{-6})$$ بالتبسيطِ

$$= 2(x^2)\left(\frac{1}{y^6}\right)$$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$$= \frac{2x^2}{y^6}$$ بالضربِ

2 $\dfrac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0}$

$$\frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0} = \frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2}$$ $y^0 = 1$

$$= 3\left(\frac{x^4}{x^2}\right)(y^{-1})(z^{-2})$$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$$= 3(x^{4-2})(y^{-1})(z^{-2})$$ قسمةُ القوى

$$= 3(x^2)\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)$$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$$= \frac{3x^2}{yz^2}$$ بالضربِ

أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{2h^3j^{-3}k^4}{3jk}$ **b)** $\left(\dfrac{x^{-2}y^4}{x^0y^5}\right)^{-3}$

أتذكَّرُ

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، حيثُ: $a \neq 0$ و $b \neq 0$، وكانَ m عددًا صحيحًا، فإنَّهُ يُمكِنُ كتابةُ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$ بالصورةِ الآتيةِ: $\left(\frac{b}{a}\right)^m$.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

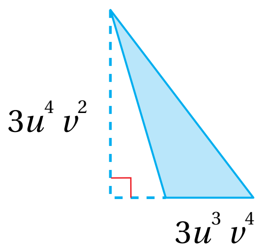
1. $(3a^3b^2)(4a^2b)$
2. $(7a^4b^5)(4ab^3)$
3. $(5x^2b^4)(2ab^{-3})$
4. $(x^5y^3)^3(xy^5)^2$
5. $(x^4)^5(x^3y^2)^5$
6. $(5a^3b^5)^4$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

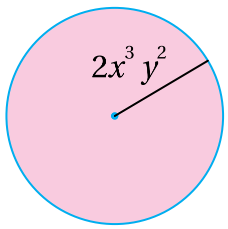
7. $(6a^2b^3)(5a^{-4}b^{-5})$
8. $((-3x^2)^4)^{-7}$
9. $(m^{-3}n^4)^{-5}$
10. $\dfrac{12a^2b^3}{6ab}$
11. $\dfrac{12a^{-3}b^4}{3a^2b^{-3}}$
12. $\dfrac{(2a^2bc^2)(6abc^3)}{4ab^0c}$
13. $\left(\dfrac{v}{w^{-2}}\right)^3$
14. $\left(\dfrac{6x^2y^4}{3x^4y^3}\right)^{-2}$
15. $\dfrac{30a^{-2}b^{-6}}{60a^{-6}b^{-8}}$

أجدُ مساحةَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

16



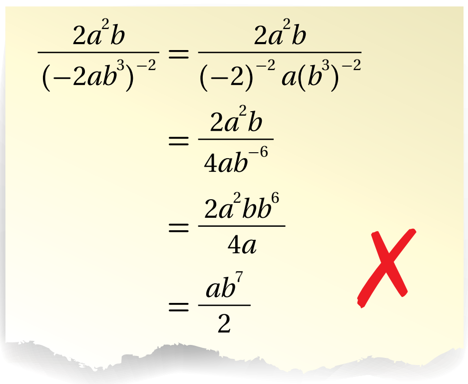
17



18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



$$\frac{2a^2b}{(-2ab^3)^{-2}} = \frac{2a^2b}{(-2)^{-2}a(b^3)^{-2}}$$
$$= \frac{2a^2b}{4ab^{-6}}$$
$$= \frac{2a^2bb^6}{4a}$$
$$= \frac{ab^7}{2}$$

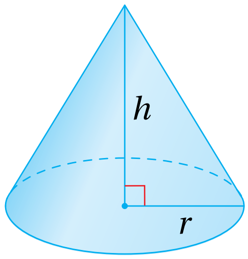
20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ مقدارينِ أُسِّيَّينِ ناتجُ ضربِهِما هوَ $18x^3y^4$ (أحُلُّ المسألةَ بطريقتينِ مختلفتينِ).

تحدٍّ: إذا كانَ $y = x^n$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:

21 أُثبِتُ أنَّ $x^{2n+1} = xy^2$.

22 أجدُ مقدارًا بدلالةِ x و y يُكافِئُ المقدارَ x^{2n-1}.

23 **تبريرٌ:** يُعبِّرُ المقدارُ $27\pi x^3$ عنْ حجمِ المخروطِ المُجاوِرِ بالوحداتِ المُكعَّبةِ.
أكتبُ مقدارًا جبريًّا أُسِّيًّا بدلالةِ x يُعبِّرُ عنْ كلٍّ منْ r و h، مُبرِّرًا إجابتي.



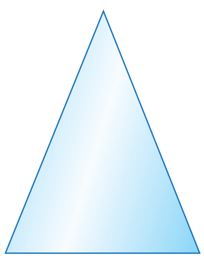
الدرس 2

العملياتُ على المقاديرِ الجذريةِ
Operations with Radical Expressions

فكرةُ الدرسِ
- تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ.
- إجراءُ العملياتِ على المقاديرِ الجذريةِ.

المصطلحاتُ المقاديرُ الجذريةُ، إنطاقُ المقامِ، المُرافِقُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُثلَّثًا مساحتُهُ $20\ cm^2$. أجدُ ارتفاعَ المُثلَّثِ في أبسطِ صورةٍ.



$5-\sqrt{10}$ cm

أتذكَّرُ

رمزُ الجذرِ

دليلُ الجذرِ

$\sqrt[n]{a}$

المجذورُ

تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ الضربِ

يُطلَقُ على المقاديرِ العدديةِ أوِ المقاديرِ الجبريةِ التي تحوي جذورًا اسمُ **المقاديرِ الجذريةِ** (radical expressions)، ويكونُ كلٌّ منها في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ:

- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ عواملَ (ما عدا العددَ 1) يُمكِنُ كتابتُها في صورةِ قوى دليلِ الجذرِ.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ كسورًا.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ كسرٍ مقامًا يحوي جذورًا.

تعلَّمْتُ في الصفِّ الثامنِ خاصيةَ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هذهِ الخاصيةَ لتبسيطِ المقاديرِ الجذريةِ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ ضربُ أيِّ جذرينِ لهُما الدليلُ نفسُهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ **خاصيةُ ضربِ الجذورِ**

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ a وb، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n، حيثُ: $n>1$:

1) إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، وكانَ $a\geq 0,\ b\geq 0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$.

2) إذا كانَ n عددًا فرديًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$.

مثالانِ: $\sqrt[3]{27\times4}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

إذا أُريدَ تبسـيطُ جذرٍ زوجيٍّ لمقدارٍ جبريٍّ أُسُّهُ زوجيٌّ، وكانَ أُسُّ المقدارِ الجبريِّ الناتجُ منَ التبسيطِ فرديًّا، فإنَّهُ يتعيَّنُ أخذُ القيمةِ المُطلَقةِ للناتجِ، وبذلكَ لا يكونُ الجوابُ عددًا سالبًا؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ لا تكونُ سالبةً، مثلَ:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad \sqrt{x^4} = x^2 \quad , \quad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3| \quad , \quad \sqrt[6]{(x-5)^6} = |x-5|$$

أتعلَّم

- إذا كانَ n عددًا فرديًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\sqrt{40x^4y^3}, y > 0$

$\sqrt{40x^4y^3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5 \times x^4 \times y^2 \times y}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{x^4} \times \sqrt{y^2} \times \sqrt{y}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times x^2 \times |y| \times \sqrt{y}$ بالتبسيطِ

$= 2x^2y\sqrt{10y}$ $y > 0$

أتعلَّم

إنَّ تحليلَ ما يُمكِنُ تحليلُهُ في المقـدارِ الجبريِّ إلى عوامـلَ مُربَّعـةٍ يُسـهِّلُ عمليـةَ تبسـيطِ المقدارِ الجذريِّ التربيعيِّ.

أتعلَّم

وردَ فـي السـؤالِ أنَّ $y > 0$؛ لـذا لا توجـدُ ضرورةٌ لكتابةِ رمزِ القيمةِ المُطلَقةِ.

2 $\sqrt[4]{81(x+1)^{12}}$

$\sqrt[4]{81(x+1)^{12}} = \sqrt[4]{3^4 \times ((x+1)^3)^4}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 4

$= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{((x+1)^3)^4}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 3|(x+1)^3|$ بالتبسيطِ

3 $\sqrt[5]{m^{10}n^7}$

$\sqrt[5]{m^{10}n^7} = \sqrt[5]{(m^2)^5 \times n^5 \times n^2}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 5

$= \sqrt[5]{(m^2)^5} \times \sqrt[5]{n^5} \times \sqrt[5]{n^2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= m^2n\sqrt[5]{n^2}$ بالتبسيطِ

أتعلَّم

لا أستعملُ القيمةَ المُطلَقةَ في هـذهِ المسـألةِ؛ لأنَّ دليلَ الجذرِ فرديٌّ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\sqrt{12x^3y^2}\,, x>0$ b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^6}$ c) $\sqrt[7]{98\,r^8\,q^9}$

تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ القسمةِ

تعلَّمْتُ في الصفِّ الثامنِ خاصيةَ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هذهِ الخاصيةَ لتبسيطِ المقاديرِ الجذريةِ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ قسمةُ أيِّ جذرينِ لهُما الدليلُ نفسُهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **خاصيةُ قسمةِ الجذورِ**

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ a و b، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n، حيثُ: $n>1$:

1) إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، وكانَ $a\geq 0, b>0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

2) إذا كانَ n عددًا فرديًّا، وكانَ $b\neq 0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

مثالانِ: $\sqrt[3]{\frac{8}{-27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{-27}}=\frac{2}{-3}$, $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المقدارَ الجذريَّ لا يكونُ في أبسطِ صورةٍ إذا احتوى أيُّ مقامٍ فيهِ على جذورٍ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ يُمكِنُ التخلُّصُ منَ الجذرِ الذي في المقامِ عنْ طريقِ عمليةٍ تُسمّى **إنطاقَ المقامِ** (rationalizing the denominator)، وتتضمَّنُ ضربَ البسطِ والمقامِ في مقدارٍ جذريٍّ، بحيثُ لا يحوي ناتجُ الضربِ جذورًا في المقامِ كما في الجدولِ الآتي:

مثالٌ	ضربُ البسطِ والمقامِ في	المقامُ
$\frac{7}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$\frac{7}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{7\sqrt[3]{5^2}}{5}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\sqrt[n]{a^m}$

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}}$

$\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{2 \times 2^2}}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}}$ بالتبسيطِ

$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ بإنطاقِ المقامِ

$= \frac{\sqrt{14x}}{4}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

2 $\sqrt{\frac{x}{y^5}}$

$\sqrt{\frac{x}{y^5}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^5}}$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2 \times y}}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2} \times \sqrt{y}}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}}$ بالتبسيطِ

$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بإنطاقِ المقامِ

$= \frac{\sqrt{xy}}{y^3}$ $\sqrt{y} \times \sqrt{y} = y$

أتذكَّرُ

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا، حيثُ: $a \geq 0$، فإنَّ: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$، وهذا منْ خصائصِ الجذورِ التربيعيةِ.

3 $\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}}$

$$\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}} = \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}}$$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$$= \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}} \times \frac{\sqrt[3]{3m^2}}{\sqrt[3]{3m^2}}$$ بإنطاقِ المقامِ

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{\sqrt[3]{27m^3}}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m}$$ $\sqrt[3]{27m^3} = 3m$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt{\frac{12x^4}{y^3}}$ c) $\sqrt[5]{\frac{7}{16x^3}}$

العملياتُ على المقاديرِ الجذريةِ

يُطلَقُ على الجذورِ التي لها الدليلُ نفسُهُ والمجذورُ نفسُهُ اسمُ الجذورِ المُتشابِهةِ، ويُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجذريةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ جمعِ المقاديرِ الجبريةِ وطرحِها.

$\sqrt[3]{2c}$, $\sqrt{2c}$
جذرانِ غيرُ مُتشابِهينِ.

$5\sqrt[3]{2c}$, $-4\sqrt[3]{2c}$
جذرانِ مُتشابِهانِ.

أتذكَّرُ

المجذورُ هوَ المقدارُ العدديُّ أوِ المقدارُ الجبريُّ الذي يوجدُ أسفلَ رمزِ الجذرِ.

مثال 3

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2}$

$$\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} + \sqrt[4]{2}$$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 4

$$= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 3\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$ بالتبسيطِ

$= 4\sqrt[4]{2}$ بجمعِ الجذورِ المُتشابهةِ

2 $\sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x}$

$\sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x} = \sqrt[3]{2^3 \times 3x} - \sqrt[3]{3^3 \times 3x}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 3

$= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3x}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2\sqrt[3]{3x} - 3\sqrt[3]{3x}$ بالتبسيطِ

$= -\sqrt[3]{3x}$ بطرحِ الجذورِ المُتشابهةِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375}$

b) $\sqrt{160\,xy} - \sqrt{40\,xy}$

يُمكِنُ ضربُ المقاديرِ الجذريةِ وقسمتُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ وقسمتِها.

مثال 4

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24}$

$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{9 \times 24}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= \sqrt[3]{3^2 \times 2^3 \times 3}$ بالتحليلِ إلى العواملِ الأوّليةِ

$= \sqrt[3]{3^3 \times 2^3}$ بتجميعِ العواملِ في صورةِ أُسسٍ تكعيبيةٍ

$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2^3}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 3 \times 2 = 6$ بالتبسيطِ

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حلُّ الفرعِ 1 منَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَـلُّ الفرعِ 2 منَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2 $\sqrt{40} \div \sqrt{5}$

$\sqrt{40} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{40}{5}}$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$= \sqrt{8}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt{2^2 \times 2}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2\sqrt{2}$ بالتبسيطِ

3 $(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2 + 4\sqrt{3})$

باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2+4\sqrt{3}) = 3\sqrt{5} \times 2 + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5 \times 3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3^2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{15} - 2\sqrt{3} - 12$ بالتبسيطِ

4 $2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y}$

$2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y} = 2 \times 5 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 4x^5y}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 10 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 2^2 \times x^5y}$ بتحليلِ الثوابتِ

$= 10 \times \sqrt[3]{2^3 \times x^6 \times x \times y^3}$ بتجميعِ العواملِ في صورةِ أُسسٍ تكعيبيةٍ

$= 10 \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{x^6} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y^3}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 10 \times 2 \times x^2 \times \sqrt[3]{x} \times y$ بالتبسيطِ

$= 20x^2y\sqrt[3]{x}$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$

b) $\sqrt{50} \div \sqrt{8}$

c) $(5\sqrt{3} - 6)(5\sqrt{3} + 6)$

d) $4\sqrt[3]{50x^2y^5} \times 2\sqrt[3]{15x^3y^2}$

أتعلَّمُ

يُســمّى المقدارُ $a^2 - b^2$ فرقًا بينَ مُربَّعين.

يُســمّى كلٌّ منْ $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ **مُرافِقًا** (conjugate) للآخرِ؛ لأنَّ ناتجَ ضربِهِما لا يحوي جذورًا. فمثلاً، كلٌّ منْ $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ هوَ مُرافِقٌ للآخرِ؛ لأنَّ:

$$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = (3)^2 - (\sqrt{2})^2$$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= 9 - 2$$ $(3)^2 = 9, (\sqrt{2})^2 = 2$

$$= 7$$ بالتبسيطِ

يُستعمَلُ المُرافِقُ لإنطاقِ بعضِ المقاماتِ في المقاديرِ الجذريةِ، وذلكَ بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ، ثمَّ تبسيطِ الناتجِ.

مثال 5

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1) $\dfrac{2}{6+\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{6+\sqrt{3}} = \frac{2}{6+\sqrt{3}} \times \frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$ بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ

$$= \frac{2(6-\sqrt{3})}{6^2 - (\sqrt{3})^2}$$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{2(6-\sqrt{3})}{36 - 3}$$ $6^2 = 36, (\sqrt{3})^2 = 3$

$$= \frac{12 - 2\sqrt{3}}{33}$$ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ، والتبسيطِ

2) $\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$

$$\frac{x}{1-\sqrt{x}} = \frac{x}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$ بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ

$$= \frac{x(1+\sqrt{x})}{1^2 - (\sqrt{x})^2}$$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{x(1+\sqrt{x})}{1 - x}$$ $1^2 = 1, (\sqrt{x})^2 = x$

$$= \frac{x + x\sqrt{x}}{1 - x}$$ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ، والتبسيطِ

أتذكَّرُ

إذا كانَ المقدارُ الجذريُّ في أبسـطِ صـورةٍ، فإنَّهُ لا يتضمَّـنُ مقامًا يحوي جذورًا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\frac{7}{4-\sqrt{5}}$

b) $\frac{8}{3+\sqrt{x}}$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\sqrt{4x^6}$

2) $\sqrt[3]{a^3 b^6}$

3) $\sqrt{144x^3 y^4 z^5}\ , x>0, z>0$

4) $\sqrt[3]{-24x^{13} y^6}$

5) $\sqrt[4]{625u^5 v^8}, u>0$

6) $\sqrt[6]{25r^6 q^8}$

7) $\sqrt[5]{160x^8 z^4}$

8) $\sqrt{121(z-2)^{14}}$

9) $\sqrt[3]{37(2x-5)^{15}}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

10) $\frac{\sqrt[3]{192\,x^8}}{\sqrt[3]{3x}}$

11) $\frac{5}{\sqrt[3]{9a^2}}$

12) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9z}}$

13) $\sqrt{\frac{5x^4}{2x^2 y^3}}$

14) $\sqrt[4]{\frac{16t^4}{y^4}}$

15) $\sqrt[5]{\frac{3}{y}}$

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

16) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{2}$

17) $5\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

18) $\sqrt[3]{54xy^3}-y\sqrt[3]{128x}$

19) $\sqrt[4]{5w^{10}}-6\sqrt[4]{405w^6}$

20) $5\sqrt{2xy^6}\times 2\sqrt{2x^3 y}$

21) $(3+\sqrt{7})(2+\sqrt{6})$

22) $\sqrt[5]{8xy^7}\times\sqrt[5]{6x^6}$

23) $\frac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x^3}}{\sqrt{9x^{10}}}$

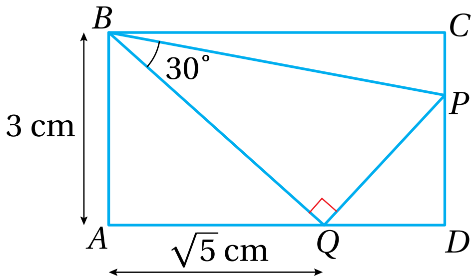
24) $\frac{\sqrt[3]{y^6}}{\sqrt[3]{27y}\times\sqrt[3]{y^{11}}}$

25) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

26) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$

27) $\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$

28 يظهرُ المستطيلُ $ABCD$ في الشكلِ المُجاوِرِ. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ طولِ $\overline{PQ}$ في أبسطِ صورةٍ.



29 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

30 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ مختلفٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sqrt[5]{7yx^8}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{xy}}{y^3}$

$\sqrt{5yx}$ $\quad$ $\sqrt[4]{xy^3}$

31 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{64h^{12}g^6} &= \sqrt[6]{2^6 \times (h^2)^6 \times g^6}\\ &= \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{(h^2)^6} \times \sqrt[6]{g^6}\\ &= 2h^2 g\end{aligned}$$

✗

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مقدارًا جذريًّا مُكافِئًا للمقدارِ $8|x|\,y^2$

33 **تحدٍّ:** أجدُ قيمةَ: $\dfrac{3}{2\sqrt{7}-1} - \dfrac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ في أبسطِ صورةٍ.

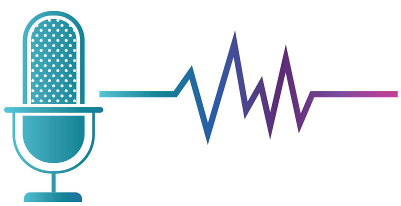
الدرس 3

حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ
Solving Radical Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تحوي مقاديرَ جذريةً.

المصطلحاتُ المعادلاتُ الجذريةُ، الحلولُ الدخيلةُ.

مسألةُ اليومِ تعطى سرعةُ الصوتِ بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ قربَ سطحِ الأرضِ بالمعادلةِ الآتيةِ: $V = 20\sqrt{t + 273}$، حيثُ t درجةُ الحرارةِ بالسلسيوس. إذا كانَتْ سرعةُ الصوتِ هيَ $340\ \text{m/s}$، فما درجةُ الحرارةِ عندئذٍ؟



المعادلاتُ الجذريةُ

يُطلَقُ على المعادلاتِ التي تحوي مُتغيِّرًا تحتَ الجذرِ اسمُ **المعادلاتِ الجذريةِ** (radical equations)، ومنْ أمثلتِها:

$$\sqrt[3]{x + 4} = -8 \quad , \quad 2x + 3 = \sqrt{1 - 7x} \quad , \quad 5\sqrt{x + 1} = 3$$

توجدُ أربعُ خطواتٍ يتعيَّنُ اتِّباعُها لحَلِّ المعادلاتِ الجذريةِ.

أتعلَّمُ

تنتجُ معادلةٌ أُخرى (خطيةٌ، أوْ تربيعيةٌ مثلًا) منْ رفعِ طرفي المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ، ويُمكِنُ حَلُّ هذهِ المعادلةِ باستعمالِ طرائقِ حَلِّ المعادلاتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

مفهومٌ أساسيٌّ — **خطواتُ حَلِّ المعادلاتِ الجذريةِ**

يُمكِنُ حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

الخطوةُ 1: جعلُ الجذرِ وحدَهُ أحدَ طرفي المعادلةِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

الخطوةُ 2: رفعُ طرفي المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ؛ تخلُّصًا منَ الجذرِ.

الخطوةُ 3: حَلُّ المعادلةِ الناتجةِ.

الخطوةُ 4: التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ.

مثال 1

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1 $\sqrt{x}+4=12$

$\sqrt{x}+4=12$ المعادلةُ الأصليةُ

$\sqrt{x}=8$ بطرحِ 4 منْ طرفي المعادلةِ

$x=64$ بتربيعِ طرفي المعادلةِ

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

$\sqrt{x}+4=12$ المعادلةُ الأصليةُ

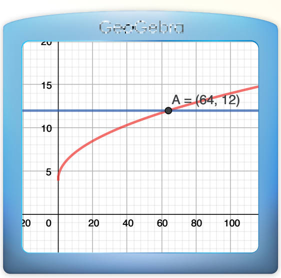
$\sqrt{64}+4\stackrel{?}{=}12$ بتعويضِ $x=64$

$12=12$ ✓ بالتبسيطِ

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=64$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلـةِ: $y=\sqrt{x}+4$، والمعادلـةِ: $y=12$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=64$.



2 $2\sqrt{3x+4}=8$

$2\sqrt{3x+4}=8$ المعادلةُ الأصليةُ

$\sqrt{3x+4}=4$ بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 2

$3x+4=16$ بتربيعِ طرفي المعادلةِ

$3x=12$ بطرحِ 4 منْ طرفي المعادلةِ

$x=4$ بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 3

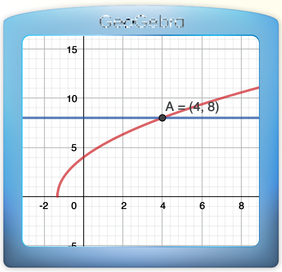
أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$2\sqrt{3x+4} = 8$
بتعويضِ $x = 4$	$2\sqrt{3(4)+4} \stackrel{?}{=} 8$
بالتبسيطِ	$8 = 8$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 4$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ مـنَ المعادلةِ: $y = 2\sqrt{3x+4}$، والمعادلةِ: $y = 8$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = 4$.



3 $\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$

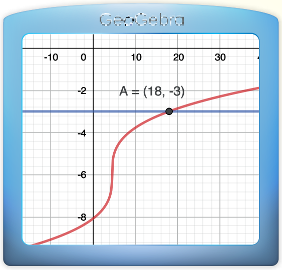
المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$
بجمعِ 6 إلى طرفيِ المعادلةِ	$\sqrt[3]{2x-9} = 3$
بتكعيبِ طرفيِ المعادلةِ	$2x - 9 = 27$
بجمعِ 9 إلى طرفيِ المعادلةِ	$2x = 36$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2	$x = 18$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$
بتعويضِ $x = 18$	$\sqrt[3]{2(18)-9} - 6 \stackrel{?}{=} -3$
بالتبسيطِ	$-3 = -3$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 18$.

الدعمُ البيانيُّ:



أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \sqrt[3]{2x-9} - 6$، والمعادلةِ: $y = -3$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = 18$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

a) $2 + \sqrt{x} = 8$ **b)** $4\sqrt{7x + 1} - 2 = 14$ **c)** $2\sqrt[4]{x-3} = 4$

الحَلُّ الدخيلُ

يَنتجُ أحيانًا منْ رفعِ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ ما حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ، ويُسمّى **الحَلَّ الدخيلَ** (extraneous solution)؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الجذريةِ الأصليةِ.

يظهرُ الحَلُّ الدخيلُ غالبًا عندَ حَلِّ معادلةٍ تحوي مُتغيِّرًا في كلا طرفيها.

مثال 2

أحُلُّ المعادلةَ: $x - 4 = \sqrt{3x - 2}$.

المعادلةُ الأصليةُ	$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$(x - 4)^2 = 3x - 2$
مُربَّعُ الفرقِ بينَ حدَّيْنِ	$x^2 - 8x + 16 = 3x - 2$
بطرحِ $3x$ منْ طرفيِ المعادلةِ، وجمعِ 2 إلى طرفيْها	$x^2 - 11x + 18 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x - 9)(x - 2) = 0$

أتذكَّرُ

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ $x-9=0$ or $x-2=0$

بحَلِّ كلِّ معادلةٍ $x=9$ $x=2$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 9$

$$x-4=\sqrt{3x-2}$$

$$(9)-4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(9)-2}$$

$$5=5 \quad ✓$$

عندما $x = 2$

$$x-4=\sqrt{3x-2}$$

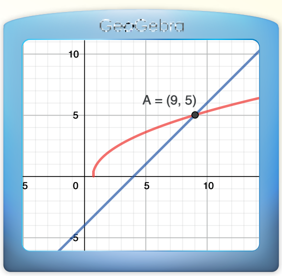
$$(2)-4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(2)-2}$$

$$-2=2 \quad ✗$$

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 9$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ مـنَ المعادلـةِ: $y = x - 4$، والمعادلةِ: $y=\sqrt{3x-2}$ بيانيًّـا، وملاحظةِ أنَّ منحنيـي المعادلتينِ يتقاطعـانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ عندما $x = 9$.



أتعلَّمُ

منْ أسـبابِ وجـودِ حَلٍّ دخيـلٍ فـي أثنـاءِ حَلِّ المعادلـةِ الجذريـةِ رفعُ الطرفينِ إلى أُسٍّ زوجيٍّ؛ لأنَّ القِيَمَ السـالبةَ تلغى إشـارتُها عندئذٍ، ما يُؤثِّرُ في الحَلِّ الأصليِّ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ المعادلةَ: $x=\sqrt{x+6}$.

تعلَّمْتُ في المثالِ السـابقِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يظهرُ غالبًا عندَ حَـلِّ معادلاتٍ تحوي مُتغيِّرًا في طرفيْ كلٍّ منْها. والآنَ سـأتعلَّمُ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يُمكِنُ أنْ يظهرَ أيضًا عندَ حَلِّ معادلةٍ تحوي جذرًا في كلا طرفيْها.

مثال 3

أحُلُّ المعادلةَ: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$.

المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$3x+1 = 5x - 2\sqrt{5x} + 1$
بالتبسيطِ	$2\sqrt{5x} = 2x$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2	$\sqrt{5x} = x$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$5x = x^2$
بطرحِ $5x$ منْ طرفيِ المعادلةِ	$x^2 - 5x = 0$
بإخراجِ العاملِ المشتركِ	$x(x-5) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 5 = 0$
بحَلِّ المعادلةِ	$x = 5$

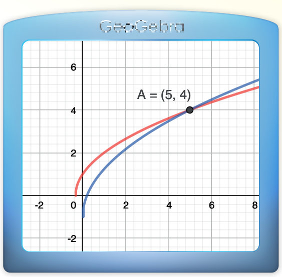
أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 5$	عندما $x = 0$
$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$	$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$
$\sqrt{3(5)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(5)} - 1$	$\sqrt{3(0)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(0)} - 1$
$4 = 4$ ✓	$1 = -1$ ✗

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 5$.

الدعمُ البيانيُّ:

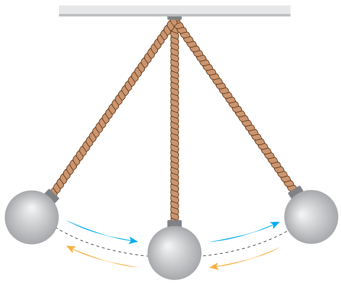
أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \sqrt{3x+1}$، والمعادلةِ: $y = \sqrt{5x} - 1$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ عندما $x = 5$.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ المعادلةَ: $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

مثال 4 : منَ الحياةِ



فيزياءُ: تُمثِّلُ المعادلـةُ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ الزمنَ (بالثواني) الذي يستغرقُهُ بندولٌ طولُهُ L قدمًا حتّى يتحرَّكَ حركةً تذبذبيَّةً مَرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا. أجدُ طولَ البندولِ إذا تحرَّكَ حركةً تذبذبيةً مَرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا في 4 ثوانٍ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ المعادلةُ الأصليةُ

$4 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ بتعويضِ $T = 4$

$\frac{4}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2π

$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$ بالتبسيطِ

$\frac{4}{\pi^2} = \frac{L}{32}$ بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ

$\frac{128}{\pi^2} = L$ بضربِ طرفيِ المعادلةِ في 32

$L \approx 13$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ L الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ المعادلةُ الأصليةُ

$4 \stackrel{?}{\approx} 2\pi\sqrt{\frac{13}{32}}$ بتعويضِ $T = 4, L \approx 13$

$4 \approx 4$ ✓ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ من فهمي

مُعتمِدًا المعادلةَ في المثالِ 4، أجدُ طولَ البندولِ إذا تحرَّكَ حركةً تذبذبيةً مرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا في 8 ثوانٍ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $\sqrt{3x} - 5 = 7$

2) $\sqrt[3]{1 - 2x} = -3$

3) $\sqrt[4]{4x + 1} = 2$

4) $6 - \sqrt{y - 5} = 3$

5) $\sqrt{2 - x} + 3 = x + 7$

6) $\sqrt{5x + 4} = 3\sqrt{x}$

7) $\sqrt{2p + 3} = \sqrt{5p - 3}$

8) $\sqrt{4x-1} - 4\sqrt{2-5x} = 0$

9) $\sqrt[3]{1 - 3x} + 5 = 3$

10) $12 - \sqrt{2v - 1} = 4$

11) $\sqrt{45 - 6n} = n - 3$

12) $\sqrt{4k - 4} = k - 1$

13) $\sqrt{x + 1} = 2 - \sqrt{x}$

14) $r + 6 = \sqrt{-4r - 19}$

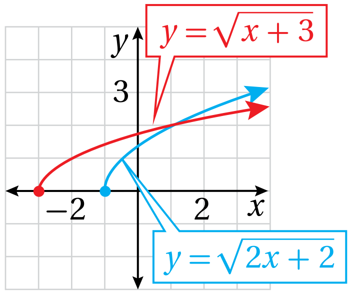
15) $\sqrt[3]{7y - 2} = \sqrt[3]{y + 4}$

16) $\sqrt{5m - 16} = m-2$

17) $\sqrt{9x^2 + 4x - 4} = 3x$

18) $\sqrt{x^2 + 5x} = \sqrt{6}$

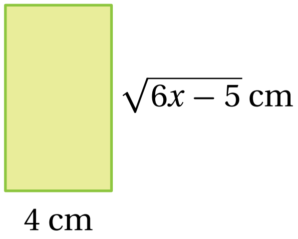
يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \sqrt{x + 3}$، والمعادلةِ: $y = \sqrt{2x + 2}$:

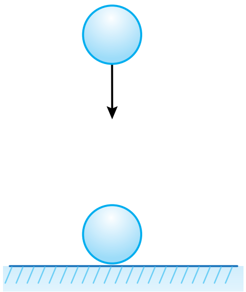


19) أكتبُ معادلةً حَلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيي المعادلتينِ.

20) أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في السؤالِ السابقِ جبريًّا.

21) إذا كانَ محيطُ المستطيلِ المُجاوِرِ هوَ 22 cm، فأجدُ قيمةَ x.





22 **فيزياءُ:** تعطى سرعةُ الجسمِ الساقطِ سقوطًا حُرًّا منَ ارتفاعٍ قدرُهُ d قدمًا عندَ وصولِهِ سطحَ الأرضِ بالمعادلةِ الآتيةِ: $v = \sqrt{64\,d}$، حيثُ v سرعةُ الجسمِ بالقدمِ لكلِّ ثانيةٍ. أجدُ الارتفاعَ الذي سقطَ منْهُ الجسمُ إذا كانَتْ سرعتُهُ عندَ وصولِهِ سطحَ الأرضِ هيَ 150 ft/s.

23 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

24 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ مختلفةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sqrt{x-1} + 8 = 10$ | $\sqrt{x-1} + 3 = 5$ | $\sqrt{x+1} + 7 = 10$ | $\sqrt{x+1} + 5 = 2$

25 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّتْ بيانُ المعادلةَ: $x = \sqrt{12 - 4x}$ على النحوِ الآتي، قائلةً إنَّ للمعادلةِ حَلَّينِ اثنينِ، هما: $x = 2$، و $x = -6$:

$$x = \sqrt{12 - 4x}$$
$$x^2 = 12 - 4x$$
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$(x - 2)(x + 6) = 0$$
$$x = 2 \quad \text{or} \quad x = -6$$

أكتشفُ الخطأَ في قولِ بيانَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ معادلةً جذريةً حَلُّها هوَ $x = 6$.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ هيَ:

a) $\frac{2x^2}{3}$ b) $\frac{2x}{3}$

c) $\frac{1}{2x^2}$ d) $\frac{x}{2}$

2 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt[3]{-24a^5}$ هيَ:

a) $2a\sqrt[3]{3a^2}$ b) $2a^2\sqrt[3]{3a}$

c) $-2a\sqrt[3]{3a^2}$ d) $-2a^2\sqrt[3]{3a}$

3 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt[4]{\frac{16t^4}{y^8}}$ هيَ:

a) $\frac{2t}{y}$ b) $\frac{2|t|}{y}$

c) $\frac{2t}{y^2}$ d) $\frac{2|t|}{y^2}$

4 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt{20x^3}+\sqrt{45x^3}$ هيَ:

a) $5x\sqrt{5x^3}$ b) $5|x|\sqrt{5x}$

c) $5\sqrt{5x^3}$ d) $5\sqrt{5x}$

5 حَلُّ المعادلةِ: $\sqrt{3x-11}+2=9$ هوَ:

a) 44 b) 6

c) 20 d) 22

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

6 $\frac{p^{-3}}{P^{-2}q^{-9}}$

7 $(2x^{-2}y^3)^4$

8 $\left(\frac{4s^5t^{-7}}{-2s^{-2}t^4}\right)^3$

9 $(-2r^3s^2)^4(3rs^5)^{-2}$

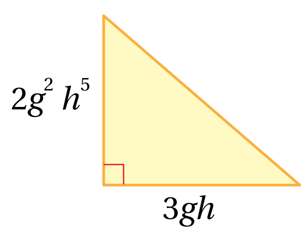
10 $\frac{x^4y^{-8}z^{-2}}{x^{-1}y^6z^{-10}}$

11 $\left(\frac{x^{-3}y}{xz^{-4}}\right)^{-2}$

12 $\left(\frac{m^4n^{-1}}{n^{-2}}\right)^0$

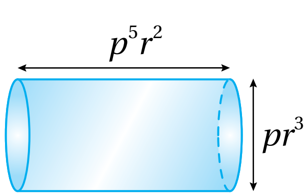
13 $\left(\frac{2a^3b^{-2}}{c^3}\right)^5$

14 أجدُ مساحةَ المُثلَّثِ المُجاوِرِ في أبسطِ صورةٍ.

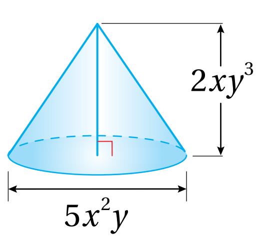


أجدُ حجمَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

15



16



أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

17 $\sqrt[3]{64y^6}$

18 $\sqrt[5]{4a^8 b^{14} c^5}$

19 $\dfrac{x}{\sqrt[3]{y^8}}$

20 $\sqrt[3]{\dfrac{3a}{4b^4c}}$

21 $\sqrt[4]{1024x^9 y^{12}}$

22 $\sqrt{45x^2 y^5 z^8}$

23 $\sqrt[4]{16(y+x)^4}$

24 $3\sqrt[4]{x^4 y^8}$

25 $\sqrt[3]{125r^4 s^9 t^7}$

26 $\sqrt[3]{\dfrac{250f^7 g^3}{2f^2 g}}$

27 $\dfrac{\sqrt[5]{64x^6}}{\sqrt[5]{2x}}$

28 $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{4}$

29 $\sqrt{x^5 y^5} \times 3\sqrt{2x^7 y^6}$

30 $4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{24}$

31 $(3\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + 5\sqrt{5})$

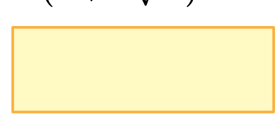
32 $\sqrt[4]{3x^3 y^2} \times \sqrt[4]{27xy^2}$

33 $\dfrac{4-\sqrt{8}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$

34 $\dfrac{4-\sqrt{x^3}}{2+2\sqrt{x}}$

35 أجدُ محيطَ المستطيلِ الآتي في أبسطِ صورةٍ.

$(3+6\sqrt{2})$ cm



$\sqrt{8}$ cm

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

36 $\sqrt{b-5} = 2$

37 $17 = 7 + \sqrt{5x}$

38 $\sqrt{3n+25} = \sqrt{-7-n}$

39 $\sqrt{21} - \sqrt{5x-4} = 0$

40 $4\sqrt[3]{2x+11} - 2 = 10$

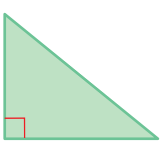
41 $\sqrt[4]{3-x} = 3$

42 $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-2} = 1$

43 $\sqrt{2x-7} = \sqrt{3x-12}$

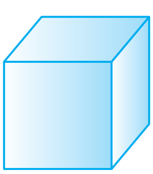
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

44 إذا كانَتْ مساحةُ المُثلَّثِ المُجاورِ هـيَ $(4+\sqrt{2})$ cm^2، فأجـدُ ارتفاعَهُ في أبسطِ صورةٍ.



$\sqrt{8}$ cm

45 إذا كانَتِ المساحةُ الكليةُ لسطحِ المُكعَّبِ المُجاوِرِ هيَ $6a^2$، فأجدُ حجمَهُ.



46 يُطلَقُ على الزمنِ الذي يظلُّ فيهِ الجسمُ في الهواءِ بعدَ القفزِ اسمُ زمنِ التحليقِ، وهوَ يعطى بالمعادلةِ الآتيةِ: $t = 0.5\sqrt{h}$، حيثُ t الزمنُ بالثواني، وh ارتفاعُ القفزةِ بالأقدامِ. إذا قفزَ لاعبُ كرةِ يدٍ، وكانَ زمنُ تحليقِهِ هوَ 0.72 منَ الثانيةِ تقريبًا، فأجدُ ارتفاعَ قفزةِ اللاعبِ.

الوحدةُ 7

المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ
Rational Algebraic Expressions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

إنَّ تبســيطَ المقاديرِ الجبريــةِ النســبيةِ، وتطبيقَ بعضِ العملياتِ الحســابيةِ عليْها، يساعدُ على حَلِّ معادلاتٍ أكثرَ تعقيدًا منْ تلكَ التي تعلَّمْتُها سابقًا، علمًا بأنَّ لهذهِ المقاديرِ اســتعمالاتٍ حياتيةً وعلميةً في كثيرٍ مــنَ المناحي، لا سيَّما الحساباتِ التي تحوي نسبًا وتناسباتٍ، مثلَ: مــزجِ الألوانِ، والصناعــاتِ الكيميائيةِ الدقيقةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمييزَ الحدودِ والمقاديرِ الجبريةِ.
- ✓ تحليلَ المقاديرِ الجبريةِ إلى العواملِ.
- ✓ تبسيطَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ✓ حَلَّ التناسباتِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تبسيطَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ◄ ضربَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتَها.
- ◄ جمعَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحَها.
- ◄ حَلَّ المعادلاتِ النسبيةِ.

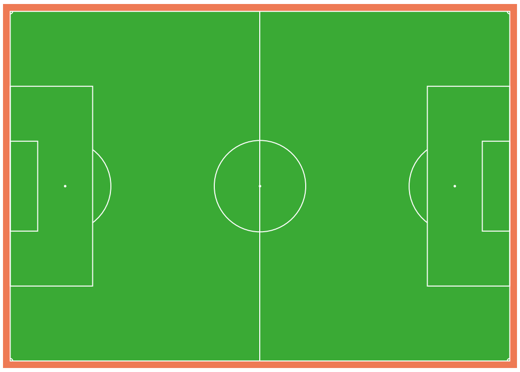
مشروعُ الوحدةِ

ملعبُ كرةِ القدمِ

فكرةُ المشروعِ توظيفُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ في تصميمِ ملعبِ كرةِ قدمٍ.

الموادُّ والأدواتُ قطعةٌ كبيرةٌ منَ الكرتونِ، أدواتٌ هندسيةٌ، ألوانٌ، مِقَصٌّ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أُصمِّمُ على قطعةِ الكرتونِ نموذجًا لملعبِ كرةِ قدمٍ يحيطُ بِهِ مِضْمارٌ كما في الشكلِ المُجاوِرِ.
2. أُعبِّرُ عنْ طولِ الملعبِ معَ المِضْمارِ بمقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ يحوي مُتغيِّرًا واحدًا فقطْ، ثمَّ أُعبِّرُ عنْ عرضِ الملعبِ والمِضْمارِ بمقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ آخرَ يحوي المُتغيِّرَ نفسَهُ.
3. أجدُ مساحةَ الملعبِ معَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ التي تحويها المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
4. أجدُ مساحةَ الملعبِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
5. أجدُ مساحةَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
6. أجدُ محيطَ الملعبِ معَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
7. أجدُ محيطَ الملعبِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
8. أجدُ الفرقَ بينَ محيطِ الملعبِ معَ المضمارِ ومحيطِ الملعبِ.
9. أفترضُ مساحةً للملعبِ الذي أنشأْتُهُ، ثمَّ أجدُ قيمةَ المُتغيِّرِ بحَلِّ المعادلةِ النسبيةِ الناتجةِ.
10. أُعِدُّ مطويةً أُدرِجُ فيها الأبعادَ الأولمبيةَ لملعبِ كرةِ القدمِ، وتاريخَ اللعبةِ، وأهميتَها في تقاربِ ثقافاتِ الشعوبِ.

عرضُ النتائجِ:

- أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمَّنُ صورًا تُوضِّحُ خطواتِ العملِ في المشروعِ، وعلاقتَهُ بما تعلَّمْتُهُ في الوحدةِ.
- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ الصفِّ، مُوضِّحًا العملياتِ الحسابيةَ التي اعتمدْتُها في تصميمِ ملعبِ كرةِ القدمِ.

الدرس 1

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتُها

Multiplying and Dividing Rational Algebraic Expressions

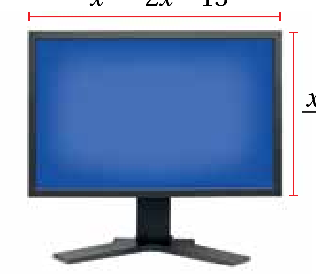
فكرةُ الدرس

- تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتُها.

المصطلحاتُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ، الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ شاشةَ حاسوبٍ على شكلِ مستطيلٍ، طولُها $\frac{x^2}{x^2-2x-15}$ وحدةً، وعرضُها $\frac{x-5}{x}$ وحدةً.

أجدُ مساحةَ الشاشةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ (rational algebraic expression) هوَ مقدارٌ جبريٌّ يُمكِنُ كتابتُهُ في صورةِ كسرٍ بسطُهُ ومقامُهُ مقدارانِ جبريانِ، ومنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{r^3+1}{r-4}\quad,\quad \frac{2y+1}{y^2-3y+2}\quad,\quad \frac{6}{x}$$

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العددُ 1 هوَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لكلٍّ منْ بسطِهِ ومقامِهِ. بوجهٍ عامٍّ، يبدأُ تبسيطُ المقدارِ الجبريِّ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ، ثمَّ قسمةِ كلٍّ منْهُما على العواملِ المشتركةِ بينَهُما.

$$\frac{2x+6}{x^2-9}=\frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}=\frac{2}{x-3}$$

بقسمةِ البسطِ والمقامِ على العاملِ المشتركِ الأكبرِ للبسطِ والمقامِ، وهوَ $(x+3)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى العاملِ المشتركِ الأكبرِ بالرمزِ (ع. م. أ)، أوِ الرمزِ (GCF)؛ وهوَ اختصارٌ لجملةِ (greatest common factor).

أتعلَّمُ

بما أنَّ القسمةَ على صفرٍ غيرُ مُعرَّفةٍ، فإنَّنا سنفترضُ في هذهِ الوحدةِ أنَّ جميعَ القِيَمِ التي تجعلُ المقاماتِ صفرًا مُستثناةٌ.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\dfrac{2x-10}{2x^2-11x+5}$

$\dfrac{2x-10}{2x^2-11x+5} = \dfrac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \dfrac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-5)$

$= \dfrac{2}{2x-1}$ بالتبسيطِ

2 $\dfrac{x^3-2x^2+9x-18}{6x^3-24x^2+24x}$

$\dfrac{x^3-2x^2+9x-18}{6x^3-24x^2+24x} = \dfrac{(x^3-2x^2)+(9x-18)}{6x(x^2-4x+4)}$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ في البسطِ، وإخراجِ العاملِ المشتركِ في المقامِ

$= \dfrac{x^2(x-2)+9(x-2)}{6x(x^2-4x+4)}$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ منْ كلِّ تجميعٍ في البسطِ

$= \dfrac{(x^2+9)(x-2)}{6x(x-2)(x-2)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \dfrac{(x^2+9)\cancel{(x-2)}}{6x(x-2)\cancel{(x-2)}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-2)$

$= \dfrac{x^2+9}{6x(x-2)}$ بالتبسيطِ

3 $\dfrac{1-u^2}{u^2+4u-5}$

$\dfrac{1-u^2}{u^2+4u-5} = \dfrac{(1-u)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \dfrac{-(u-1)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$ $1-u=-(u-1)$

$= \dfrac{-\cancel{(u-1)}(1+u)}{\cancel{(u-1)}(u+5)}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(u-1)$

$= \dfrac{-(u+1)}{u+5}$ بالتبسيطِ

أتذكَّرُ

يُمكِنُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ التي تحوي أربعةَ حدودٍ أوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميعِ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ إخراجُ (-1) عاملًا مشتركًا منَ البسطِ أوِ المقامِ لتسهيلِ اختصارِ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{6x-18}{x^4-81}$ b) $\frac{x^3+8}{x^2+6x+8}$ c) $\frac{3x-3x^2}{x^2+4x-5}$

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النســبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ ضربِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ البســطِ في البسطِ وضربِ المقامِ في المقامِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ: ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

بالكلماتِ: لضربِ مقدارينِ جبريينِ نســبيينِ، يُضرَبُ البســطُ في البسطِ، ثمَّ يُضرَبُ المقامُ في المقامِ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

مثالٌ: $\frac{3x}{y} \times \frac{2x}{(y+2)} = \frac{6x^2}{y^2+2y}$

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\frac{12\,ac}{15\,b} \times \frac{5\,ab^2}{6\,c^2}$

$$\frac{12\,ac}{15b} \times \frac{5\,ab^2}{6c^2} = \frac{2\times6\times a\times c}{3\times5\times b} \times \frac{5\times a\times b\times b}{6\times c\times c}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$= \frac{2\times\cancel{6}\times a\times\cancel{c}}{3\times\cancel{5}\times\cancel{b}} \times \frac{\cancel{5}\times a\times\cancel{b}\times b}{\cancel{6}\times\cancel{c}\times c}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$= \frac{2a^2\,b}{3c}$$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أتحقَّقُ منَ اختصارِ جميعِ العواملِ المشـتركةِ بينَ البسطِ والمقامِ قبلَ إجراءِ عمليةِ الضربِ؛ تسـهيلًا للحساباتِ.

2 $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+9} \times \dfrac{x+3}{x^2-6x+8}$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+6x+9} \times \frac{x+3}{x^2-6x+8} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+3)} \times \frac{x+3}{(x-2)(x-4)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$= \frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+3)}} \times \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$= \frac{1}{x-4}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

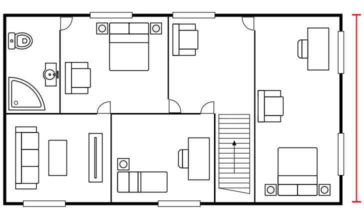
أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\dfrac{8x}{5y^2} \times \dfrac{20xy}{6b}$

b) $\dfrac{d^2-36}{d^2+5d-6} \times \dfrac{d-1}{d^2-7d+6}$

مثال 3 : منَ الحياةِ

هندسةٌ معماريةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُخطَّطًا لأحدِ المنازلِ على شكلِ مستطيلٍ. أجدُ مساحةَ المنزلِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



$\dfrac{x^2-x-6}{4x^3}$

$\dfrac{2x^2+2x}{x^2+5x+6}$

$$A = l \times w$$ صيغةُ مساحةِ المستطيلِ الذي طولُهُ l وعرضُهُ w

$$= \frac{2x^2+2x}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2-x-6}{4x^3}$$ بتعويضِ $l = \frac{2x^2+2x}{x^2+5x+6}$, $w = \frac{x^2-x-6}{4x^3}$

$$= \frac{2x\,(x+1)}{(x+2)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+2)}{2x \times 2x^2}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$= \frac{\cancel{2x}\,(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} \times \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{2x} \times 2x^2}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

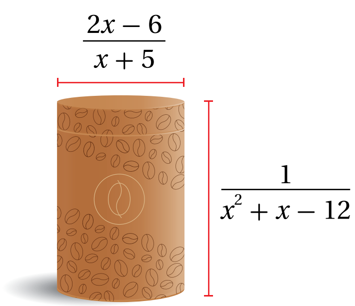
$$= \frac{(x+1)(x-3)}{2x^2\,(x+3)}$$ بالتبسيطِ

إذنْ، مساحةُ المنزلِ هيَ $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x^2\,(x+3)}$ وحدةً مُربَّعةً.

أتحقَّقُ منْ فهمي

قهوةٌ: تضعُ إحدى الشركاتِ مُنتَجَها منَ القهوةِ في علبٍ، أبعادُها تعطى بدلالةِ x كما في الشكلِ المُجاوِرِ.

أجدُ حجمَ علبةِ القهوةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



أتذكَّرُ

إذا كانَ ناتجُ ضربِ عددينِ هوَ 1، فإنَّ كُلًّا منْهُما يُسمّى نظيرًا ضربيًّا للآخرِ، أوْ مقلوبًا للآخرِ.

قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ قسمةِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

بالكلماتِ: لقسمةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ على آخرَ، يُضرَبُ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

مثالٌ:

$$\frac{4x}{y} \div \frac{5}{y+1} = \frac{4x}{y} \times \frac{y+1}{5} = \frac{4x(y+1)}{5y}$$

أُفكِّرُ

لماذا لا يُشترَطُ أنْ يكونَ $a \neq 0$؟

مثال 4

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2}$

$$\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2} = \frac{24x^2y}{5c^2d} \times \frac{10c^2d^2}{16xy^3}$$

بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$= \frac{3\times8\times x\times x\times y}{5\times c^2\times d} \times \frac{5\times2\times c^2\times d\times d}{2\times8\times x\times y\times y^2}$$

بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العوامِلِ المشتركةِ
$$= \frac{3\times\cancel{8}\times\cancel{x}\times x\times\cancel{y}}{\cancel{5}\times\cancel{c^2}\times\cancel{d}} \times \frac{\cancel{5}\times\cancel{2}\times\cancel{c^2}\times\cancel{d}\times d}{\cancel{2}\times\cancel{8}\times\cancel{x}\times\cancel{y}\times y^2}$$

بالتبسيطِ
$$= \frac{3xd}{y^2}$$

2 $\dfrac{x^2-36}{y^2+3y-4} \div \dfrac{x^2-9x+18}{8y+32}$

بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ
$$\frac{x^2-36}{y^2+3y-4} \div \frac{x^2-9x+18}{8y+32} = \frac{x^2-36}{y^2+3y-4} \times \frac{8y+32}{x^2-9x+18}$$

بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العوامِلِ
$$= \frac{(x-6)(x+6)}{(y+4)(y-1)} \times \frac{8(y+4)}{(x-3)(x-6)}$$

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العوامِلِ المشتركةِ
$$= \frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{(y+4)}(y-1)} \times \frac{8\cancel{(y+4)}}{(x-3)\cancel{(x-6)}}$$

بالتبسيطِ
$$= \frac{8(x+6)}{(y-1)(x-3)}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\dfrac{24b^3}{14x^2y^2} \div \dfrac{16\,bc^2}{21x^4y^3}$

b) $\dfrac{x^2-9x+20}{y^2+10y+21} \div \dfrac{2x^2-9x+4}{4y+28}$

الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ

الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ (complex algebraic fraction) هوَ كسرٌ يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ، ومنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{\frac{2}{d}+8}{\frac{10}{d}+8}, \quad \frac{\frac{y+1}{y-8}}{\frac{y-7}{5}}, \quad \frac{a-6}{\frac{4}{a}}, \quad \frac{\frac{x}{4}}{y}$$

توجدُ أربعُ خطواتٍ يتعيَّنُ اتِّباعُها لتبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

خطواتُ تبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ

يُمكِنُ تبسيطُ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

الخطوةُ 1: كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ في صورةِ كسرٍ واحدٍ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

الخطوةُ 2: كتابةُ الكسرِ الجبريِّ المُركَّبِ الناتجِ منَ الخطوةِ 1 في صورةِ قسمةِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ.

الخطوةُ 3: ضربُ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

الخطوةُ 4: قسمةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ، والتبسيطُ.

مثال 5

أكتبُ $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-25}}{\dfrac{b-a}{a+5}}$ في أبسطِ صورةٍ.

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2-25}}{\frac{b-a}{a+5}} = \frac{a^2-b^2}{a^2-25} \div \frac{b-a}{a+5}$$ بكتابةِ الكسرِ الجبريِّ المُركَّبِ في صورةِ قسمةِ مقدارينِ نسبيينِ

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2-25} \times \frac{a+5}{b-a}$$ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$= \frac{-\cancel{(b-a)}(a+b)}{(a-5)\cancel{(a+5)}} \times \frac{\cancel{a+5}}{\cancel{b-a}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$= -\frac{(a+b)}{(a-5)}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{y^2-36}}{\dfrac{x-y}{2y+12}}$ في أبسطِ صورةٍ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\frac{6x(x+3)}{9x^2}$

2 $\frac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$

3 $\frac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$

4 $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

5 $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

6 $\frac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7 $\frac{3x^2y}{14c^2d} \times \frac{28cd}{12x^3y^2}$

8 $\frac{2d+2}{d^2+8d+16} \times \frac{d^2+d-12}{d+1}$

9 $\frac{x^2-16}{3x^3} \times \frac{x^2}{x^2+x-12}$

10 $\frac{x^2-3x}{x-2} \times \frac{x^2+x-6}{x}$

11 $\frac{x^2-4x}{x-1} \times \frac{x^2+3x-4}{2x}$

12 $\frac{b^2+12b+11}{b^2-9} \times \frac{b^3+27}{b^2+20b+99}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

13 $\frac{21x^3y^2}{12ab^2} \div \frac{3x^2y^2}{24a^3}$

14 $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$

15 $\frac{p}{p-4} \div \frac{p^2}{p^2-5p+4}$

16 $\frac{g^2-4g-21}{4g^2+12g} \div (g-7)$

17 $\frac{x^2-25}{2x-2} \div \frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$

18 $\frac{x+2}{3x+12} \div \frac{x+2}{x^2-16}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

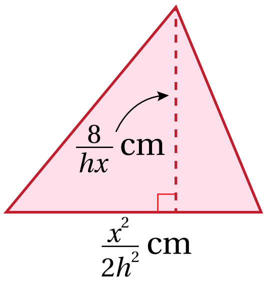
19 $\dfrac{\frac{x^3y^3}{cd^4}}{\frac{x^2y}{c^2d}}$

20 $\dfrac{\frac{4a-8}{a^2-9}}{\frac{a^2-a-2}{a^2+7a+12}}$

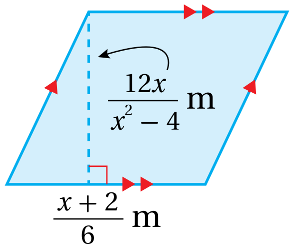
21 $\dfrac{\frac{8x^2-10x-3}{10x^2+35x-20}}{\frac{2x^2+x-6}{4x^2+18x+8}}$

أجدُ مساحةَ كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ:

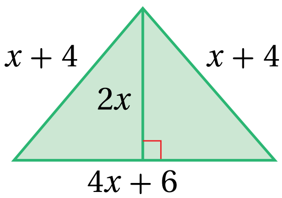
22



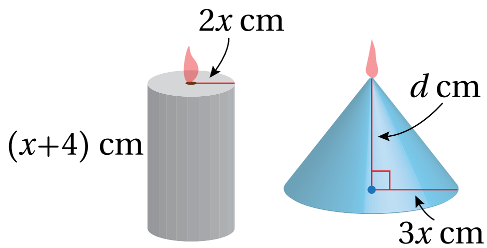
23



24 أكتبُ النسـبةَ بينَ محيطِ الشكلِ المُجاوِرِ ومسـاحتِهِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ.



25 **شـموعٌ:** في الشـكلِ المُجاوِرِ شـمعتانِ لهُما الحجمُ نفسُـهُ، وإحداهُما أسـطوانيةٌ، والأُخرى مخروطيةٌ. أكتبُ مقدارًا نسبيًّا يُمثِّلُ ارتفاعَ الشمعةِ المخروطيةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



26 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مقدارًا نسبيًّا أبسطُ صورةٍ لهُ هيَ: $\frac{1}{2x+1}$.

28 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المقاديرِ النسبيةِ الآتيةِ مختلفٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\frac{x^2-x+1}{x^2+4x}$ $\qquad$ $\frac{x+8}{4x^2}$ $\qquad$ $\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x}$ $\qquad$ $\frac{x-2}{x^2}$

29 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$= \frac{x+2}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$= \frac{\cancel{x}+2}{\cancel{x-2}} \times \frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)}(\cancel{x}-1)}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

30 **تحدٍّ:** هلْ يُعَدُّ المقدارُ $x-2y$ مُكافِئًا للمقدارِ $\frac{1}{\frac{x^2-4y^2}{x+2y}}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الدرس 2

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

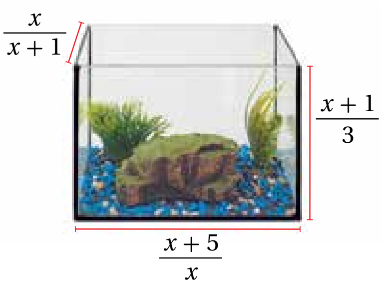
Adding and Subtracting Rational Algebraic Expressions

فكرةُ الدرسِ

- إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاديرِ الجبريةِ.
- جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها.

مسألةُ اليومِ

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ حوضَ أسماكٍ مفتوحًا منَ الأعلى على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، أبعادُهُ مُبيَّنةٌ كما في الشكلِ. أجدُ مساحةَ سطحِ زجاجِ الحوضِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ للمقاديرِ الجبريةِ

تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لعددينِ. والآنَ سأتعلَّمُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ كيفَ أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ لحدَّينِ، وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منْهُما تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةِ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ، عندئذٍ يكونُ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقدارينِ جبريينِ، وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منهُما إلى العواملِ، عندئذٍ يكونُ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ بالرمزِ (م. م. أ)، أوْ بالرمزِ (LCM)؛ وهوَ اختصارٌ لـِ (least common multiple).

مثال 1

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $6ab, 8a^3, 12ab^5$

الخطوةُ 1: تحليلُ الحدودِ الجبريةِ تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةُ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ.

$$6ab = 2 \times 3 \times a \times b$$
$$8a^3 = 2^3 \times a^3$$
$$12ab^5 = 2^2 \times 3 \times a \times b^5$$

بتحليلِ الحدودِ الجبريةِ تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةِ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ.

أتذكَّرُ

تحليلُ الحدِّ الجبريِّ تحليلًا كاملًا يعني أنَّهُ يُكتَبُ في صورةِ حاصلِ ضربِ أعدادٍ أوَّليةٍ ومُتغيِّراتٍ، كلٌّ منْها مرفوعٌ إلى الأُسِّ 1.

الخطوةُ 2: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ.

بضربِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ $LCM = 2^3 \times 3 \times a^3 \times b^5$

بالتبسيطِ $= 24a^3 b^5$

2 $x^4 - 7x^3 + 12x^2 , x^2 - 2x - 3$

الخطوةُ 1: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ إلى عواملِها.

بتحليلِ المقاديرِ الجبرية إلى عواملِها

$$x^4 - 7x^3 + 12x^2 = x^2 (x-3)(x-4)$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

الخطوةُ 2: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ.

بضربِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ $LCM = x^2 (x-3)(x-4)(x+1)$

أتذكَّرُ

تحليلُ المقـدارِ الجبريِّ يعني أنَّهُ يُكتَبُ في صورة حاصلِ ضربِ عواملِه.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $6b^2, 12\,ab, 18ab^4$

b) $3b^2 - 15b - 18, b^3 - 7b^2 + 6b$

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

يُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ تمامًا لطريقةِ جمعِ الكسورِ وطرحِها. فعندَ الجمعِ أوِ الطرحِ لمقدارينِ جبريينِ نسبيينِ متساويينِ في المقامِ، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ، ويبقى المقامُ المشتركُ، ثمَّ يُبسَّطُ الناتجُ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

مفهومٌ أساسيٌّ — **جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها**

بالكلماتِ: لجمعِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ لهُما المقامُ نفسُهُ أوْ طرحِهما، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ، ويبقى المقامُ نفسُهُ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $c \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad , \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

مثالٌ: $$\frac{3x}{y+2} + \frac{x}{y+2} = \frac{3x+x}{y+2} = \frac{4x}{y+2}$$

يُمكِنُ أيضًا الجمعُ أوِ الطرحُ لمقدارينِ جبريينِ نسبيينِ غيرِ متساويينِ في المقامِ، وذلكَ بتوحيدِ المقامينِ أوّلًا عنْ طريقِ إيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقامينِ، ثمَّ ضربِ البسطِ والمقامِ لكلِّ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في العواملِ اللازمةِ لجعلِ المقامِ مساويًا للمضاعفِ المشتركِ الأصغرِ، ثمَّ تبسيطِ الناتجِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\dfrac{y}{x(y-1)} - \dfrac{1}{x(y-1)}$

$$\frac{y}{x(y-1)} - \frac{1}{x(y-1)} = \frac{y-1}{x(y-1)}$$ بجمعِ البسطينِ

$$= \frac{\cancel{y-1}}{x(\cancel{y-1})} = \frac{1}{x}$$ بالتبسيطِ

2 $\dfrac{2x}{3y^3} + \dfrac{5b}{6x^2y}$

$$\frac{2x}{3y^3} + \frac{5b}{6x^2y} = \frac{2x}{3y^3} \times \frac{2x^2}{2x^2} + \frac{5b}{6x^2y} \times \frac{y^2}{y^2}$$ بتوحيدِ المقامينِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لهُما، وهوَ: $6x^2y^3$

$$= \frac{4x^3}{6x^2y^3} + \frac{5by^2}{6x^2y^3}$$ بالضربِ

$$= \frac{4x^3 + 5by^2}{6x^2y^3}$$ بجمعِ البسطينِ

3 $\dfrac{3x-2}{x^2+4x-12} - \dfrac{5}{2x+12}$

$$\frac{3x-2}{x^2+4x-12} - \frac{5}{2x+12} = \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} - \frac{5}{2(x+6)}$$ بتحليلِ المقامينِ إلى عواملِهما

$$= \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} \times \frac{2}{2} - \frac{5}{2(x+6)} \times \frac{x-2}{x-2}$$ بتوحيدِ المقاماتِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لها، وهوَ: $2(x+6)(x-2)$

$$= \frac{6x-4-5x+10}{2(x+6)(x-2)}$$ بطرحِ البسطينِ

$$= \frac{x+6}{2(x+6)(x-2)}$$ بالتبسيطِ

$$= \frac{\cancel{x+6}}{2(\cancel{x+6})(x-2)}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x+6)$

$$= \frac{1}{2(x-2)}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{2x}{x^2(2x+5)} + \frac{5}{x^2(5+2x)}$

b) $\frac{5y}{6b^2a} + \frac{3b^2}{8a^2}$

c) $\frac{5}{8x+8} - \frac{x-4}{12x^2+4x-8}$

أتذكَّرُ

لكتابةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ، أَقسِمُ البسطَ والمقامَ على العواملِ المشتركةِ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

بيئةٌ: صمَّمَتْ ميساءُ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأهميةِ إعادةِ التدويرِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ المُجاورِ. ترغبُ ميساءُ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ y في أبسطِ صورةٍ.

$\frac{y}{y+5}$ cm

$\frac{9}{y-4}$ cm

لإيجادِ طولِ الإطارِ، أجدُ محيطَ المُلصَقِ:

$$P = 2l + 2w$$ صيغةُ محيطِ المستطيلِ

$$= 2\left(\frac{9}{y-4}\right) + 2\left(\frac{y}{y+5}\right)$$ بتعويضِ $l = \frac{9}{y-4}$, $w = \frac{y}{y+5}$

$$= \frac{18}{y-4} + \frac{2y}{y+5}$$ بالتبسيطِ

$$= \frac{18}{y-4} \times \frac{y+5}{y+5} + \frac{2y}{y+5} \times \frac{y-4}{y-4}$$ بتوحيدِ المقاماتِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لها، وهوَ: $(y+5)(y-4)$

$$= \frac{2y^2 - 8y + 18y + 90}{(y+5)(y-4)}$$ بجمعِ البسطينِ

$$= \frac{2y^2 + 10y + 90}{(y+5)(y-4)}$$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ الإطارِ اللازمُ لإحاطةِ المُلصَقِ بِهِ هوَ: $\frac{2y^2 + 10y + 90}{(y+5)(y-4)}$ cm .

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُني تحليلُ: $2y^2 + 10y + 90$؟

معلومةٌ

تحتفلُ مُنظَّمةُ الصحَّةِ العالميةِ في 31 أيّارَ منْ كلِّ عامٍ باليومِ العالميِّ للامتناعِ عنِ التدخينِ، وتحرصُ في هذا اليومِ على إبرازِ المخاطرِ الصحِّيةِ المُرتبِطةِ بالتدخينِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

صحَّةٌ: صَمَّمَ خالدٌ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأضرارِ التدخينِ في اليومِ العالميِّ للامتناعِ عنِ التدخينِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ المُجاوِرِ. يرغبُ خالدٌ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

$\frac{2x}{x+1}$ cm

$\frac{9}{x-3}$ cm

تبسيطُ الكسرِ المُركَّبِ

تعلَّمْتُ في الدرسِ السابقِ تبسيطَ الكسرِ المُركَّبِ الذي يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُبسِّطُ الكسرَ المُركَّبَ الذي يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على عمليةِ جمعٍ أوْ عمليةِ طرحٍ، وذلكَ بطريقتينِ؛ إحداهُما: كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ أوْ كليْهِما في صورةِ كسرٍ واحدٍ (إنْ لَزِمَ). والأُخرى: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ التي في البسطِ والمقامِ جميعِها، ثمَّ ضربُ كلٍّ منْ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ، والتبسيطُ.

مثال 4

أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\dfrac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2}$.

الطريقةُ 1: أُبسِّطُ المقدارَ بكتابةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ في صورةِ كسرٍ واحدٍ.

$$\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{2x}{x}}$$

المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ لمقامي البسطِ هوَ y

المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ لمقامي المقامِ هوَ x

$$= \frac{\frac{x-y}{y}}{\frac{1+2x}{x}}$$

بتبسيطِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ

$$= \frac{x-y}{y} \div \frac{1+2x}{x}$$

بكتابةِ الكسرِ المُركَّبِ في صورةِ قسمةِ مقدارينِ نسبيينِ

بالضربِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$= \frac{x-y}{y} \times \frac{x}{1+2x}$$

بالتبسيطِ

$$= \frac{x^2-xy}{y+2xy}$$

الطريقةُ 2: أُبسِّطُ المقدارَ بإيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقاماتِ البسطِ والمقامِ.

بضربِ البسطِ والمقامِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لجميعِ المقاماتِ التي في البسطِ والمقامِ، وهوَ: xy

$$\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2} \times \frac{xy}{xy}$$

بالتبسيطِ

$$= \frac{x^2-xy}{y+2xy}$$

أتحقَّقُ من فهمي

أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\dfrac{2+\frac{1}{y}}{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}$.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $4mt^2, 8m^3t, 12m^4t$

2) $x^2+2x-15, x^2+6x+5$

3) $c^3+5c^2+4c, c(c+1)^2$

4) $9x^2-16, 3x^2+x-4$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

5) $\dfrac{6y}{3x^3}+\dfrac{2}{7y^2x}$

6) $\dfrac{b}{b+3}+\dfrac{5}{b-2}$

7) $\dfrac{m}{2m-14}+\dfrac{m^2}{m^2-49}$

8) $\dfrac{1}{4x^2-12x+9}-\dfrac{x}{2x^2-x-3}$

9) $\dfrac{x+3}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x-1}$

10) $3s^2-\dfrac{s+1}{s^2-1}$

11) $\dfrac{2}{6z-9}-\dfrac{z+1}{2z^2-3z}$

12) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-x}$

13) $\dfrac{3w-1}{2w^2+w-3}-\dfrac{2-w}{w-1}$

14) $\dfrac{x+2}{x^2+3x-10}+\dfrac{3}{2-x}$

15) $\dfrac{2p+3}{p^2-7p+12}-\dfrac{2}{p-3}$

16) $\dfrac{3c+1}{c-1}+\dfrac{c+1}{c^2-4c+3}\div\dfrac{c-1}{c-3}$

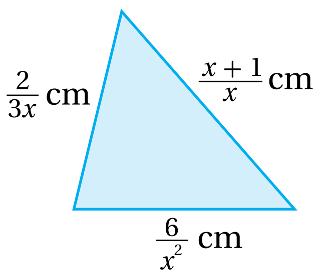
أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

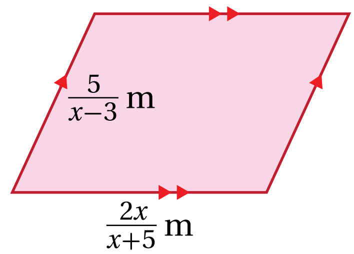
17 $\dfrac{6+\frac{a}{b}}{2-\frac{6}{b}}$

18 $\dfrac{\frac{6}{x-4}-\frac{x}{2x+3}}{\frac{2}{2x+3}+\frac{2x}{x-4}}$

19 $\dfrac{\frac{x}{x-2}+1}{\frac{3}{x^2-4}-1}$

أجدُ محيطَ كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ:

20


21


22 **رحلةٌ:** قرَّرَ مُهنَّدٌ الذهابَ في رحلةٍ بحافلةٍ تسيرُ بسرعةِ (x) km/h، وتقطعُ مسافةَ 60 km، ثمَّ إكمالَ الرحلةِ بسيّارةٍ تســيرُ بسرعةِ $(x+20)$ km/h، وتقطعُ مسافةَ 140 km. أكتبُ الزمنَ الذي سيستغرقُهُ مُهنَّدٌ في الحافلةِ والسيّارةِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ.

23 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{y}{y+1}+\frac{7}{y-3}=\frac{y+7}{(y+1)(y-3)} \quad ✗$$

25 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ مقدارينِ جبريينِ ناتجُ طرحِهما هوَ $\dfrac{x-1}{x+3}$.

26 **تبريــرٌ:** مُثلَّثٌ مُتطابِقُ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ هوَ $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{7}{6(x-3)}$. تمدَّدَ المُثلَّثُ مُحافِظًا على شــكلِهِ، فأصبحَ طولُ ضلعِهِ هوَ $\dfrac{5}{6(x-3)}-\dfrac{x^2}{x-3}$. أجدُ معاملَ التكبيرِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ، مُبرِّرًا إجابتي.

27 **تحدٍّ:** أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\dfrac{x}{1-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}$.

الدرس

3

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ
Solving Rational Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ نسبيةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ النسبيةُ.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ سبائكَ منَ النحاسِ والفِضَّةِ، نسبةُ الفِضَّةِ فيها هيَ 5 : 2. كمْ غرامًا منَ الفِضَّةِ يجبُ إضافتُها إلى خليطٍ منَ النحاسِ والفِضَّةِ، كتلتُهُ 800 g، وكتلة الفِضَّةِ فيهِ 200 g؛ لكيْ تكونَ النسبةُ اللازمةُ لصنعِ السبيكةِ هيَ 5 : 2؟

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ بالضربِ التبادليِّ

يُطلَقُ على المعادلةِ التي تحوي مقدارًا جبريًّا نسبيًّا أوْ أكثرَ اسمُ **المعادلةِ النسبيةِ** (rational equation)، ومنْ أمثلتِها:

$$\frac{x+3}{x-2}=6 \quad , \quad \frac{1}{x+4}=\frac{5}{2x-3} \quad , \quad \frac{x}{x+6}=\frac{72}{x^2-36}+5$$

يُمكِنُ استعمالُ الضربِ التبادليِّ لحَلِّ المعادلاتِ النسبيةِ إذا كانَتْ كلٌّ منْها في صورةِ تناسبٍ فقطْ.

أتذكَّرُ

في أيِّ تناسبٍ: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، حيثُ: $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ حاصلَ ضربِ طرفَيِ التناسبِ يكونُ مُساوِيًا لحاصلِ ضربِ وسطَيِ التناسبِ: $a \times d = b \times c$، وتُسمّى هذهِ الخاصيةُ الضربَ التبادليَّ.

$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$

مثال 1

أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

1) $\frac{4}{x+1}=\frac{6}{x-1}$

$\frac{4}{x+1}=\frac{6}{x-1}$	المعادلةُ الأصليةُ
$6(x+1)=4(x-1)$	بالضربِ التبادليِّ
$6x+6=4x-4$	باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ
$2x=-10$	بالتبسيطِ
$x=-5$	بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2

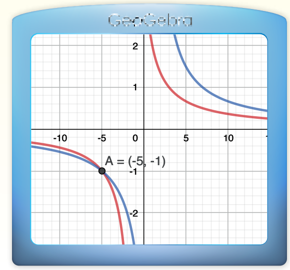
أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{4}{x+1} = \frac{6}{x-1}$
بتعويضِ $x = -5$	$\frac{4}{-5+1} \stackrel{?}{=} \frac{6}{-5-1}$
بالتبسيطِ	$-1 = -1$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = -5$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \frac{4}{x+1}$، والمعادلةِ: $y = \frac{6}{x-1}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = -5$.



2 $\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$
بالضربِ التبادليِّ	$x(x-2) = 35$
باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ	$x^2 - 2x = 35$
بطرحِ 35 منْ طرفيِ المعادلةِ	$x^2 - 2x - 35 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x-7)(x+5) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x - 7 = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 7 \qquad x = -5$

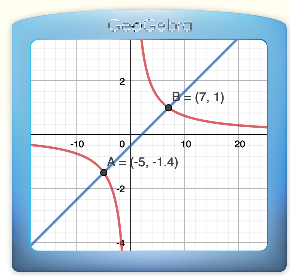
أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 7$	عندما $x = -5$
$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$	$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$
$\frac{7}{7} \stackrel{?}{=} \frac{7-2}{5}$	$\frac{7}{-5} \stackrel{?}{=} \frac{-5-2}{5}$
$1 = 1$ ✓	$-\frac{7}{5} = -\frac{7}{5}$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = -5$، و $x = 7$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \frac{7}{x}$، والمعادلةِ: $y = \frac{x-2}{5}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = -5$، و $x = 7$.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-2}$

b) $\frac{4}{x+4} = \frac{x}{x+1}$

إضافةً إلى حَلِّ المعادلاتِ النسبيةِ، يُمكِنُ استعمالُ مفهومِ النسبةِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 2 : منَ الحياةِ

طلاءٌ: تُخلَطُ الألوانُ بنسبٍ مُحدَّدةٍ وصولًا إلى الدرجةِ المطلوبةِ منْ لونٍ مُعيَّنٍ. أَعَدَّ سعيدٌ خليطًا منَ الألوانِ بمزجِ مكيالينِ منَ اللونِ الأزرقِ بمكيالينِ منَ اللونِ الأخضرِ. إذا كانَتْ درجةُ اللونِ التي يرغبُ سعيدٌ في الحصولِ عليْها مشروطةً بأنْ تكونَ نسبةُ اللونِ الأزرقِ إلى الخليطِ هيَ 3 : 4، فأجدُ عددَ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يتعيَّنُ على سعيدٍ إضافتُها إلى الخليطِ لكيْ يحصلَ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ.

أفترضُ أنَّ x هوَ عددُ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يجبُ إضافتُها إلى الخليطِ لإيجادِ النسبةِ المطلوبةِ.

ومنْ ثَمَّ، فإنَّ:

عددُ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ

$$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$$

نسبةُ اللونِ الأزرقِ في الخليطِ

عددُ المكاييلِ الكليُّ

لإيجادِ عددِ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يجبُ إضافتُها إلى الخليطِ، يجبُ حَلُّ المعادلةِ النسبيةِ أعلاهُ:

المعادلةُ الأصليةُ $\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$

بالضربِ التبادليِّ $3(x+4) = 4(x+2)$

باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ $3x + 12 = 4x + 8$

بالتبسيطِ $x = 4$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ $\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$

بتعويضِ $x = 4$ $\frac{4+2}{4+4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$

بالتبسيطِ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

إذنْ، يتعيَّنُ على سعيدٍ إضافةُ 4 مكاييلَ منَ اللونِ الأزرقِ إلى الخليطِ لكيْ يحصلَ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ.

أتذكَّرُ

النسبةُ هيَ طريقةٌ لمقارنةِ عددٍ بآخَرَ، أوْ مقارنةِ كمِّيةٍ بأُخرى.

تُكتَبُ النسبةُ بثلاثِ طرائقَ مختلفةٍ، هيَ: $a : b$، $\frac{a}{b}$، a إلى b.

معلومةٌ

يُطلَقُ على اللونِ الناتجِ منْ خلطِ اللونِ الأزرقِ واللونِ الأخضرِ اسمُ اللونِ الفيروزيِّ، ويُمكِنُ خلطُ نسبٍ مختلفةٍ منْ هذينِ اللونينِ للحصولِ على بعضِ درجاتِ (ظِلالِ) اللونِ الفيروزيِّ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

طلاءٌ: وُضِعَ في خـلّاطِ متجرٍ للطلاءِ مكيالٌ منَ اللونِ الأحمـرِ و4 مكاييلَ منَ اللونِ الأصفرِ لإنتاجِ لونٍ مُعيَّنٍ. إذا كانَتْ درجةُ هذا اللونِ مشروطةً بأنْ تكونَ نسبةُ اللونِ الأحمرِ إلى الخليطِ هيَ 3 : 1، فأجدُ عـددَ مكاييلِ اللونِ الأحمرِ التي يتعيَّنُ إضافتُهـا إلى الخليطِ للحصولِ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ.

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ حَلَّ المعادلةِ النسبيةِ التي تكونُ في صورةِ تناسبٍ باستعمالِ الضربِ التبادليِّ. والآنَ سـأتعلَّمُ كيفَ أَحُلُّ المعادلةَ النسـبيةَ التي لا تكونُ في صورةِ تناسبٍ، وذلكَ بضربِ طرفـيْ هذهِ المعادلةِ في المضاعفِ المشـتركِ الأصغرِ للمقامـاتِ؛ تخلُّصًا منْ هذهِ المقاماتِ.

في بعضِ الأحيـانِ، تظهرُ حلولٌ دخيلةٌ عندَ ضـربِ طرفي المعادلةِ النسـبيةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الأصليةِ.

أتذكَّرُ

الحَلُّ الدخيلُ هوَ حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ. ومـنَ المُلاحَـظِ فـي المعـادلاتِ النسـبيةِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يجعلُ أحدَ مقاماتِ المعادلةِ صفرًا.

مثال 3

أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

1 $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$

$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$ المعادلةُ الأصليةُ

$20(x-1)\times\frac{2}{x-1}+20(x-1)\times\frac{3}{4}=20(x-1)\times\frac{7}{20}$ بضـربِ طرفـي المعادلـةِ في المضاعفِ المشـتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $20(x-1)$

$40+15x-15=7x-7$ بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ

$25+15x=7x-7$ بالتبسيطِ

$8x=-32$ بالتبسيطِ

$x=-4$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 8

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَـلُّ الفرعِ 1 مـنَ المثـالِ 3 بطريقـةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$

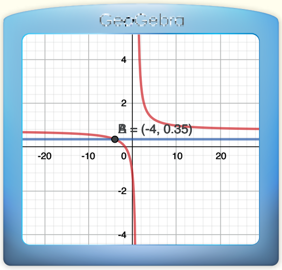
بتعويضِ $x=-4$ $\frac{2}{-4-1}+\frac{3}{4}\overset{?}{=}\frac{7}{20}$

بالتبسيطِ $\frac{7}{20}=\frac{7}{20}$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=-4$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}$، والمعادلةِ: $y=\frac{7}{20}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=-4$.



2 $\frac{36}{x^2-9}=\frac{2x}{x+3}-1$

المعادلةُ الأصليةُ $\frac{36}{x^2-9}=\frac{2x}{x+3}-1$

$(x-3)(x+3)\times\frac{36}{x^2-9}=(x-3)(x+3)\times\frac{2x}{x+3}-(x-3)(x+3)\times 1$

بضربِ طرفي المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $(x-3)(x+3)$

بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ $36=2x(x-3)-(x+3)(x-3)$

بالتبسيطِ $36=x^2-6x+9$

بالتبسيطِ $x^2-6x-27=0$

بالتحليلِ إلى العواملِ $(x-9)(x+3)=0$

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ $x-9=0$ or $x+3=0$

بحَلِّ كلِّ معادلةٍ $x=9$ $x=-3$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x=9$

$\frac{36}{x^2-9}=\frac{2x}{x+3}-1$

$\frac{36}{(9)^2-9}\overset{?}{=}\frac{2(9)}{(9)+3}-1$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ✓

عندما $x=-3$

$\frac{36}{x^2-9}=\frac{2x}{x+3}-1$

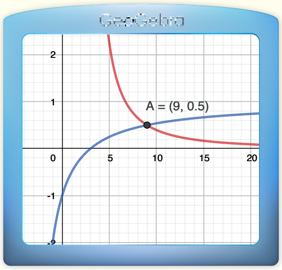
$\frac{36}{(-3)^2-9}\overset{?}{=}\frac{2(-3)}{(-3)+3}-1$

$\frac{36}{0}=\frac{-6}{0}-1$ ✗

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=9$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\frac{36}{x^2-9}$، والمعادلةِ: $y=\frac{2x}{x+3}-1$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=9$.



أتذكَّرُ

المُعدَّلُ هوَ نسبةٌ يُقارَنُ فيها بينَ كمِّيتينِ مختلفتينِ في الوحدةِ. أمّا مُعدَّلُ الوحدةِ فهوَ تبسيطُ المُعدَّلِ ليُصبِحَ مقامُهُ وحدةً واحدةً.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{3x-1} = \frac{x}{3x^2-7x+2}$

تتطلَّبُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ عِدَّةٌ تحديدَ الزمنِ اللازمِ لإنجازِ عملٍ مُعيَّنٍ؛ ما يُحتِّمُ تحديدَ مُعدَّلِ الوحدةِ لإنجازِ العملِ، ثمَّ استعمالَهُ لكتابةِ معادلةٍ نسبيةٍ ثمَّ حَلِّها.

مثال 4 : منَ الحياةِ

أعمالٌ منزليةٌ: يستغرقُ تنظيفُ المنزلِ منْ رغدَ وزوجِها أحمدَ 4 ساعاتٍ منَ العملِ. إذا كانَتْ سرعةُ رغدَ هيَ مثليْ سرعةِ أحمدَ في التنظيفِ، فأجدُ الوقتَ الذي تستغرقُهُ رغدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَها.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ مُعدَّلَ الوحدةِ لإنجازِ العملِ لكلٍّ منْ رغدَ وأحمدَ.

- أفترضُ أنَّ x هوَ عددُ الساعاتِ التي يستغرقُها أحمدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَهُ. وبما أنَّ أحمدَ يُنظِّفُ المنزلَ في x ساعةً، فإنَّهُ يُنظِّفُ $\frac{1}{x}$ منَ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.
- بما أنَّ سرعةَ رغدَ هيَ مثلا سرعةِ أحمدَ، فإنَّها تُنظِّفُ $\frac{2}{x}$ منَ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.
- بما أنَّ رغدَ وأحمدَ يُنظِّفانِ المنزلَ في 4 ساعاتٍ إذا عملا معًا، فإنَّهُما يُنظِّفانِ $\frac{1}{4}$ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.

الخطوةُ 2: أكتبُ معادلةً تُمثِّلُ مُعدَّلَ وحدةِ إنجازِهِما العملَ معًا، ثمَّ أَحُلُّها.

بما أنَّ رغدَ وأحمدَ يُنظِّفانِ معًا $\frac{1}{4}$ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ، فإنَّهُ يُمكِنُني كتابةُ المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

بحَلِّ المعادلةِ، يُمكِنُ إيجادُ عددِ الساعاتِ التي يستغرقُها أحمدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَهُ:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$ المعادلةُ الأصليةُ

$$4x \times \frac{3}{x} = 4x \times \frac{1}{4}$$ بضربِ طرفيِ المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $4x$

$$x = 12$$ بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ

معلومةٌ

كانَ النبيُّ صلّى اللهُ عليْهِ وسلَّمَ المَثلَ والقدوةَ معَ أهلِهِ في بيتِهِ؛ فقدْ سُئِلَتِ السيِّدةُ عائشةُ رضيَ اللهُ عنْها: ما كانَ يصنعُ النبيُّ في بيتِهِ؟ فقالَتْ: كانَ يكونُ في مهنةِ أهلِهِ (تعني خدمةَ أهلِهِ)، فإذا حضرَتِ الصلاةُ خرجَ إلى الصلاةِ. رواهُ البخاريُّ.

وبذلكَ، فإنَّ أحمدَ بحاجةٍ إلى 12 ساعةً منَ العملِ لتنظيفِ المنزلِ وحدَهُ.

بما أنَّ سـرعةَ رغدَ في التنظيفِ هيَ مثلا سـرعةِ أحمدَ، فإنَّها بحاجةٍ إلى 6 ساعاتٍ منَ العملِ لتنظيفِ المنزلِ وحدَها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

جدارٌ: يتعيَّنُ على يوسـفَ وإبراهيمَ العملُ 6 ساعاتٍ لطلاءِ جدارٍ في حديقةٍ منزليةٍ. إذا كانَتْ سـرعةُ يوسـفَ هيَ ثلاثةَ أمثالِ سـرعةِ إبراهيمَ في إنجازِ العملِ، فأجدُ الوقتَ الذي يستغرقُهُ يوسفُ في طلاءِ الجدارِ وحدَهُ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $\frac{3y}{y+1}=\frac{y}{3-y}$

2) $\frac{2}{x+5}=\frac{10}{3x+7}$

3) $\frac{6}{y-1}=\frac{y}{7}$

4) $\frac{9}{y-1}=\frac{3y}{2}$

5) $\frac{w}{w+1}=\frac{2w}{w+6}$

6) $\frac{x^2+4}{x-1}=\frac{5}{x-1}$

7) أشـجارٌ: تحتوي مزرعةٌ للحمضياتِ على 120 شجرةً، منْها 30 شجرةَ ليمونٍ. أجدُ عددَ أشـجارِ الليمونِ التي يَلزمُ زراعتُها لتُصبحَ نسـبةُ أشجارِ الليمونِ في المزرعةِ $1:3$

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

8) $\frac{4}{y}+\frac{3}{8}=\frac{6}{y}$

9) $\frac{4}{y-2}-1=\frac{9}{y}$

10) $\frac{1}{z}+\frac{1}{z-4}=\frac{z-3}{z-4}$

11) $\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x+2}=\frac{3x^2}{x^2-4}$

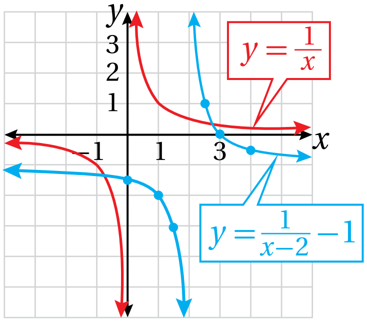
12) $\frac{x^2-3x-4}{x^3-x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$

13) $10+\frac{14}{1-x}=\frac{12}{1-x^2}$

14) $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x^2+5x}=\frac{4}{x^2+5x}$

15) $1=\frac{n-2}{n-1}+\frac{3}{n^2+3n-4}$

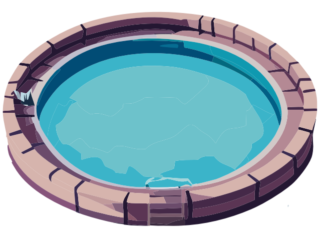
16) $\frac{16}{x-5}=2-\frac{6}{x}$



يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \frac{1}{x}$،
والمعادلةِ: $y = \frac{1}{x-2} - 1$:

17 أكتبُ معادلةً حَلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيي المعادلتينِ.

18 أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في السؤالِ السابقِ جبريًّا.



19 **مسبحٌ:** يستغرقُ مِلْءُ مسبحٍ بالماءِ 45 دقيقةً باستعمالِ خرطومِ المياهِ الأزرقِ، في حينِ يستغرقُ مِلْئُهُ بالماءِ 20 دقيقةً باستعمالِ هذا الخرطومِ وخرطومِ المياهِ ذي اللونِ الأسودِ معًا. أجدُ عددَ الدقائقِ التي يستغرقُها الخرطومُ الأسودُ في مِلْءِ المسبحِ بالماءِ.

20 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ معادلةً نسبيةً يُمكِنُ حَلُّها بضربِ طرفيِ المعادلةِ في $3(x-1)$.

22 **أكتشفُ الخطأَ:** يُمثِّلُ التالي الخطوةَ الأولى منْ حَلِّ ديمةَ لمعادلةٍ نسبيةٍ. أكتشفُ الخطأَ في هذهِ الخطوةِ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{2x-1}{x} + 6 = \frac{3x+4}{5x-2}$$

$$x(5x-2) \times \frac{2x-1}{x} + 6 = x(5x-2) \times \frac{3x+4}{5x-2}$$

23 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ: $\frac{2x+2}{x-1} = 4 + \frac{6x}{x+4}$ باستعمالِ الضربِ التبادليِّ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

24 **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلةَ الآتيةَ: $\dfrac{\frac{x+3}{x-2} \times \frac{x^2+x-2}{x+5}}{x-1} + 2 = 0$.

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ الذي في أبسطِ صورةٍ هوَ:

a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ b) $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 2x - 3}$

c) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}$ d) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}$

2 مُكعَّبٌ طولُ ضلعِهِ $2x$ وحدةً. النسبةُ بينَ مساحةِ سطحِهِ الكليةِ وحجمِهِ في أبسطِ صورةٍ هيَ:

a) $\frac{6}{x^2}$ b) $\frac{3}{2x}$

c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{3}{x}$

3 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{6}{w^2 + 6w + 8} \times \frac{2w + 8}{3}$ هيَ:

a) $\frac{4}{w + 2}$ b) $\frac{2}{3(w + 2)}$

c) $\frac{4(w + 4)}{w + 2}$ d) $\frac{2}{w + 2}$

4 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{x - 3}{2x} \div \frac{x - 3}{6x^2}$ هيَ:

a) $\frac{1}{6x}$ b) $3x$

c) $\frac{1}{3x}$ d) $\frac{1}{3x^2}$

5 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{c}{8d^2} + \frac{5}{6cd}$ هيَ:

a) $\frac{5 + c}{6cd + 8d^2}$ b) $\frac{20d + c^2}{24cd^2}$

c) $\frac{5d + 3c^2}{24cd^2}$ d) $\frac{20d + 3c^2}{24cd^2}$

6 حَلُّ المعادلةِ: $\frac{4}{x + 6} = \frac{x}{x + 2}$ هوَ:

a) $x = -4, 2$ b) $x = -4, 0$

c) $x = 4, -2$ d) $x = -2, -6$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7 $\frac{2x^2 - 10x + 8}{3x^2 - 7x + 4}$

8 $\frac{7x^3 - 32x^2 + 16x}{4x - 16}$

9 $\frac{8y^3 + 1}{2y^2 + 21y + 10}$

10 $\frac{x^2 + 3x + 2}{4x - 12} \times \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

11 $\frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 20} \times \frac{x^2 - 8x + 16}{3x + 9}$

12 $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x + 2} \div \frac{6x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$

13 $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5} \times \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 + x - 6} \div \frac{8x + 20}{6x + 15}$

14 $\frac{2x + 7}{x^2 - 2x - 3} + \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 5}$

15 $\frac{x + 1}{x - 4} - \frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12}$

16 $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + 5x + 4}$

17 $\frac{2r}{r^2 - s^2} + \frac{1}{r + s} - \frac{1}{r - s}$

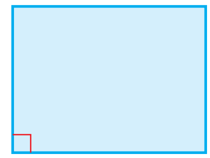
18 $\frac{n - 7}{n^2 - 2n - 35} \div \frac{9n + 54}{10n + 50}$

19 $\frac{10x^2 - 20x}{40x^3 - 80x^2} \times \frac{16x^3 + 80x^2}{6x + 30}$

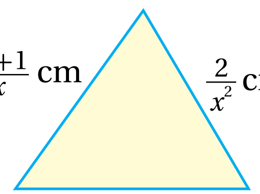
20 $\frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1}}{\frac{1}{x}}$

21 $\frac{\frac{1}{x - 1}}{\frac{x + 1}{3} + \frac{4}{x - 1}}$

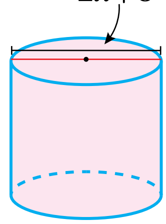
22 أجدُ مساحةَ المستطيلِ الآتي بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



23 أجدُ محيطَ المُثلَّثِ المُجاورِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

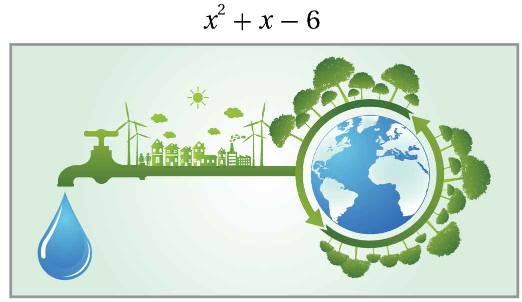


24 إذا كانَ حجمُ الأسطوانةِ المُجاورةِ هوَ $(x+4)\ (x^2+2x-8)\pi\ \text{cm}^3$، فأجدُ ارتفاعَ الأسطوانةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



25 صمَّمَتْ أحلامُ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأهميةِ ترشيدِ استهلاكِ المياهِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ التالي. ترغبُ أحلامُ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

$\frac{5}{x^2+x-6}$



$\frac{2x}{x^2-9}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 يُمثِّلُ الشكلُ التالي ملعبًا لكرةِ القدمِ مساحتُهُ: x^2-4. المقدارُ الجبريُّ الذي يُمثِّلُ عَرْضَ الملعبِ هوَ:

a) $x-2$

b) $(x+2)(x-2)^2$

c) $x+2$

d) $(x+2)(x-2)$

27 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}{1+\frac{4}{b}}$ هيَ:

a) $\dfrac{b+2a}{ab+4}$

b) $\dfrac{b+2a}{a(b+4)}$

c) $\dfrac{ab+2a}{a(b+4)}$

d) $\dfrac{ab+2}{a(b+4)}$

28 عددُ حلولِ المعادلةِ: $\frac{x}{3}=\frac{5}{x-2}$ هوَ:

a) حَلٌّ واحدٌ.

b) حَلّانِ.

c) ثلاثةُ حلولٍ.

d) لا توجدُ حلولٌ للمعادلةِ.

29 يستغرقُ العاملُ الماهرُ 26 ساعةً في بناءِ سقفِ أحدِ المنازلِ، في حينِ يستغرقُ العاملُ المُبتدِئُ 39 ساعةً في بناءِ السقفِ نفسِهِ. إلى كمْ ساعةً يحتاجُ العاملانِ لبناءِ سقفِ المنزلِ معًا؟

الوحدةُ 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probability

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُقدِّمُ هذهِ الوحدةُ مجموعةً مِنْ موضوعاتِ الإحصاءِ والاحتمالاتِ التي يُعَدُّ اكتسابُها ضروريًّا لكلِّ إنسانٍ في هذا العصرِ، مثلَ: تنظيمِ البياناتِ، وتحليلِها، واستعمالِ قوانينِ الاحتمالاتِ لوضعِ استنتاجاتٍ دقيقةٍ عنْها؛ ما يساعدُ على اتخاذِ قراراتٍ صحيحةٍ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ اليوميةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مفردةٍ.
- ✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ، ثمَّ تمثيلَها في مُخطَّطاتٍ تكراريةٍ.
- ✓ تمثيلَ البياناتِ بأشكالِ فِنْ.
- ✓ إيجادَ احتمالاتِ وقوعِ الحوادثِ.

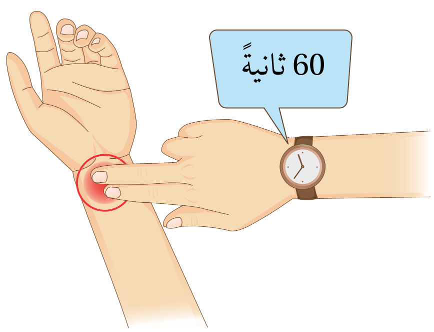
سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- ◄ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ◄ تقديرَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.
- ◄ إيجادَ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ، وإيجادَ احتمالاتٍ هندسيةٍ.

جمعُ البياناتِ، وتنظيمُها، وتحليلُها

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنْ عددٍ منَ الأشخاصِ، وتنظيمُها، وتحليلُها.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1 أطلبُ إلى 40 شخصًا (نصفُهُمْ منَ الذكورِ، ونصفُهُمُ الآخرُ منَ الإناثِ) قياسَ عددِ دقّاتِ قلوبِهِمْ في الدقيقةِ الواحدةِ، وتحديدَ اليدِ التي يكتبونَ بها، وبيانَ إذا كانوا يرتدونَ نظّاراتٍ أمْ لا.

2 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.

3 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ والتباينَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.

4 أُنظِّمُ بياناتِ عددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

5 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ باستعمالِ الجدولينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ، ثمَّ أُقارِنُ ذلكَ بالإجابةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما.

6 أُمثِّلُ كُلًّا منَ الجدولينِ التكراريينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، ثمَّ أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

7 أُمثِّلُ بياناتِ اليدِ المُستعمَلةِ للكتابةِ، وبياناتِ ارتداءِ النظّارةِ في شكلِ فِنْ.

8 أكتبُ مجموعةً منَ المسائلِ الاحتماليةِ عنْ حادثِ اختيارِ شخصٍ عشوائيًّا منْ بينِ مجموعةٍ منَ الأشخاصِ، ثمَّ أطلبُ إلى بعضِ زملائي/ زميلاتي إجابةَ هذهِ المسائلِ.

عرضُ النتائجِ:

- أُصمِّمُ مطويةً أكتبُ فيها النتائجَ التي توصَّلْتُ إليْها في هذا المشروعِ.
- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ الصفِّ، ثمَّ أُقارِنُ نتائجي بنتائجِهِمْ.

الدرسُ 1

مقاييسُ التشتُّتِ
Measures of Variation

فكرةُ الدرسِ

- إيجادُ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- تحديدُ أثرِ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ.

المصطلحاتُ التباينُ، الانحرافُ المعياريُّ، تحويلُ البياناتِ.

مسألةُ اليومِ في ما يأتي عددُ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ كلَّ يومٍ مُدَّةَ 10 أيامٍ:

3, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 6

1) أجدُ تباينَ عددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

2) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

أتذكَّرُ

المدى هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ قِيَمِ البياناتِ وأصغرِها. أمّا المدى الربيعيُّ فهوَ الفرقُ بينَ الربيعِ الأعلى والربيعِ الأدنى.

التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مقاييسَ التشتُّتِ تُستعمَلُ لوصفِ مقدارِ تشتُّتِ البياناتِ وتباعدِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ: المدى، والمدى الربيعيُّ. ولكنْ، كلٌّ منْ هذينِ المقياسينِ يعتمدُ على قِيَمٍ مُحدَّدةٍ منَ البياناتِ، لا على القِيَمِ جميعِها؛ لذا توجدُ مقاييسُ أُخرى أكثرُ دقَّةً للتشتُّتِ تأخذُ جميعَ قِيَمِ البياناتِ بالاعتبارِ.

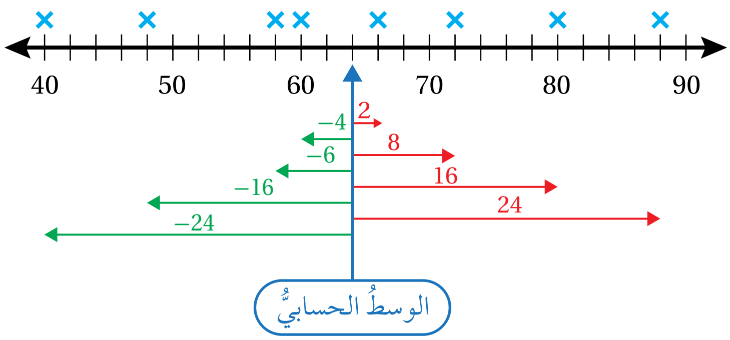
في ما يأتي مجموعةٌ منَ البياناتِ، وسطُها الحسابيُّ هوَ: $\bar{x} = 64$.

58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

لغةُ الرياضياتِ

يُطلَقُ على كلِّ قيمةٍ منَ القِيَمِ في مجموعةِ البياناتِ اسمُ المشاهدةِ.

تُستعمَلُ الصيغةُ $x - \bar{x}$ لإيجادِ انحرافِ (بُعْدِ) كلِّ مشاهدةٍ منْ قِيَمِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ. وبذلكَ، فإنَّ انحرافَ قِيَمِ البياناتِ أعلاهُ عنْ وسطِها الحسابيِّ باستعمالِ هذهِ الصيغةِ هوَ كما يأتي:



عندَ جمعِ الانحرافاتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ أعلاهُ، فإنَّ الناتجَ يكونُ كما يأتي:

$$-24 + -16 + -6 + -4 + 2 + 8 + 16 + 24 = 0$$

أُلاحِظُ أنَّ مجموعَ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا، وهذا لا يقتصرُ على هذهِ البياناتِ فقطْ، وإنَّما يتحقَّقُ في أيِّ مجموعةِ بياناتٍ عدديةٍ؛ لذا، فإنَّ حسابَ مجموعِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يُقدِّمُ شيئًا عنْ تشتُّتِ البياناتِ، ولا يُميِّزُ أيَّ مجموعةِ بياناتٍ عنْ أُخرى. إلّا أنَّ إيجادَ مُربَّعاتِ هذهِ الانحرافاتِ يجعلُها موجبةً. ولهذا، فإنَّ مجموعَ مُربَّعاتِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يساوي صفرًا.

عندَ حسابِ الوسطِ الحسابيِّ لمُربَّعاتِ الانحرافاتِ، بقسمةِ مجموعِها على عددِها، ينتجُ مقياسٌ مُهِمٌّ منْ مقاييسِ التشتُّتِ يُسمّى **التباينَ** (variance)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ σ^2. فمثلًا، يُمكِنُ حسابُ تباينِ مجموعةِ البياناتِ أعلاهُ على النحوِ الآتي:

$$\sigma^2 = \frac{(-24)^2 + (-16)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 + 24^2}{8} = 223$$

وبأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للتباينِ، ينتجُ مقياسٌ آخرُ لتشتُّتِ البياناتِ يُسمّى **الانحرافَ المعياريَّ** (standard deviation).

في هذا الدرسِ، سيُنظَرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ، ويُقرَأُ: ميو.

مفهومٌ أساسيٌّ

التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ

يُعرَّفُ تباينُ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، بالصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ انحرافَ المشاهدةِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ أكبرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ، ويكونُ سالبًا إذا كانَتْ أصغرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ.

رموزٌ رياضيةٌ

الحرفُ اليونانيُّ σ يُقرَأُ: سيجما، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على الانحرافِ المعياريِّ. أمّا الرمزُ σ^2 فيُقرَأُ: سيجما تربيعٌ، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على التباينِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الرمزُ $\sum$ للدلالةِ على المجموعِ. وفي قانونِ التباينِ، فإنَّهُ يُستعمَلُ للدلالةِ على مجموعِ مُربَّعاتِ انحرافاتِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ بصورةٍ مختصرةٍ، ويُقرَأُ: سيجما.

مثال 1 : منَ الحياةِ

تجارةٌ: في ما يأتي عددُ الأجهزةِ الكهربائيةِ التي بيعَتْ في متجرٍ خلالَ خمسةِ أشهرٍ:

18, 22, 21, 25, 24

1 أجدُ التباينَ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للأجهزةِ المَبيعةِ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{18 + 22 + 21 + 25 + 24}{5} = 22$$

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، إضافةً إلى حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
18	-4	16
22	0	0
21	-1	1
25	3	9
24	2	4
المجموعُ		30

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

صيغةُ التباينِ

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{30}{5} = 6$$

إذنْ، التباينُ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ هوَ 6.

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$$

أتعلَّمُ

إذا كانَتِ البياناتُ: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثِّلُ عيِّنةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما، فإنَّ التباينَ يُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ s^2، ويُعرَّفُ بأنَّهُ:

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}$$

في هذا الدرسِ، ستُعامَلُ جميعُ البياناتِ على أساسِ أنَّها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ التباينَ سيُعرَّفُ بالصيغةِ الواردةِ في صندوقِ المفهومِ الأساسيِّ السابقِ.

أتذكَّرُ

مجموعُ $(x-\mu)$ يساوي صفرًا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

إنترنتْ: في ما يأتي عددُ زائري موقعٍ إلكترونيٍّ تعليميٍّ خلالَ أيامِ أحدِ الأسابيعِ:

103, 115, 124, 125, 171, 165, 170

a) أجدُ التباينَ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ.

b) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ.

توجدُ صيغةٌ أُخرى لإيجادِ التباينِ منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافِ المشاهداتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ هذهِ الصيغةُ لتسهيلِ الحساباتِ في حالِ كانَتْ قيمةُ الوسطِ الحسابيِّ عددًا غيرَ صحيحٍ.

مثال 2

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: 15, 14, 18, 6, 12, 4, 7, 8, 8

لإيجادِ التباينِ، أتَّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ.

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{15+14+18+6+12+4+7+8+8}{9} = \frac{92}{9}$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ.

x	x^2
15	225
14	196
18	324
6	36
12	144
4	16
7	49
8	64
8	64
المجموعُ	1118

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$ الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$= \frac{1118}{9} - \left(\frac{92}{9}\right)^2$$ بتعويضِ $\Sigma x^2 = 1118, \mu = \frac{92}{9}$

$$\approx 19.73$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma \approx 4.44$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: **1, 4, 5, 7, 6, 14, 11**

التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا تنظيمَ بياناتٍ عدديةٍ باستعمالِ جداولَ تكراريةٍ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$، حيثُ f عددُ مَرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

يُمكِنُ إيجادُ تباينِ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، إذا كانَتْ مُنظَّمةً في جداولَ تكراريةٍ، حيثُ f عددُ مَرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ، باستعمالِ إحدى الصيغتينِ الآتيتينِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

قمصانٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ القمصانِ الرياضيةِ لمجموعةٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

عددُ القمصانِ (x)	1	2	3	4	5	6
التكرارُ (f)	2	12	45	114	41	16

لإيجادِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

x	f	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
1	2	2	1	2
2	12	24	4	48
3	45	135	9	405
4	114	456	16	1824
5	41	205	25	1025
6	16	96	36	576
المجموعُ	230	918	91	3880

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{918}{230}$$ بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$ الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$= \frac{3880}{230} - \left(\frac{918}{230}\right)^2$$ بالتعويضِ

$$= 0.93905$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma \approx 0.969$$

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

عائلـةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ الأخوةِ والأخواتِ لمجموعةٍ منْ طالباتِ الصفِّ التاسعِ في مدرسةِ عائشةَ. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

عددُ الأخوةِ والأخواتِ	1	2	3	4	5
التكرارُ (f)	2	4	8	5	1

تحويلُ البياناتِ

تحويلُ البياناتِ (data transformation) هوَ تطبيقُ عمليةٍ حســـابيةٍ (أوْ أكثرَ) على جميعِ القِيَمِ في مجموعةِ بياناتٍ للحصولِ على مجموعةٍ أُخرى مختلفةٍ. سأستكشــفُ في النشـــاطِ المفاهيمـــيِّ الآتي أثرَ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوســـطِ الحســـابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ.

نشاطٌ مفاهيميٌّ تحويلُ البياناتِ

الإجراءاتُ:

في ما يأتي علاماتُ 5 طلبةٍ في اختبارِ رياضياتٍ، نهايتُهُ العظمى هيَ 20:

12, 17, 11, 9, 16

1) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ.

2) إذا أرادَ المُعلِّمُ إضافةَ 3 علاماتٍ إلى علامةِ كلِّ طالبٍ، فأجدُ الوســطَ الحســابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.

3) إذا أرادَ المُعلِّـمُ تحويلَ نهايـةِ الاختبارِ العظمى إلى 40، بضـربِ كلِّ علامةٍ في العددِ 2، فأجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.

أُحلِّلُ النتائجَ:

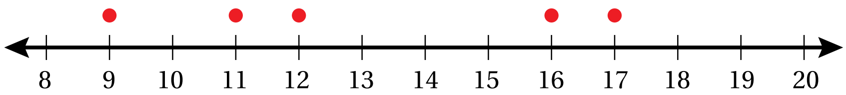
1) أُقارِنُ بينَ الوســطِ الحســابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويــلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بإضافةِ 3 علاماتٍ. ماذا أستنتجُ؟

2) أُقارِنُ بينَ الوســطِ الحســابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويــلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بضربِها في العددِ 2. ماذا أستنتجُ؟

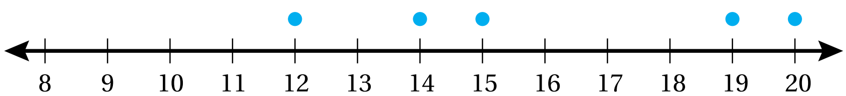
أستنتجُ منْ هذا النشاطِ أنَّ إضافةَ العددِ 3 إلى علامةِ كلِّ طالبٍ أثَّرَتْ في الوسطِ الحسابيِّ، ولمْ تُؤثِّرْ في الانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ هذهِ الإضافةَ أدَّتْ إلى انســحابِ البياناتِ جميعِها بالمقدارِ نفسِهِ (3 وحداتٍ إلى اليمينِ) كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي، لكنَّ ذلكَ لمْ يُؤثِّرْ في تشتُّتِ البياناتِ.

أستنتجُ أيضًا أنَّ الوسطَ الحسابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ إضافةِ العددِ 3 إلى الوسطِ الحسابيِّ القديمِ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



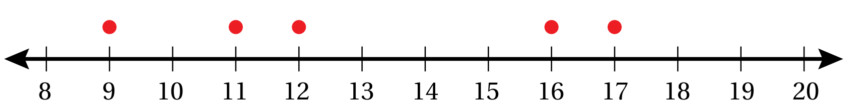
علاماتُ الطلبةِ بعدَ إضافةِ العددِ 3 إليْها.



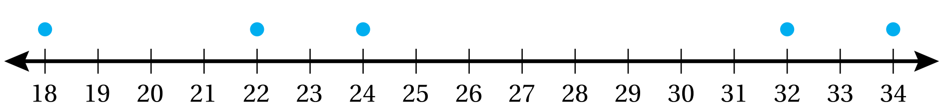
أمّا تحويلُ البياناتِ بضربِها في العددِ 2 فقدْ أثَّرَ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ عمليةَ الضربِ تُؤثِّرُ في تشتُّتِ البياناتِ كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي.

كذلكَ أستنتجُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ ضربِ الوسطِ الحسابيِّ القديمِ في العددِ 2، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الانحرافِ المعياريِّ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



علاماتُ الطلبةِ بعدَ ضربِها في العددِ 2.



مفهومٌ أساسيٌّ **تحويلُ البياناتِ**

عندَ تحويلِ مجموعةٍ منَ البياناتِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = ax + b$، حيثُ a و b عددانِ حقيقيانِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ، و y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، فإنَّهُ:

- يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ μ_y باستعمالِ العلاقةِ: $\mu_y = a\mu_x + b$، حيثُ μ_x الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.
- يُمكِنُ إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ σ_y باستعمالِ العلاقةِ: $\sigma_y = |a|\sigma_x$، حيثُ σ_x الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

يُستعمَلُ تحويلُ البياناتِ أحياناً لإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ المُعقَّدةِ (ذاتِ القِيَمِ غيرِ الصحيحةِ)؛ تسهيلًا لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

علومٌ: قاسَ عالِمٌ درجةَ حرارةِ مفاعلٍ نوويٍّ (بالسلسيوس) في 5 مواقعَ مختلفةٍ، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَ إليْها كما يأتي:

332.5, 335.3, 336.2, 337.5, 340.3

استعملَ هذا العالِمُ العلاقةَ: $y = 10x - 3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، و y درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

1 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ درجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أستعملُ العلاقةَ: $y=10x-3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، بحيثُ تصبحُ كالآتي:

25, 53, 62, 75, 103

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu_y = \frac{\sum y}{n}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ
$$= \frac{25 + 53 + 62 + 75 + 103}{5} = 63.6$$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ: 63.6

الخطوةُ 3: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ، ثمَّ أُعوِّضُ في صيغةِ الانحرافِ المعياريِّ:

y	y^2
25	625
53	2809
62	3844
75	5625
103	10609
المجموعُ	23512

معلومةٌ

تنتجُ مِنَ التفاعلاتِ النوويةِ طاقةٌ حراريةٌ كبيرةٌ تُستعمَلُ لتوليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ.

أُفكِّرُ

كيفَ توصَّلَ العالِمُ إلى المعادلةِ: $y = 10x - 3300$؟ هلْ هذا التحويلُ هوَ الوحيدُ المُمكِنُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتذكَّرُ

الانحـــرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$

بتعويضِ $\Sigma y^2 = 23512, \mu_y = 63.6, n = 5$ $= \sqrt{\frac{23512}{5} - (63.6)^2}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 25.64

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ 25.64

2 **أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.**

- **الوسطُ الحسابيُّ قبلَ التحويلِ:**

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ $\mu_y = a\mu_x + b$

بتعويضِ $\mu_y = 63.6, a = 10, b = -3300$ $63.6 = 10\mu_x - 3300$

بجمعِ 3300 إلى طرفي المعادلةِ $3363.6 = 10\mu_x$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 10 $336.36 = \mu_x$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 336.36

- **الانحرافُ المعياريُّ قبلَ التحويلِ:**

صيغةُ تحويلِ الانحرافِ المعياريِّ $\sigma_y = |a|\sigma_x$

بتعويضِ $\sigma_y = 25.64, a = 10$ $25.64 \approx |10|\sigma_x$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 10 $2.564 \approx \sigma_x$

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 2.564 تقريبًا.

أتحقَّقُ من فهمي

درجاتُ حرارةٍ: رُصِدَتْ درجاتُ الحرارةِ (بالسلسيوس) في 7 مناطقَ مختلفةٍ منَ العاصمةِ عمّانَ في أحدِ الأيامِ، وكانَتْ على النحوِ الآتي:

$$32.1, 31.7, 31.2, 31.5, 31.9, 32.2, 32.7$$

استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 10x - 300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، وy درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

a) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

b) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

يُمكِنُ أحيانًا إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ بعدَ تحويلِها منْ دونِ معرفةِ البياناتِ الأصليةِ، أوِ البياناتِ بعدَ التحويلِ؛ إذْ يكتفى بمعرفةِ العلاقةِ التي استُعمِلَتْ لإجراءِ التحويلِ، وبعضِ المعلوماتِ عنِ البياناتِ بعدَ التحويلِ.

مثال 5 : منَ الحياةِ

سرعةٌ: رُصِدَتْ سرعةُ 25 درّاجةً هوائيةً مشاركةً في سباقٍ للدرّاجاتِ عندَ مرورِها منْ أحدِ الشوارعِ بوحدةِ km/h، ثمَّ حُوِّلَتْ سرعةُ هذهِ الدرّاجاتِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 10$، حيثُ y السرعةُ بعدَ التحويلِ، وx السرعةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -5, \sum y^2 = 2803$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

$$\mu_y = \frac{\sum y}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{-5}{25} = -0.2$$ بتعويضِ $\sum y = -5, n = 25$

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ $\mu_y = a\mu_x + b$

بتعويضِ $\mu_y = -0.2, a = 1, b = -10$ $-0.2 = \mu_x - 10$

بجمعِ 10 إلى طرفي المعادلةِ $\mu_x = 9.8$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ هوَ 9.8

2 **الانحرافُ المعياريُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.**

الخطوةُ 1: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$

بتعويضِ $\Sigma y^2 = 2803, \mu_y = -0.2$ $= \sqrt{\frac{2803}{25} - (-0.2)^2}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 10.6

الخطوةُ 2: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 10.6 تقريبًا؛ لأنَّ التحويلَ تمثَّلَ في إضافةِ (-10)، وهذا لا يُؤثِّرُ في الانحرافِ المعياريِّ.

أتذكَّرُ

إضافةُ قيمةٍ إلى البياناتِ لا تُؤثِّرُ في تشتُّتِها.

أتحقَّقُ من فهمي

زراعةٌ: قيسَتْ كتلُ 40 كيسًا منَ السمادِ بوحدةِ kg، ثمَّ حُوِّلَتْ هذهِ الكتلُ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 60$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، وx الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -814, \sum y^2 = 22125$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ.

b) الانحرافُ المعياريُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ.

معلومةٌ

يُعَدُّ الأردنُّ إحدى الدولِ الرائدةِ في إنتاجِ الأسمدةِ عاليةِ الجودةِ على مستوى العالَمِ؛ نظرًا إلى وفرةِ خاماتِ الفوسفاتِ التي تُستعمَلُ لصناعةِ الأسمدةِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أمطارٌ: في ما يأتي عددُ الأيامِ الماطرةِ منْ شهرِ شباطَ في إحدى المدنِ على مدارِ سبعةِ أعوامٍ متتاليةٍ:

18, 20, 11, 13, 5, 12, 14

1 أجدُ تباينَ عددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ.

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ.

كرةُ قدمٍ: شـــاركَ فريقُ كرةِ قدمٍ في دوريٍّ للمُحترفينَ 5 مواسمَ متتاليةٍ، وكانَ عددُ الأهدافِ التي سجَّلَها الفريقُ في هذهِ المواسمِ كما يأتي:

61, 54, 44, 57, 38

3 أجدُ تباينَ عددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ.

4 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ.

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

6 12, 15, 18, 16, 7, 9, 14

5 27, 43, 29, 34, 53, 37, 19, 58

أطفالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي عددَ الأطفالِ في 35 عائلةً:

عددُ الأطفالِ	0	1	2	3	4	5
عددُ العائلاتِ	6	12	9	4	3	1

7 أجدُ تباينَ عددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ.

8 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ.

كتلٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي كتلَ عددٍ منَ الصناديقِ في شاحنةٍ:

الكتلةُ (kg)	50	55	60	65	70	75
عددُ الصناديقِ	3	10	18	22	17	10

9 أجدُ تباينَ كتلِ هذهِ الصناديقِ.

10 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لكتلِ هذهِ الصناديقِ.

نباتاتٌ: قاسَتْ مُهندِسةٌ زراعيةٌ أطوالَ 7 نبتاتٍ منَ النوعِ نفسِهِ (بالسنتيمترِ)، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَتْ إليْها كما يأتي:

53.6, 52.7, 55.4, 55.4, 57.2, 59.9, 62.6

ثمَّ استعملَتِ العلاقةَ: $y = 10x - 500$ لتحويلِ أطوالِ النبتاتِ، حيثُ x طولُ النبتةِ قبلَ التحويلِ، وy طولُها بعدَ التحويلِ:

11 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ بعدَ التحويلِ.

12 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

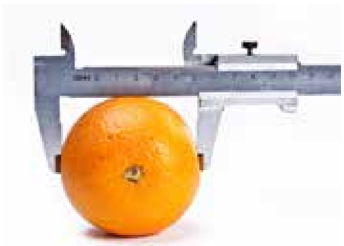
حقائبُ: قيسَتْ كتلُ 97 حقيبةَ يدٍ (بـ kg) على متنِ إحدى الرحلاتِ الجويةِ، ثمَّ حُوِّلَتْ كتلُ هذهِ الحقائبِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 5$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، وx الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = 314, \sum y^2 = 1623$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ.

14 التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ.

15 في مجموعةِ بياناتٍ إحصائيةٍ، إذا كانَ: $n = 40$، وكانَ: $\sum x = 6400$، وكانَ: $\sum x^2 = 1400000$، فأجدُ الانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

قيسَتْ أطوالُ أقطارِ 8 حبّاتِ برتقالٍ بوحدةِ cm، وكانَتِ انحرافاتُ أطوالِ الأقطارِ عنْ وسطِها الحسابيِّ كما يأتي: $4, -2, 3, 3, -1, k, -5, 2$



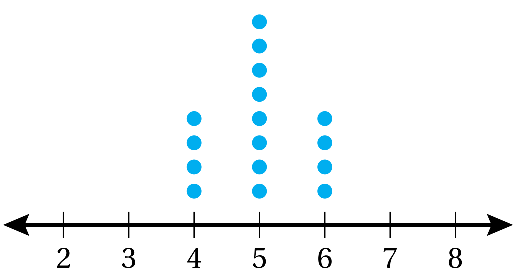
16 أجدُ قيمةَ الثابتِ k.

17 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ أقطارِ حبّاتِ البرتقالِ.

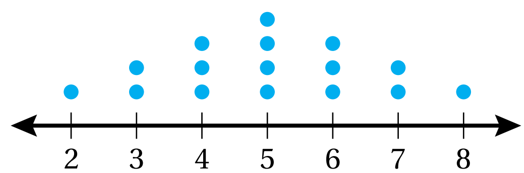
18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **تبريرٌ**: أيُّ التمثيلينِ النقطيينِ قيمةُ انحرافِهِ المعياريِّ أصغرُ: a أمْ b؟ أُبرِّرُ إجابتي منْ دونِ إيجادِ الانحرافِ المعياريِّ لكلِّ تمثيلٍ.



(a)



(b)

20 **تحدٍّ**: في مجموعةِ بياناتٍ إحصائيةٍ، إذا كانَ: $\sum(3x-1) = 53, n = 10$، فأجدُ $\sum x$.

21 **تبريرٌ**: هلْ يُمكِنُ أنْ يكونَ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ صفرًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

22 **تحدٍّ**: تمكَّنَ يوسفُ في لعبةٍ إلكترونيةٍ منْ إحرازِ النقاطِ الآتيةِ في المراحلِ الستِّ الأولى منَ اللعبةِ: 34, 54, 24, 37, 39, 42. أجدُ عددَ النقاطِ التي يتعيَّنُ على يوسفَ إحرازُها في المرحلةِ السابعةِ منَ اللعبةِ ليكونَ الانحرافُ المعياريُّ لنتائجِها في المراحلِ السبعِ هوَ: $10\sqrt{2}$.

الدرس 2

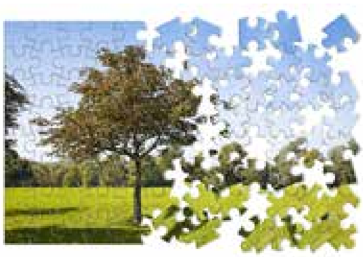
الجداولُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ
Frequency Tables with Class Intervals

فكرةُ الدرسِ

- تنظيمُ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
- تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.

مسألةُ اليومِ

في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي استغرقَتْهُ مجموعةٌ منَ الأطفالِ لإنهاءِ لعبةِ قطعِ التركيبِ:



103	90	84	114	83
185	124	108	92	77
162	61	176	74	89
65	91	79	63	49

1) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

2) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

أتذكَّرُ

البيانـاتُ المتصلـةُ هيَ بياناتٌ قِيَمُها المُمكِنةُ غيرُ قابلـةٍ للعَـدِّ، لكنَّها قابلةٌ للقياسِ، ويُمكِنُ تقريبُها لتُعطِيَ درجـةً منَ الدقَّةِ. ومِـنْ أمثلتِهـا: الطولُ، والكتلةُ، ودرجةُ الحرارةِ.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُسـتعمَلُ لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سـأتعلَّمُ كيفَ أُنشِـئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

رياضةٌ: في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) المُستغرَقُ في لعبِ 24 مباراةَ كرةِ تِنِسٍ:

186	129	93	66	104	216	126	102
90	145	77	98	138	194	73	54
176	110	94	181	165	87	55	238

1 **أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أصغرُ قيمةٍ في البياناتِ هيَ 54، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ 238.

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.

وبما أنَّ البياناتِ متصلةٌ، فإنَّني أستعملُ المتبايناتِ للتعبيرِ عنَ الفئاتِ كما في الجدولِ الآتي:

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنسِ (t)		
الزمنُ (min)	الإشاراتُ	التكرارُ
$40 \le t < 80$		
$80 \le t < 120$		
$120 \le t < 160$		
$160 \le t < 200$		
$200 \le t < 240$		

الخطوةُ 3: أضعُ إشــاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنسِ (t)		
الزمنُ (min)	الإشاراتُ	التكرارُ
$40 \le t < 80$	𝍸	5
$80 \le t < 120$	𝍸 III	8
$120 \le t < 160$	IIII	4
$160 \le t < 200$	𝍸	5
$200 \le t < 240$	II	2

2 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

أُلاحِظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ معظمَ المبارياتِ تستغرقُ زمنًا يتراوحُ بينَ 80 دقيقةً و200 دقيقةٍ، وأنَّ عددًا قليلًا منْها يستمرُّ أقلَّ منْ ذلكَ أوْ أكثرَ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

صحَّةٌ: في ما يأتي كتلُ 27 مشتركًا في نادٍ رياضيٍّ، مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرام:

57	50	75	86	40	55	72	67	53
65	60	53	48	79	82	73	68	64
70	75	69	70	63	45	56	61	67

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

أتعلَّمُ

يُفضَّلُ ألّا يقلَّ عددُ الفئاتِ المختارةِ عنْ 4 فئاتٍ، وألّا يزيدَ عددُها على 8 فئاتٍ، و لا يُشترَطُ أنْ يكونَ الحدُّ الأدنى للفئةِ الأولى هوَ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وإنَّما يجبُ أنْ تحتويَ الفئةُ الأولى على أصغرِ قيمةٍ في البياناتِ، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الفئةِ الأخيرةِ والقيمةِ الكبرى في البياناتِ.

أتذكَّرُ

يقعُ العددُ 40 ضمنَ الفئةِ: $40 \le t < 80$، في حينِ لا يقعُ العددُ 80 ضمنَ هذهِ الفئةِ.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ أيضًا لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ.

أتذكَّرُ

البياناتُ المنفصلةُ هيَ بياناتٌ تأخذُ قِيَمًا مُحدَّدةً قابلةً للعَدِّ، مثلَ: عددِ الأخوةِ، وعددِ الكتبِ، وعددِ الأشجارِ.

مثال 2 : منَ الحياةِ

مكتباتٌ: **في ما يأتي عددُ الكتبِ المُعارةِ منْ إحدى المكتباتِ العامّةِ في 18 يومًا:**

23 45 31 37 63 54 36 60 49

50 32 45 40 38 37 41 53 57

1 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

الخطوةُ 1: أحدِّدُ أقلَّ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أقلُّ قيمةٍ في البياناتِ هيَ: 23، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ: 63

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.

وبما أنَّ البياناتِ منفصلةٌ، فإنَّني أعبِّرُ عنها كما في الجدولِ الآتي:

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ		
عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29		
30 – 39		
40 – 49		
50 – 59		
60 – 69		

أتذكَّرُ

عندَ تنظيمِ البياناتِ المنفصلةِ بالفئاتِ، أجعلُ فجواتٍ بينَ الفئاتِ. فمثلًا: تنتهي الفئةُ الأولى عندَ العددِ 29، وتبدأُ الفئةُ الثانيةُ عندَ العددِ 30

الخطوةُ 3: أضعُ إشـــاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ		
عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29	|	1
30 – 39	~~||||~~ |	6
40 – 49	~~||||~~	5
50 – 59	||||	4
60 – 69	||	2

2 **أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.**

أُلاحِظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ نسبةَ الأيامِ الّتي أعارَتِ المكتبةُ فيها ما يتراوحُ بينَ 30 إلى 59 كتابًا في اليومِ الواحدِ تزيدُ على 80% منَ أيامِ الإعارةِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

بنــكُ الطعامِ الأردنيُّ: في ما يأتي عددُ الأُســرِ المحتاجةِ التي حصلَــتْ على وجباتٍ منْ بنكِ الطعامِ الأردنيِّ في 22 يومًا:

19	18	56	17	30	16	15	14	13	24	41
16	72	18	10	34	17	27	20	12	22	24

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ

معلومةٌ

يهدفُ بنكُ الطعامِ الأردنيُّ إلى القضاءِ على الجوعِ في الأردنِّ عنْ طريقِ توفيرِ الطعامِ للأُسَرِ المحتاجــةِ، ويهــدفُ أيضًا إلى نشــرِ الوعيِ حولَ كيفيةِ اســتغلالِ الفائضِ منَ الغذاءِ فــي المؤتمــراتِ والأفراحِ والمناســباتِ وإيصالــهِ إلى الفقراءِ والمحرومينَ.

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

تعلَّمْتُ ســابقًا إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، وهيَ: الوســطُ الحسابيُّ، والوسيطُ، والمنوالُ للبيانــاتِ المفردةِ. وبالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القِيَمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والوسيطِ، والمنوالِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ القِيَمِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ (سواءٌ كانَتِ البياناتُ متصلةً أوْ منفصلةً) على أساسِ أنَّ كُلًّا منْها تساوي منتصفَ الفئةِ (مركزُ الفئةِ).

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

مفهومٌ أساسيٌّ

- لتقديرِ الوســطِ الحســابيِّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x: مركزُ الفئةِ.

f: التكرارُ المُقابِلُ لكلِّ فئةٍ.

- لتقديرِ المنوالِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجدُ مركزَ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا.
- لتقديرِ وســيطِ بياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجــدُ مركزَ الفئةِ التي تكرارُها التراكميُّ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي : $\frac{n+1}{2}$ ، حيثُ n مجموعُ التكراراتِ.

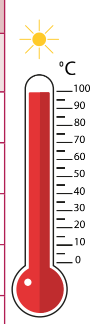
أتعلَّمُ

في هذا الدرس، أنظرُ إلى جميعِ البيانــاتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًــا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

طقسٌ: يُبيِّنُ الجــدولُ المجاورُ توزيعًا لأيامِ شــهرِ آذارَ بحســبِ درجاتِ الحرارةِ (إلى أقربِ درجةٍ سلسيةٍ) في محافظةِ عجلونَ:

درجاتُ الحرارةِ (T)	
درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	7
$14 \leq T < 16$	12
$16 \leq T < 18$	5
$18 \leq T < 20$	3



1 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ.

أُنشِــئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما مراكزَ الفئاتِ ونواتجَ ضربِ التكراراتِ في مراكزِ الفئاتِ على النحوِ الآتي:

درجاتُ الحرارةِ (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \leq T < 12$	3	11	33
$12 \leq T < 14$	7	13	91
$14 \leq T < 16$	12	15	180
$16 \leq T < 18$	5	17	85
$18 \leq T < 20$	3	19	57
المجموعُ	30		446

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{446}{30}$$ بالتعويضِ

$$\approx 14.9$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ هوَ 14.9 °C تقريبًا.

2 أُقدِّرُ منوالَ درجاتِ الحرارةِ.

لتقديرِ المنوالِ، أبحثُ عنْ مركزِ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا. وبالرجوعِ إلى البياناتِ في الجدولِ أعلاهُ، أُلاحِظُ أنَّ الفئةَ: $14 \leq t < 16$ تُقابِلُ أعلى تكرارٍ، وهوَ 12. وبذلكَ، فإنَّ المنوالَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، منوالُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

3 أُقدِّرُ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ.

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ المجاورِ.

درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ التراكميُّ
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \leq T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \leq T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \leq T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ رتبةَ الوسيطِ.

رتبةُ الوسيطِ هيَ: $\frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

بما أنَّ رتبةَ الوسيطِ هيَ 15.5 ، فإنَّ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ يقعُ في الفئةِ: $14 \leq t < 16$؛ لأنَّ التكرارَ التراكميَّ لهذهِ الفئةِ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي 15.5

وبذلكَ، فإنَّ الوسيطَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، وسيطُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

أتعلَّمُ

عندَ ترتيبِ المشاهداتِ تصاعديًّا بحسبِ قِيَمِها، فإنَّ رتبةَ المشاهدةِ هيَ ترتيبُ موقعِها في مجموعةِ البياناتِ. وبما أنَّ القِيَمَ الدقيقةَ للبياناتِ في هذا المثالِ غيرُ معلومةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحديدُ الفئةِ التي تقعُ فيها المشاهدةُ عنْ طريقِ رتبتِها، وإنشاءِ جدولِ تكرارٍ تراكميٍّ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

حلويـاتٌ: يُبيِّنُ الجـدولُ المجـاورُ توزيعًا لكتلِ كعكاتٍ في أحدِ المخابزِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ غرامٍ:

كتلُ الكعكاتِ (m)	
الكتلُ (g)	التكرارُ
$300 \le m < 400$	4
$400 \le m < 500$	7
$500 \le m < 600$	6
$600 \le m < 700$	3

a) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للكتلِ.

b) أُقدِّرُ منوالَ الكتلِ.

c) أُقدِّرُ وسيطَ الكتلِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أوراقٌ: في ما يأتي أطوالُ مجموعةٍ منْ أوراقِ الشجرِ بالسنتيمترِ:

7.0	8.6	11.5	10.2	7.9	5.4	16.3	8.5	13.2	9.8	6.3	11.4
8.7	10.4	12.6	17.2	14.8	11.2	8.5	10.7	8.7	9.9	12.1	8.7

1 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

2 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

مقـالاتٌ: فـي مـا يأتـي عـددُ الكلمـاتِ فـي مقـالاتٍ كتبَهـا الطلبـةُ المُتقدِّمـونَ لمسـابقةِ المقالـةِ القصيـرةِ:

496	498	532	496	500	502	483	511	495
503	514	508	526	518	487	521	503	499

3 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

4 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

عياداتٌ طبيةٌ: في ما يأتي أعمارُ المُراجِعينَ لعيادةٍ في أحدِ المستشفياتِ خلالَ أحدِ الأيامِ:

44	64	41	53	58	45	55	54	62	51
50	47	58	37	49	52	43	47	52	49
52	58	53	50	47	44	56	62	51	58

5 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

6 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

7 أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ، بحيثُ أختارُ فئاتٍ ذاتَ أطوالٍ تختلفُ عنْ أطوالِ الفئاتِ في السؤالِ 5، ثمَّ أُحدِّدُ الجدولَ الذي تُعرَضُ فيهِ البياناتُ بصورةٍ أفضلَ.

أزهارٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ منْ أزهارِ النرجسِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$10 \leq t < 14$	21
$14 \leq t < 18$	57
$18 \leq t < 22$	65
$22 \leq t < 26$	52
$26 \leq t < 30$	12

8 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهارِ.

9 أُقدِّرُ منوالَ أطوالِ الأزهارِ.

10 أُقدِّرُ وسيطَ أطوالِ الأزهارِ.

كتبٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا منْ مكتبةِ زيادٍ في أحدِ الأيامِ:

عددُ الكتبِ المَبيعةِ	
عددُ الكتبِ	التكرارُ
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

11 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ.

12 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ.

13 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

14 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: اختبرَ قســمُ الجودةِ في مصنـعٍ لإنتاجِ المصابيــحِ الكهربائيةِ 100 مصباحٍ لتعرُّفِ إذا كانَ مُتوسِّطُ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ أكثرَ منْ 200 ساعةٍ، ثمَّ نظَّمَ النتائجَ التي توصَّلَ إليْها في الجدولِ المجاورِ:

العمرُ الافتراضيُّ للمصابيحِ (h)	
التكرارُ	العمرُ (h)
24	$150 \leq h < 175$
45	$175 \leq h < 200$
18	$200 \leq h < 225$
10	$225 \leq h < 250$
3	$250 \leq h < 275$

15 أُقدِّرُ منوالَ أعمارِ المصابيحِ.

16 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لأعمارِ المصابيحِ.

17 أجدُ النسبةَ المئويةَ للمصابيحِ التي عمرُها الافتراضيُّ أكثرُ منْ أوْ يساوي 200 ساعةٍ، مُبرِّرًا إجابتي.

18 هلْ يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ مُتوسِّطَ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ هوَ أكثرُ منْ 200 ساعةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

19 **أكتشفُ الخطأَ:** في ما يأتي عددُ الدقائقِ (مُقرَّبةً إلى أقربِ دقيقةٍ) التي استغرقَها بعضُ المُتسابِقينَ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

55	60	61	59	58	53	52	59	55	57	54
54	61	58	57	58	54	58	57	60	59	57

نظَّمَ كلٌّ منْ رامي وفيصلٍ البياناتِ كما هوَ مُبيَّنٌ تاليًا. أيُّهُما نظَّمَ البياناتِ بصورةٍ صحيحةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

رامي
$52 - 54$
$55 - 57$
$58 - 60$
$61 - 63$

فيصلٌ
$52 \leq t < 54$
$54 \leq t < 56$
$56 \leq t < 58$
$58 \leq t < 60$
$60 \leq t < 62$

20 **تبريرٌ:** يتدرَّبُ لاعبٌ يوميًّا على سباقِ طويلِ المسافةِ (الماراثونُ) طولُهُ 21 km. يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا للمســافةِ (إلى أقربِ كيلومترٍ) التي يقطعُها اللاعبُ كلَّ يومٍ خلالَ شهرٍ كاملٍ. إذا وجدَ اللاعبُ أنَّهُ منَ الأفضلِ أنْ يقطعَ مسافةً كلَّ يومٍ تُعادِلُ في مُتوسِّطِها ثلثَ مسافةِ السباقِ، فهلْ يعني ذلكَ أنَّهُ تدرَّبَ بصورةٍ كافيةٍ في هذا الشهرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

التكرارُ	المسافةُ (km)
3	$0 \leq d < 5$
8	$5 \leq d < 10$
13	$10 \leq d < 15$
5	$15 \leq d < 20$
2	$20 \leq d < 25$

الدرس 3

المُدرَّجاتُ التكرارية
Histograms

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ البياناتِ المتصلةِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ.

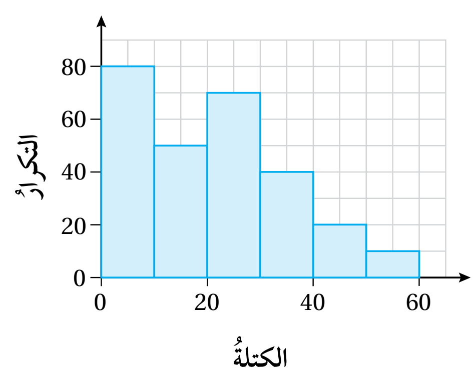
المصطلحاتُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ، الكثافةُ التكراريةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لمجموعةٍ منَ الشققِ السكنيةِ في إحدى المناطقِ تبعًا لمساحةِ كلٍّ منْها. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ مُخطَّطٍ تكراريٍّ.

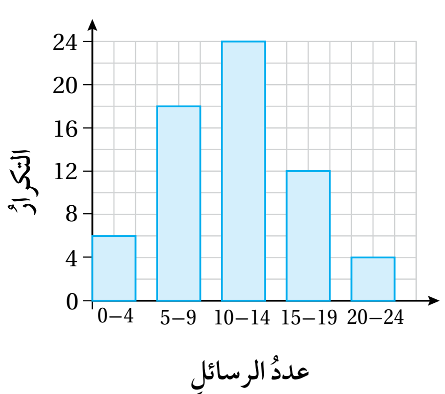
التكرارُ	المساحةُ (m^2)
15	$70 \leq t < 100$
18	$100 \leq t < 150$
12	$150 \leq t < 250$
6	$250 \leq t < 300$

المُدرَّجاتُ التكرارية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُخطَّطاتِ التكراريةَ هيَ أكثرُ الطرائقِ شيوعًا لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ والمنفصلةِ والمُمثَّلةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.



أستعملُ تدريجًا متصلًا للبياناتِ المتصلةِ.



أستعملُ تدريجًا منفصلًا للبياناتِ المنفصلةِ.

يُطلَقُ على المُخطَّطاتِ التكراريةِ المُستعمَلةِ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ اسمُ **المُدرَّجاتِ التكراريةِ** (histograms). سأتعلَّمُ في هذا الدرسِ تمثيلَ نوعينِ منْها، هما: المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ، والمُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ.

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ أصلًا، حتى لو كانَتْ قِيَمُها مُقرَّبةً إلى أعدادٍ صحيحةٍ.

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ

عنـدَ تمثيلِ البياناتِ العدديـةِ المتصلةِ والمُجمَّعـةِ في فئاتٍ بمُدرَّجـاتٍ تكراريةٍ عنْ طريقِ استعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ، يجبُ استعمالُ تدريجٍ متصلٍ على المحورِ الأفقيِّ، وهذا يعني عدمَ وجودِ فراغاتٍ بينَ أعمدةِ المُدرَّجِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

أطوالٌ: في ما يأتي أطوالُ 50 طالبًا، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

145	157	160	148	160	177	156	155	166	166
170	162	160	142	152	155	159	172	152	162
180	152	175	155	170	163	144	173	150	154
136	162	154	164	155	182	147	168	155	170
160	175	163	175	144	160	160	142	158	180

1 **أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.**

الخطـوةُ 1: أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

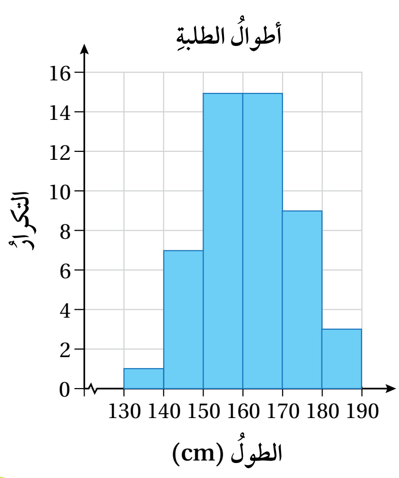
أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها. بعدَ ذلكَ أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

الخطوةُ 2: أرسـمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسـفلَ المحورِ الأفقـيِّ، ثمَّ أضعُ تدريجًا مناسبًا للمحورِ الرأسيِّ.

الخطـوةُ 3: أُسمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.

الخطوةُ 4: أرسـمُ عمودًا يُمثِّـلُ ارتفاعُهُ تكرارَ كلِّ فئةٍ.

أطوالُ الطلبةِ (h)	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$130 \le h < 140$	1
$140 \le h < 150$	7
$150 \le h < 160$	15
$160 \le h < 170$	15
$170 \le h < 180$	9
$180 \le h < 190$	3



أتذكَّرُ

إذا بـدأَتِ البياناتُ بعددٍ أكبـرَ منَ الصفـرِ، فإنَّني أبدأُ التدريجَ على المحورِ بعـددٍ أكبرَ مـنَ الصفرِ، مشـيرًا إلى ذلـكَ بخطٍّ مُتعرِّجٍ ⩘ .

2 **أكتبُ وصفًا للبياناتِ.**

تقعُ أطوالُ أكثرَ منْ نصفِ الطلبةِ بينَ 150 cm و 170 cm، في حينِ أنَّ طولَ عددٍ قليلٍ منْهُمْ يكونُ أكثرَ منْ 180 cm، أوْ أقلَّ منْ 140 cm.

أتحقَّقُ منْ فهمي

وقتٌ: في مـا يأتي الزمنُ (مُقرَّبًـا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي تسـتغرقُهُ 30 طالبـةً للوصولِ إلى المدرسةِ:

4	33	56	28	34	7	55	29	18	6
41	4	53	26	43	7	23	33	41	2
17	22	47	17	26	3	17	16	46	32

a) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

b) أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ

فـي بعضِ الأحيانِ، تُجمَّعُ البياناتُ المتصلةُ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ غيرِ متسـاويةٍ في الطولِ. وفي هــذهِ الحالةِ، يتعيَّنُ تمثيلُ هذهِ البياناتِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ غيرِ مُتسـاويةِ الطولِ. ولكنْ، إذا مُثِّلَتِ البياناتُ باسـتعمالِ تكراراتِها، فإنَّ التمثيلَ الناتجَ يكونُ مُضلِّلًا؛ لأنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ لا تكونُ متناسـبةً معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ. وهنا تظهرُ الحاجةُ إلى إيجادِ **الكثافةِ التكراريةِ** (frequency density) لكلِّ فئةٍ، وذلكَ بقسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها كما يأتي:

$$\text{(الكثافةُ التكراريةُ)} = \frac{\text{(تكرارَ الفئةِ)}}{\text{(طولِ الفئةِ)}}$$

عندَ تمثيلِ الجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ المتسـاويةِ في الطولِ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ، فإنَّ المحورَ y يُسمّى الكثافةَ التكراريةَ، وإنَّ ارتفاعَ كلِّ عمودٍ يُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ لفئتِهِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِـظُ أنَّ النسـبةَ بينَ مسـاحاتِ الأعمـدةِ في المثالِ 1 هيَ: 10:70:150:150:90:30، وأنَّ النسبةَ بينَ التكراراتِ هيَ: 3 : 9 : 15 : 15 : 7 :1، وهذا يعنـي أنَّ النسـبةَ بينَ مسـاحاتِ الأعمدةِ متناسـبةٌ معَ النسـبةِ بينَ التكـراراتِ، وسـألحظُ أهميـةَ ذلكَ فـي المثالِ التالي.

مثال 2 : منَ الحياةِ

أحياءٌ: قاسَتْ عالِمةُ أحياءٍ أطوالَ 48 دودةَ أرضٍ، ثمَّ نظَّمَتِ البياناتِ التي توصَّلَتْ إليْها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	الطولُ (cm)
6	$15 \leq t < 20$
14	$20 \leq t < 30$
26	$30 \leq t < 40$
2	$40 \leq t < 60$

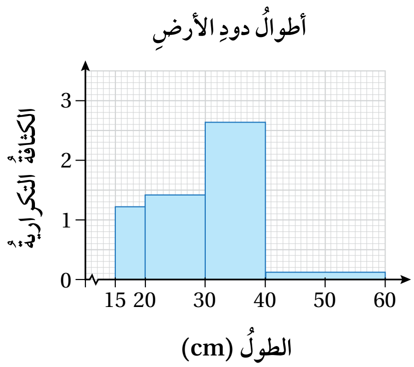
الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما أطوالَ الفئاتِ والكثافةَ التكراريةَ على النحوِ الآتي:

الكثافةُ التكراريةُ	طولُ الفئةِ	التكرارُ	الطولُ (cm)
1.2	5	6	$15 \leq t < 20$
1.4	10	14	$20 \leq t < 30$
2.6	10	26	$30 \leq t < 40$
0.1	20	2	$40 \leq t < 60$

أتعلَّمُ

طولُ الفئةِ الأولى هوَ: $20 - 15 = 5$. وبالطريقةِ نفسِها يُمكِنُ إيجادُ أطوالِ بقيةِ الفئاتِ.

الخطوةُ 2: أرسمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسفلَ المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أضعُ تدريجًا مناسبًا للمحورِ الرأسيِّ.



الخطوةُ 3: أُسمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.

الخطوةُ 4: أرسمُ عمودًا يُمثِّلُ ارتفاعُهُ الكثافةَ التكراريةَ لكلِّ فئةٍ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

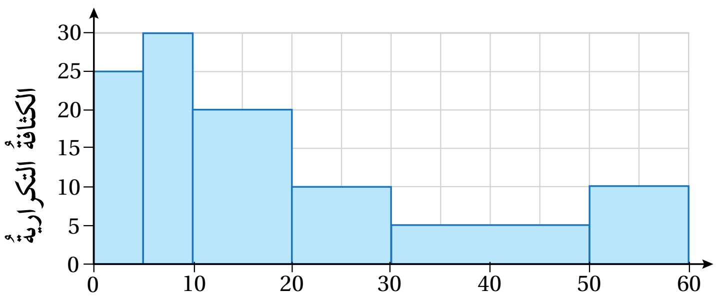
تلفازٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ (بالساعاتِ) الذي يستغرقُهُ 100 شخصٍ يوميًّا في مشاهدةِ التلفازِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	الزمنُ (h)
5	$0 \leq h < 0.5$
35	$0.5 \leq h < 1$
56	$1 \leq h < 2$
4	$2 \leq h < 3$

يُمكِنُ استعمالُ المُدرَّجاتِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ لتفسيرِ البياناتِ التي يُمثِّلُها المُدرَّجُ التكراريُّ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

مكالماتٌ: أُجرِيَ مسحٌ على مجموعةٍ منَ الأشخاصِ لتحديدِ مُدَدِ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ الأخيرةِ، ثمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليْها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ الآتي:



1 كمْ شخصًا شاركَ في عمليةِ المسحِ؟

بما أنَّ ارتفاعاتِ الأعمدةِ لا تُمثِّلُ التكراراتِ، وإنَّما تُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ للفئةِ، فإنَّهُ يتعيَّنُ إيجادُ تكرارِ كلِّ فئةٍ، وذلكَ بإيجادِ مساحةِ كلِّ عمودٍ، علمًا بأنَّ مجموعَ هذهِ المساحاتِ يُمثِّلُ عددَ الأشخاصِ الذينَ شاركوا في عمليةِ المسحِ:

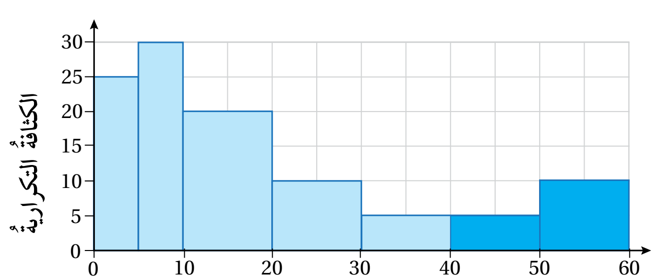
$$A = (25 \times 5) + (30 \times 5) + (20 \times 10) + (10 \times 10) + (5 \times 20) + (10 \times 10)$$ مجموعُ مساحاتِ الأعمدةِ

$$= 775$$ بالتبسيطِ

إذنْ، شاركَ في عمليةِ المسحِ 775 شخصًا.

2 أجدُ عددَ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً.

لإيجادِ عددِ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً، أجدُ مساحةَ العمودينِ المُظلَّلينِ باللونِ الأزرقِ الغامقِ في الشكلِ المجاورِ:



أتعلَّمُ

بما أنَّ الكثافةَ التكراريةَ تُمثِّلُ ناتجَ قسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ تكرارِ الفئةِ بضربِ الكثافةِ التكراريةِ للفئةِ في طولِ الفئةِ، وهذا يُمثِّلُ مساحةَ العمودِ المُمثِّلِ للفئةِ.

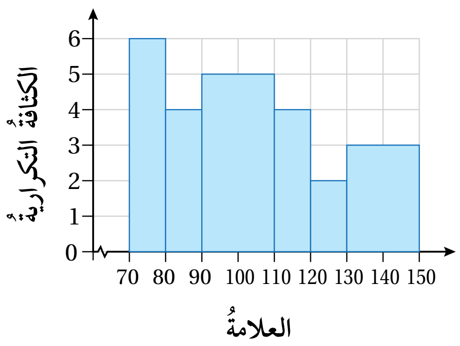
مجموعُ مساحتيِ العمودينِ $A = (10 \times 5) + (10 \times 10)$

بالتبسيطِ $= 150$

إذنْ، عددُ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً هوَ 150 شخصًا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

علاماتٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكـــراريُّ المجاور علاماتِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في اختبارٍ نهايتُهُ العظمى هيَ 150:



a) كمْ طالبًا تقدَّمَ للاختبارِ؟

b) أجدُ عددَ الطلبةِ الذيـــنَ تزيدُ علاماتُهُمْ على 124.

c) أجدُ عددَ الطلبةِ الذينَ تقعُ علاماتُهُمْ بينَ 100 و130.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

سباقاتٌ: في ما يأتي الزمنُ (بالثواني) الذي تستغرقُهُ مجموعةٌ منَ الطلبةِ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

52 63 81 66 75 59 77 66 80 64 72 78 58 61 68 72 76 66

74 79 65 82 87 91 68 77 75 86 81 70 93 68 74 80 68 84

1) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

2) أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

3) أطوالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ أطوالَ مجموعةٍ منَ الطالباتِ بالسنتيمترِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

الطولُ (h)	التكرارُ
$120 \leq h < 130$	8
$130 \leq h < 140$	12
$140 \leq h < 150$	10
$150 \leq h < 160$	7

4 **درجاتُ حــرارةٍ:** يُبيِّنُ الجــدولُ التكراريُّ المجــاورُ توزيعَ درجاتِ الحرارةِ (بالسلســيوس) خــلالَ 50 يومًا في إحدى المناطــقِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	درجةُ الحرارةِ (t)
6	$8 \leq t < 10$
13	$10 \leq t < 12$
18	$12 \leq t < 15$
4	$15 \leq t < 17$
3	$17 \leq t < 20$
6	$20 \leq t < 24$

أُمثِّلُ البياناتِ في كلٍّ منَ الجدولينِ التكراريينِ الآتيينِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

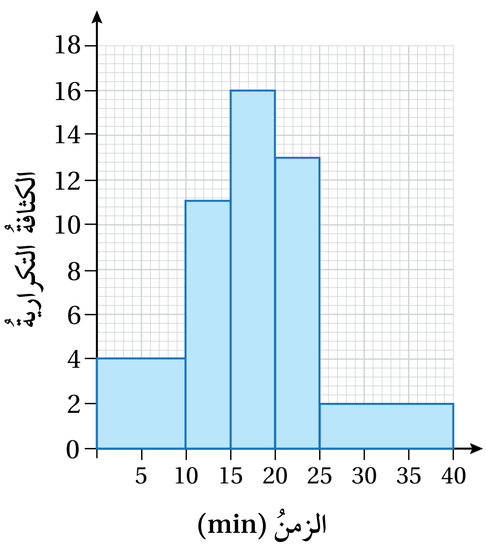
5

الزمنُ	$0 \leq t < 8$	$8 \leq t < 12$	$12 \leq t < 16$	$16 \leq t < 20$
التكرارُ	72	84	54	36

6

العمرُ (بالعامِ)	$11 \leq a < 14$	$14 \leq a < 16$	$16 \leq a < 17$	$17 \leq a < 20$
التكرارُ	51	36	12	20

شــركاتٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ المجــاورُ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي يستغرقُهُ موظفو إحدى الشركاتِ للوصولِ إلى مكانِ العملِ:



7 أجدُ عددَ موظفي الشركةِ.

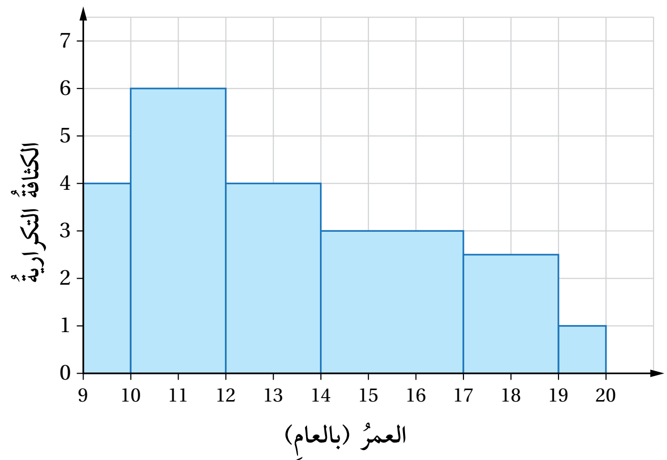
8 أجدُ عددَ الموظفينَ الذيــنَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بأقلَّ منْ 15 دقيقةً.

9 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يستغرقُ وصولُهُمْ إلى مكانِ العملِ زمنًا يتراوحُ بينَ 20 دقيقةً و 30 دقيقةً.

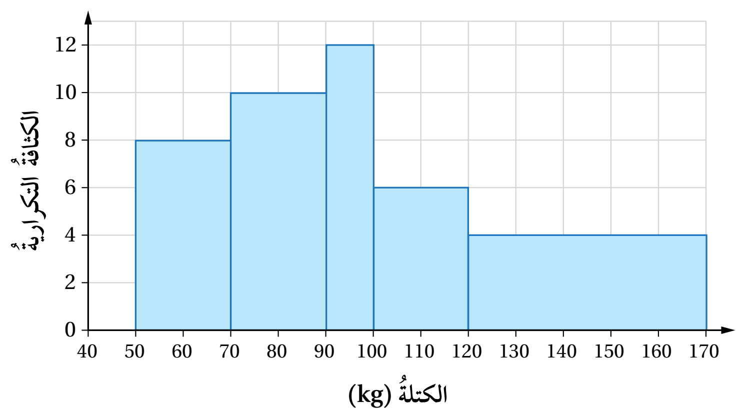
10 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بزمنٍ أكثرَ منْ 30 دقيقةً.

أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلٍّ منَ المُدرَّجاتِ التكراريةِ الآتيةِ:

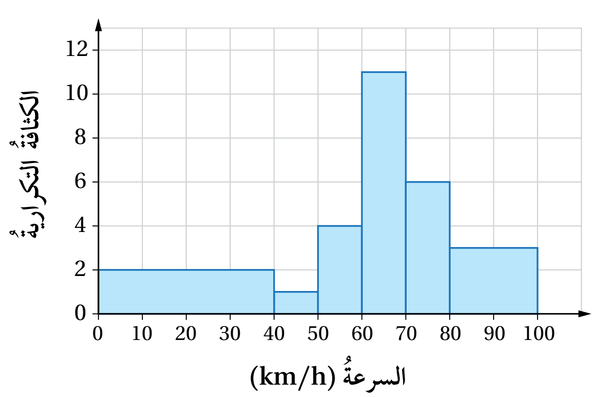
11



12



سرعةٌ: أُجرِيَ مسحٌ لتعرُّفِ سرعةِ السيّاراتِ التي تمرُّ منْ نقطةٍ مُعيَّنةٍ على إحدى الطرقِ السريعةِ، ثمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليْها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ.



13 أملأُ الفراغَ في الجدولِ الآتي بناءً على التمثيلِ بالمُدرَّجِ التكراريِّ أعلاهُ.

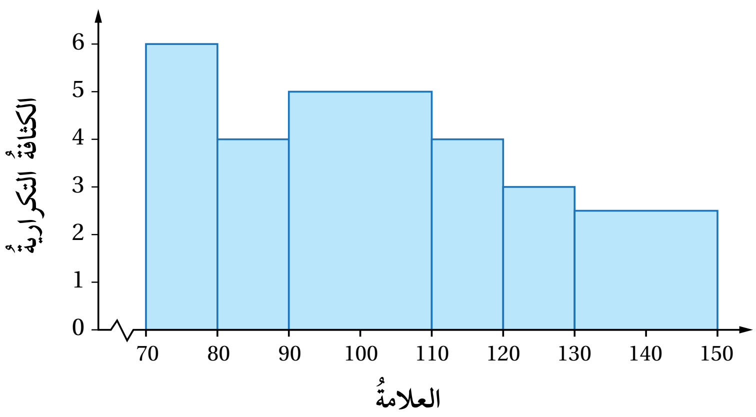
السرعةُ	$0 \le y < 40$	$40 \le y < 50$	$50 \le y < 60$	$60 \le y < 70$	$70 \le y < 80$	$80 \le y < 100$
التكرارُ		10	40	110		

14 أجدُ عددَ السيّاراتِ التي أُجرِيَ عليْها المسحُ.

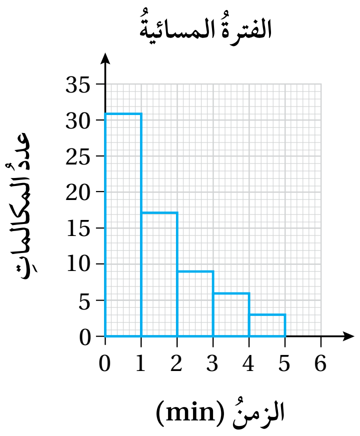
15 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

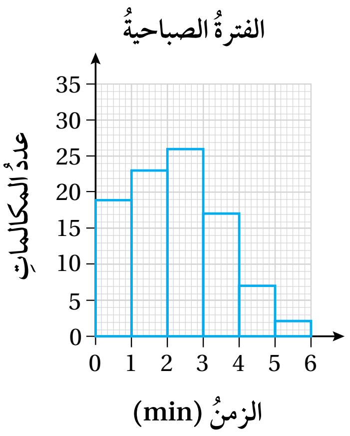
مهاراتُ التفكيرِ العليا

16 **تبريـرٌ:** يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي علاماتِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في أحدِ الاختباراتِ. إذا كانَتْ علامةُ النجاحِ في الاختبارِ هيَ 90، فأجدُ نسبةَ الطلبةِ الذينَ أخفقوا في الاختبارِ، مُبرِّرًا إجابتي.



تحـدٍّ: يُسـجِّلُ برنامـجُ حاسـوبٍ فـي إحـدى المؤسسـاتِ الزمـنَ (بالدقائـقِ) الـذي ينتظـرُهُ المتصلـونَ قبـلَ الـردِّ علـى مكالماتِهِـمْ فـي الفتـرةِ الصباحيـةِ والفترةِ المسـائيةِ. وقدْ مُثِّلَتِ البيانـاتُ التي سـجلَّها البرنامجُ في أحدِ الأيـامِ بالمُدرَّجينِ التكراريـينِ الآتيينِ:





17 أجدُ عددَ المكالماتِ التي انتظرَ فيها المتصلونَ أكثرَ منْ 4 دقائقَ قبلَ الردِّ عليْهِمْ في الفترةِ الصباحيةِ منْ ذلكَ اليومِ.

18 أجدُ نسبةَ المكالماتِ التي رُدَّ فيها على المتصلينَ خلالَ ما لا يزيدُ على دقيقتينِ في ذلكَ اليومِ.

الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

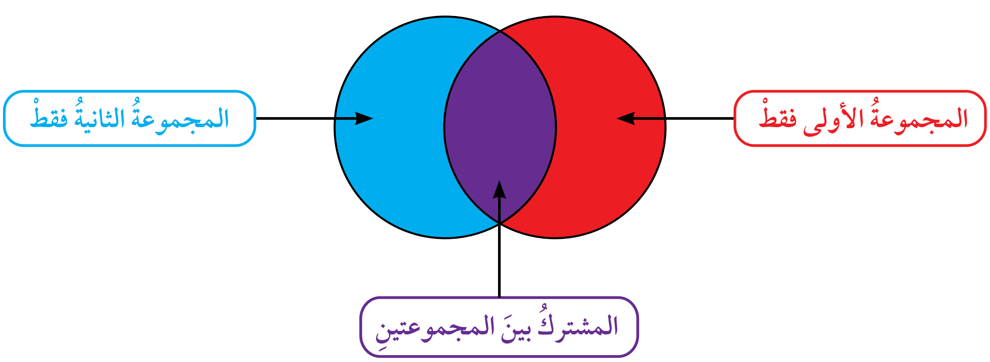
فكرةُ الدرسِ إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ.

المصطلحاتُ الحادثُ المُتمِّمُ، الحوادثُ المتنافيةُ، الحوادثُ الشاملةُ.

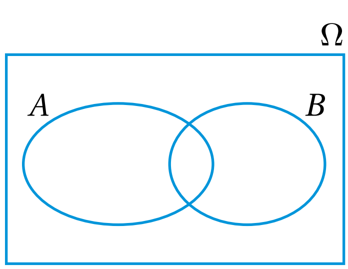
مسألةُ اليومِ يدرسُ 120 طالبًا في معهدِ لغاتٍ، منْهُمْ 75 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ، و35 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الإسبانيةَ، و10 طلبةٍ يدرسونَ اللغتينِ معًا. إذا اختيرَ طالبٌ منَ المعهدِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممَّنْ يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ فقطْ؟

التعبيرُ بالرموزِ عنْ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أشكالَ ڤِنْ، واستعملْتُها لتمثيلِ البياناتِ؛ وذلكَ بتنظيمِها في مجموعتينِ أوْ أكثرَ باستعمالِ منحنياتٍ مُغلَقةٍ مُتداخِلةٍ (متقاطعةٌ)؛ إذْ يُشكِّلُ كلُّ منحنٍ مجموعةً مستقلةً منَ البياناتِ، ويُمثِّلُ الجزءُ المُتداخِلُ بينَ المنحنيينِ البياناتِ المشتركةَ بينَ المجموعتينِ.



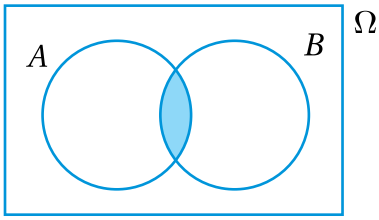
يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ ڤِنْ للتعبيرِ عنْ حوادثِ تجربةٍ عشوائيةٍ بيانيًّا، وذلكَ لتسهيلِ إيجادِ احتمالاتِ هذهِ الحوادثِ. فمثلًا، إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُهُما باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ، وذلكَ برسمِ مستطيلٍ يُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ، ثمَّ رسمِ منحنى مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ A، ورسمِ منحنى آخرَ مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ B.



رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ Ω للدلالةِ على الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ، وهوَ مجموعةُ النواتجِ التي يُتوقَّعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشوائيةٍ ما، ويُقرَأُ: أوميجا.

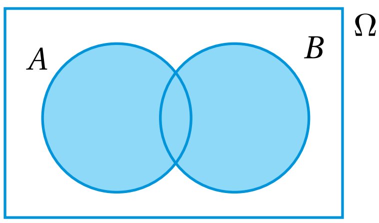
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في شــكلِ ڤِنْ المجاورِ تقاطعَ الحــادثِ A والحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْها بالرمزِ $A \cap B$.



أتعلَّم

تقاطــعُ الحــادثِ A والحــادثِ B يعنــي وقوعَهُما معًا.

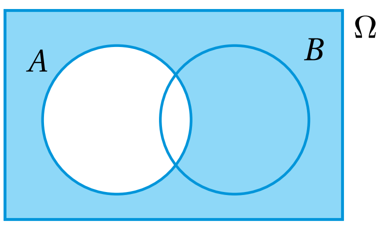
أمّا المنطقةُ المُظلَّلةُ في شــكلِ ڤِــنْ المجاورِ فتُمثِّلُ اتحادَ الحادثِ A والحــادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْها بالرمزِ $A \cup B$.



أتعلَّم

اتحــادُ الحــادثِ A والحــادثِ B يعني وقوعَ الحــادثِ A، أوْ وقــوعَ الحــادثِ B، أوْ وقــوعَ الحادثينِ معًا.

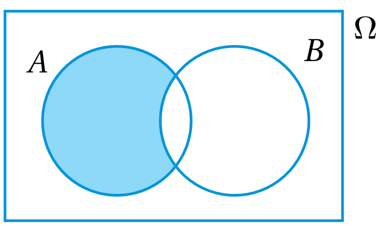
في حينِ تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشــكلِ المجاورِ **الحادثَ المُتمِّمَ** (complement event) للحادثِ A، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $\overline{A}$.



أتعلَّم

لأيِّ تجربــةٍ عشــوائيةٍ، فإنَّ $\overline{A}$ يعني عــدمَ وقوعِ الحادثِ A.

وأمّا الحادثُ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشكلِ المجــاورِ فهوَ وقوعُ الحادثِ A فقــطْ، وعدمُ وقوعِ الحادثِ B، ويُمكِــنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $A-B$.



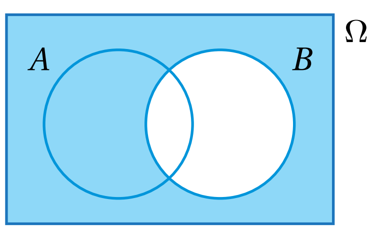
أتعلَّم

يُمكِنُ أيضًــا التعبيرُ عنِ الحــادثِ A-B بالرمــزِ $A \cap \overline{B}$.

مثال 1

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ أشكالِ ڤِنْ الآتيةِ:

1

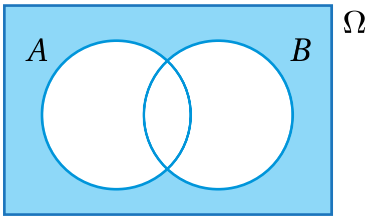


أُلاحِظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلةَ تُعبِّرُ عنْ مُتمِّمةِ الحــادثِ B؛ لــذا يُمكِنُ التعبيــرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{B}$.

أُفكِّرُ

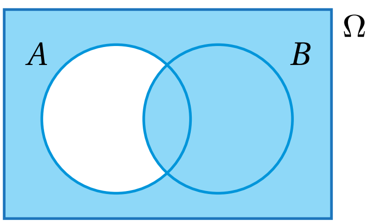
هلْ يُمكِنُ التعبيرُ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ بالرموزِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2



أُلاحِظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلةَ تُعبِّرُ عنْ عدمِ وقوعِ اتحادِ الحادثِ A والحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{A \cup B}$.

3

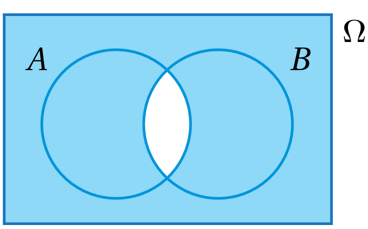


أُلاحِظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلةَ تُعبِّرُ عنِ اتحادِ الحادثِ المُتمِّمِ للحادثِ A والحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\bar{A} \cup B$.

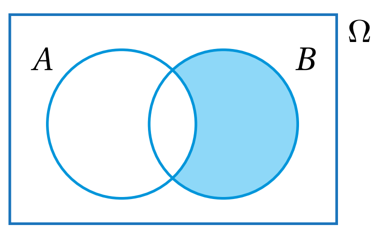
أتحقَّقُ منْ فهمي

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ شكليْ ڤِنْ الآتيينِ:

a)



b)



إيجادُ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ.

$$P(A) = \frac{(\text{عددَ عناصرِ الحادثِ } A)}{(\text{عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ})}$$

بما أنَّ الفضاءَ العينيَّ Ω هوَ مجموعةٌ تحوي جميعَ النواتجِ التي يُتوقَّعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ احتمالَ الفضاءِ العينيِّ هوَ 1؛ أيْ إنَّ $P(\Omega) = 1$. ولهذا، فإنَّ احتمالَ الحادثِ المُتمِّمِ لأيِّ حادثٍ في الفضاءِ العينيِّ، مثلَ A، هوَ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

رموزٌ رياضيةٌ

يشيرُ الرمزُ $P(A)$ إلى احتمالِ وقوعِ الحادثِ A، علمًا بأنَّ الحرفَ P هوَ اختصارٌ لكلمةِ (Probability) التي تعني الاحتمالَ.

مفهومٌ أساسيٌّ

احتمالُ الحادثِ المُتمِّمِ

بالكلماتِ: احتمــالُ وقوعِ الحادثِ المُتمِّــمِ للحادثِ A هوَ 1 ناقــصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

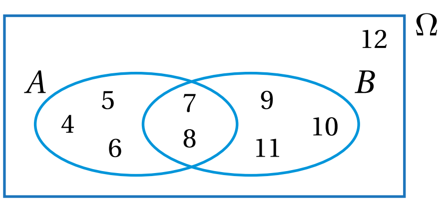
بالرموزِ: لأيِّ حادثٍ (A) في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

يُمكِنُ استعمالُ المفاهيمِ السابقةِ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ فِنْ.

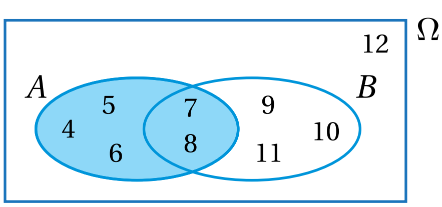
مثال 2

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ مِنْ 4 إلى 12 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثُمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



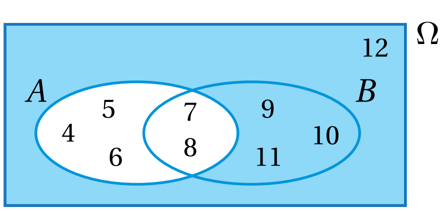
1 $P(A)$

بما أنَّ عــددَ عناصرِ الفضــاءِ العينيِّ هوَ 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هوَ 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:



$$P(A) = \frac{5}{9}$$

2 $P(\bar{A})$



$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$= 1 - \frac{5}{9}$ بالتعويضِ

$= \frac{4}{9}$ بالتبسيطِ

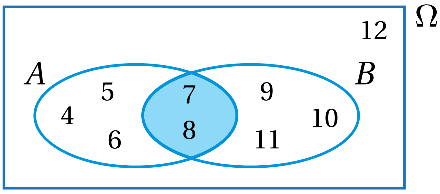
أُفكِّرُ

أَصِــفُ الحــادثَ A بالكلماتِ.

أتعلَّمُ

يظهــرُ فــي الشــكلِ المجــاورِ أنَّ مُتمِّمــةَ A تحوي 4 عناصــرَ، هيَ: $\{9, 10, 11, 12\}$؛ لــذا، فإنَّ احتمالَها هوَ $\frac{4}{9}$

3 $P(A \cap B)$



بما أنَّ $A \cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ A والحادثِ B معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 2 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

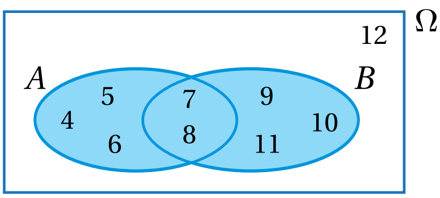
إذنْ:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

أُفكِّرُ

أَصِفُ الحادثَ B بالكلماتِ.

4 $P(A \cup B)$

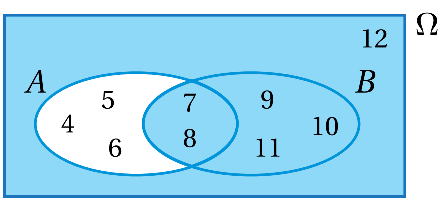


بما أنَّ $A \cup B$ يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثينِ معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 8 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{9}$$

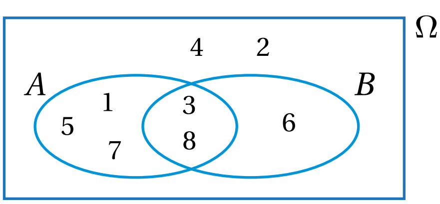
5 $P(\bar{A} \cup B)$



بما أنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 6 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{6}{9}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 8 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

a) $P(B)$ **b)** $P(\bar{B})$ **c)** $P(A \cap B)$ **d)** $P(A - B)$

استعمالُ أشكالِ فِنْ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ

يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ فِنْ لتســهيلِ إيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ تُمثِّلُ مواقفَ حياتيةً.

مثال 3 : منَ الحياةِ

اختبــاراتٌ: تقــدَّمَ 200 طالبٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاســعِ في إحدى المدارسِ لامتحانٍ وطنيٍّ يقيــسُ قدراتِهِمْ في مادتيِ اللغةِ العربيةِ والرياضياتِ. نجحَ منْ هؤلاءِ الطلبةِ 162 طالبًا في مادةِ اللغةِ العربيــةِ، و137 طالبًا في مادةِ الرياضياتِ. أمّا عددُ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا فبلغَ 121 طالبًا:

1 **أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ فِنْ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ الحوادثَ المذكورةَ في التجربةِ العشوائيةِ.

أفتــرِضُ أنَّ A هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مــادةِ اللغةِ العربيةِ، وأنَّ M هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مادةِ الرياضياتِ.

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ والحوادثَ بشكلِ فِنْ.

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ (A):

$$162 - 121 = 41$$

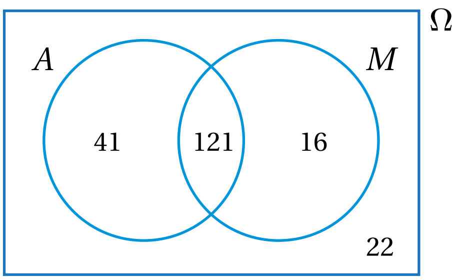
- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ (M):

$$137 - 121 = 16$$

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الذينَ لمْ ينجحوا في أيٍّ منَ المادتينِ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا، منَ العددِ الكليِّ للطلبةِ:

$$200 - (41 + 16 + 121) = 200 - 178 = 22$$

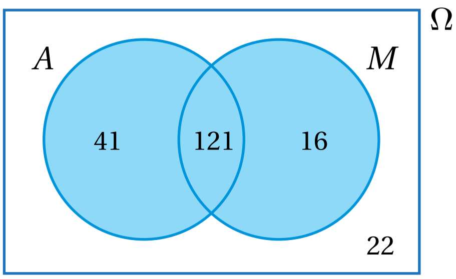
- أُمثِّلُ هذهِ البياناتِ بشكلِ فِنْ كالآتي:



أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ التـي لا ينتمي أيٌّ منْهـا إلـى الحادثينِ تقعُ خارجَ الدائرتينِ.

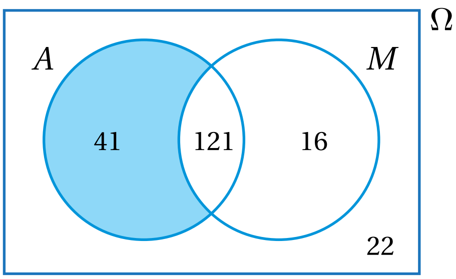
2 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في إحدى المادتينِ على الأقلِّ.**



إنَّ كلمتيْ (على الأقلِّ) في السؤالِ تشيرانِ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثِ A والحادثِ M كما في الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A \cup M) = \frac{178}{200}$$

3 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشـوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ.**



إنَّ احتمـالَ أنْ يكونَ الطالـبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقـطْ يعني إيجادَ احتمالِ المنطقةِ المُظلَّلةِ في شكلِ فِنْ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A - M) = \frac{41}{200}$$

أتذكَّرُ

إنَّ حادثَ نجاحِ الطالبِ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ يعني عدمَ نجاحِهِ في مادةِ الرياضياتِ، وهوَ ما يُعبَّرُ عنْـهُ بالرمـزِ $A-M$ أوِ الرمزِ $A \cap \overline{M}$.

أتحقَّقُ من فهمي

صفاتٌ وراثيةٌ: يوجدُ في أحدِ الصفوفِ 30 طالبةً، منْهُنَّ 16 طالبةً منْ ذواتِ الشـعـرِ الأسـودِ، و11 طالبةً لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ، و7 طالباتٍ لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ وشعرُهُنَّ أسودُ:

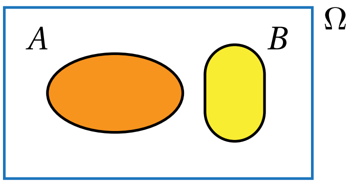
a) أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ فِنْ.

b) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ شعرُها أسودَ، أوْ لونُ عينيها بُنِّيًّا.

c) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ لونُ عينيها بُنِّيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

d) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ ألّا يكونَ لونُ عينيها بُنِّيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

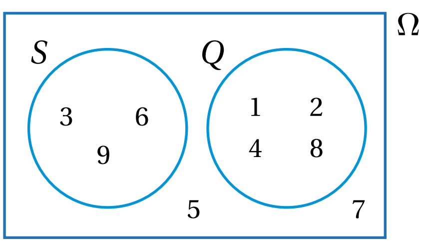
الحوادثُ المتنافيةُ



الحادثانِ A و B متنافيانِ

الحوادثُ المتنافيةُ (mutually exclusive events) هيَ الحوادثُ التي لا يُمكِنُ وقوعُها معًا؛ ما يعني عدمَ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَها. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ مَرَّةً واحدةً، فإنَّ حادثَ ظهورِ العددِ 5 لا يُمكِنُ أنْ يقعَ معَ حادثِ ظهورِ العددِ 6 في الوقتِ نفسِهِ، وهذا يعني أنَّ تقاطعَهُما هوَ $\varnothing$، وأنَّ احتمالَ تقاطعِهِما هوَ صفرٌ.

مثال 4



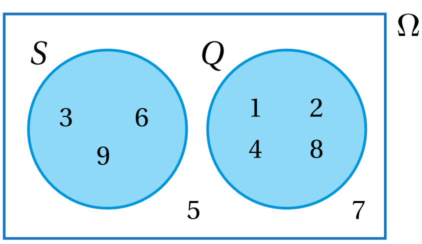
كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ Q و S في شكلِ قِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

1 $P(S \cap Q)$

أُلاحِظُ منْ شكلِ قِنْ أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا توجدُ عناصرُ مشتركةٌ بينَهُما. إذنْ:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

2 $P(S \cup Q)$

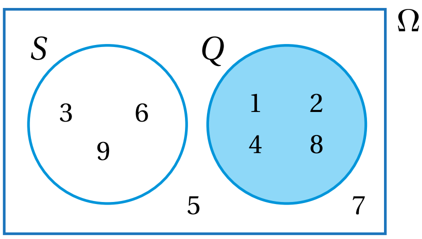


بما أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $S \cup Q$ يعني وقوعَ الحادثِ S فقط، أوْ وقوعَ الحادثِ Q فقط؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 7 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ، احتمالُ الحادثِ $S \cup Q$ هوَ:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

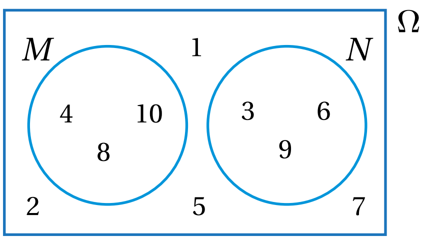
3 $P(Q-S)$



بما أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $Q-S$ يعني وقوعَ الحادثِ Q فقط؛ لأنَّهما لا يقعانِ معًا كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(Q-S) = \frac{4}{9}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 10 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ M و N في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

a) $P(M \cap N)$ b) $P(M \cup N)$ c) $P(M-N)$

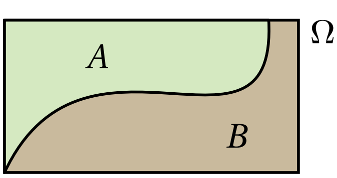
الحوادثُ المتنافيةُ الشاملةُ

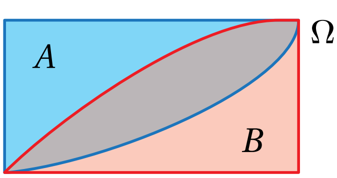
الحوادثُ الشاملةُ (exhaustive events) هيَ الحوادثُ التي يُشكِّلُ اتحادُ نواتجِها المُحتمَلةِ الفضاءَ العينيَّ كاملًا. فمثلًا، عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 وحادثَ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 5 يُمثِّلانِ حادثينِ شاملينِ.

قدْ تكونُ بعضُ الحوادثِ متنافيةً وشاملةً. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ وحادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ يُمثِّلانِ حادثينِ متنافيينِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ أنْ يقعا معًا. وهما أيضًا حادثانِ شاملانِ؛ لأنَّ نواتجَهُما المُحتمَلةَ تُشكِّلُ الفضاءَ العينيَّ كاملًا.

يُظهِرُ شكلا فِنْ الآتيانِ كُلًّا منَ الحوادثِ الشاملةِ، والحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ:

الحادثُ A والحادثُ B متنافيانِ وشاملانِ.



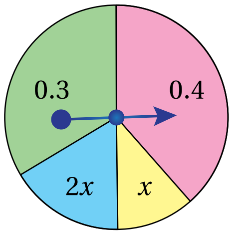


الحادثُ A والحادثُ B شاملانِ، لكنَّهُما ليسا متنافيينِ.

إذا كانَتِ الحوادثُ متنافيةً وشاملةً، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1.

مثال 5

قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 4 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأخضرِ والزهريِّ والأزرقِ والأصفرِ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ الجدولُ الآتي يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.



الأزرقُ	الأصفرُ	الزهريُّ	الأخضرُ	اللونُ
$2x$	x	0.4	0.3	الاحتمالُ

بما أنَّ حوادثَ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ على الألوانِ الأربعةِ هيَ حوادثُ متنافيةٌ وشاملةٌ، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1:

$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$ مجموعُ الحوادثِ الشاملةِ

$0.7 + 3x = 1$ بجمعِ الثوابتِ، وجمعِ المُتغيِّراتِ

$3x = 0.3$ بطرحِ 0.7 منَ الطرفينِ

$x = 0.1$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 3

أتعلَّمُ

مجموعُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ هوَ 1، أمّا الحوادثُ الشاملةُ غيرُ المتنافيةِ فيكونُ مجموعُ احتمالاتِها أكبرَ منْ 1.

أتحقَّقُ منْ فهمي

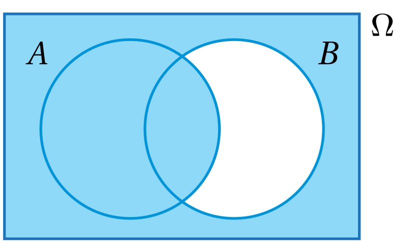
قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأحمرِ والأصفرِ والأزرقِ. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.

الأصفرُ	الأحمرُ	الأزرقُ	اللونُ
x	0.4	0.3	الاحتمالُ

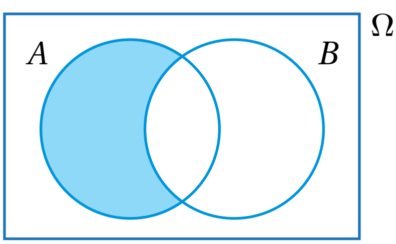
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ أشكالِ فِنْ الآتيةِ:

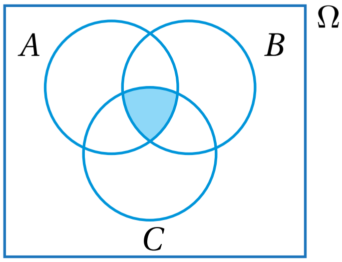
1



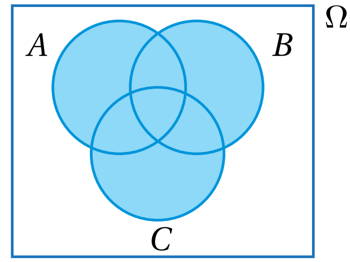
2

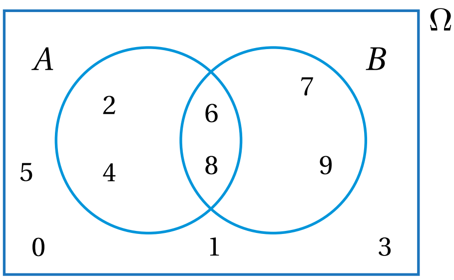


3



4





كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 0 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

5) $P(A)$
6) $P(B)$
7) $P(A \cap B)$
8) $P(A \cup B)$
9) $P(\overline{A})$
10) $P(\overline{B})$
11) $P(\overline{A \cap B})$
12) $P(\overline{A \cup B})$
13) $P(B - A)$

يحتوي صندوقٌ على بطاقاتٍ مُتطابِقةٍ، ومُرقَّمةٍ منْ 1 إلى 100. إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ فِنْ:

14) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15، ومضاعفاتِ العددِ 10.

15) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15 أوْ مضاعفاتِ العددِ 10.

16) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، وليسَ منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

17) ألّا يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، ولا منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

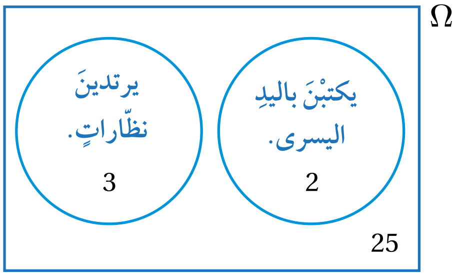
تغذيةٌ: في دراسةٍ شملَتْ 320 شخصًا يعانونَ السمنةَ، تبيَّنَ أنَّ 130 شخصًا منْهُمْ يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ، وأنَّ 147 شخصًا يمارسونَ الرياضةَ، وأنَّ 64 شخصًا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ ويمارسونَ الرياضةَ معًا. إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ فِنْ:

18) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ويراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

19) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

20) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

صفاتٌ وراثيةٌ: سألَتِ المُعلِّمةُ الطالباتِ في أحدِ الصفوفِ عمَّنْ ترتدي منهُنَّ نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى، ثمَّ لخَّصَتِ البياناتِ في شكلِ فِنْ المجاورِ. إذا اختيرَتْ طالبةٌ منهُنَّ عشوائيًّا، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



21 أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، وتكتبُ بيدِها اليسرى.

22 أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى.

23 أنْ تكونَ الطالبةُ لا ترتدي نظّارةً.

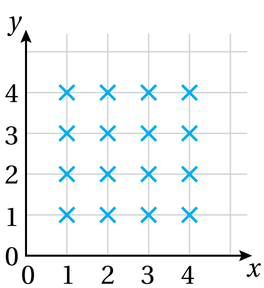
24 قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 6 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابقةٍ، وهي مُرقَّمةٌ بالأرقامِ: 1, 2, 3, 4, 5, 6. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ رقمٍ منْ هذهِ الأرقامِ، فأجدُ قيمةَ x.

الرقمُ	1	2	3	4	5	6
الاحتمالُ	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

25 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

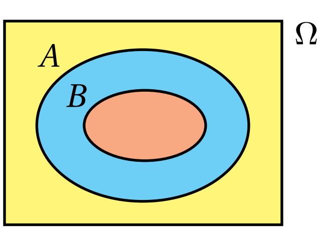
تبريرٌ: يُبيِّنُ مُخطَّطُ الاحتمالِ المجاورُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ. إذا كانَ الحادثُ A يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = x$، وكانَ الحادثُ B يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = 4-x$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:



26 أُمثِّلُ التجربةَ بأشكالِ فِنْ.

27 إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ تقعَ على المستقيمِ $y = x$، والمستقيمِ $y = 4 - x$، مُبرِّرًا إجابتي.

تبريرٌ: أستعملُ شكلَ فِنْ المجاورَ لكتابةِ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، مُبرِّرًا إجابتي:



28 $A \cap B$ 29 $A \cup B$ 30 $B - A$

31 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَصِفُ 3 حوادثَ متنافيةٍ وشاملةٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ.

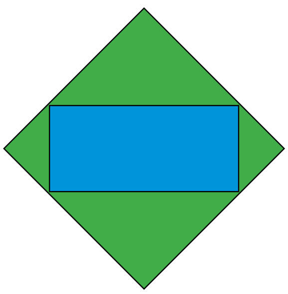
الدرس 5

الاحتمالُ الهندسيُّ
Geometric Probability

فكرةُ الدرسِ إيجادُ احتمالاتٍ هندسيةٍ باستعمالِ الأطوالِ والمساحاتِ والزوايا.

المصطلحاتُ الاحتمالاتُ الهندسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ لوحةَ إعلاناتٍ مضيئةً على شكلِ مُربَّعٍ أخضرَ، طولُ ضلعِهِ 3 m، وفي داخلِهِ مستطيلٌ أزرقُ، طولُهُ 2.83 m، وعرضُهُ 1.41 m. إذا كانَتِ اللوحةُ تضاءُ بآلافٍ منْ وحداتِ البكسلِ الصغيرةِ، ورُصِدَتْ وحدةٌ محروقةٌ منْ هذهِ الوحداتِ، فأجدُ احتمالَ أنْ تكونَ منْ وحداتِ اللوحِ الأزرقِ.

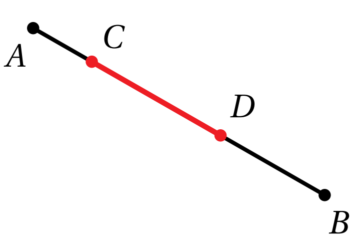


الاحتمالُ الهندسيُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ احتمالَ تجاربَ عشوائيةٍ ترتبطُ بهذا المفهومِ، لكنَّها تتضمَّنُ مقاييسَ هندسيةً، مثلَ: الأطوالِ، والمساحاتِ، والزوايا، وتُسمّى **الاحتمالاتِ الهندسيةَ** (geometric probabilities).

الاحتمالُ الهندسيُّ: الأطوالُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{AB}$ التي تحوي القطعةَ المستقيمةَ $\overline{CD}$. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K على $\overline{CD}$ يساوي نسبةَ طولِ $\overline{CD}$ إلى طولِ $\overline{AB}$؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ، وجميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{CD}$ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

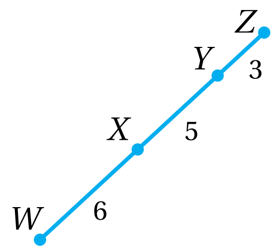


$$P(\text{وقوعُ } K \text{ على } \overline{CD}) = \frac{CD}{AB}$$

أتعلَّمُ

يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ على $\overline{AB}$.

مثال 1



مُعتمِدًا الشـــكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$.

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$ هوَ A. إذنْ

$$P(A) = \frac{YZ}{WZ}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$$= \frac{3}{14}$$ بتعويضِ $YZ = 3, WZ = 14$

2 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ B. إذنْ:

$$P(B) = \frac{XY}{WZ}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$$= \frac{5}{14}$$ بتعويضِ $XY = 5, WZ = 14$

3 احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

إنَّ حادثَ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ الحادثُ المُتمِّمُ للحادثِ B. إذنْ:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$$= 1 - \frac{XY}{WZ}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

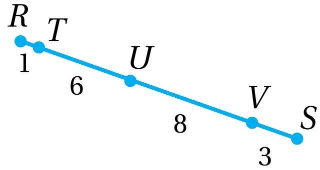
$$= 1 - \frac{5}{14}$$ بالتعويضِ

$$= \frac{9}{14}$$ بالتبسيطِ

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ إيجادُ احتمالِ عدمِ وقـــوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحقَّقُ من فهمي



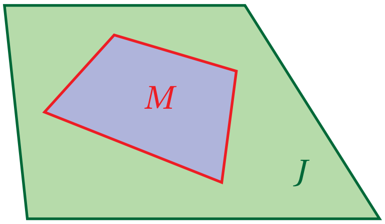
مُعتمِدًا الشـــكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TU}$.

b) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$.

c) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$.

الاحتمالُ الهندسيُّ: المساحاتُ



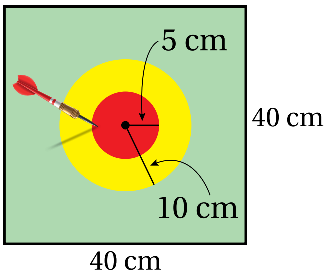
يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنطقةَ J التي تحوي المنطقةَ M. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ في المنطقةِ J، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K في المنطقةِ M يساوي نسبةَ مساحةِ المنطقةِ M إلى مساحةِ المنطقةِ J؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في المنطقةِ J تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في المنطقةِ M تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{وقوعُ } K \text{ في المنطقةِ } M) = \frac{(\text{مساحةَ المنطقةِ } M)}{(\text{مساحةِ المنطقةِ } J)}$$

أتعلَّمُ

يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ في المنطقةِ J.

مثال 2 : منَ الحياةِ



لوحةُ أسهمٍ: **أطلقَ وليدٌ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الحمراءِ.**

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ هوَ A. إذنْ:

$$P(A) = \frac{\text{مساحةَ المنطقةِ الحمراءِ}}{\text{مساحةِ لوحةِ السهامِ}}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ المساحةِ

$$= \frac{\pi r^2}{s^2}$$ صيغةُ مساحةِ الدائرةِ، وصيغةُ مساحةِ المُربَّعِ

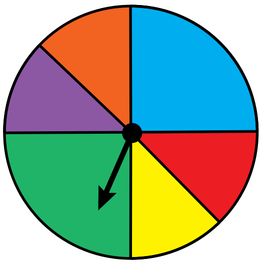
$$= \frac{\pi(5)^2}{(40)^2}$$ بتعويضِ $r = 5, s = 40$

$$\approx 0.05$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في المثالِ 2، أجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الصفراءِ.

الاحتمالُ الهندسيُّ: الزوايا



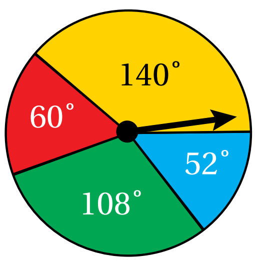
إذا دُوِّرَ المُؤشِّرُ في القرصِ المجاورِ عشوائيًّا، فإنَّ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّـــرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ يساوي نســـبةَ قياسِ زاويةِ القطاعِ الأخضرِ إلى مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في الدائرةِ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينـــيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في القطاعِ الأخضرِ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{توقُّفُ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ}) = \frac{(\text{زاويةَ القطاعِ الأخضرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$

أتعلَّمُ

يتســاوى الاحتمــالُ في تجربةِ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ أيِّ نقطةٍ في الدائرةِ؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُــها لأيِّ نقطةٍ يتوقَّفُ عندَهُ المُؤشِّرُ.

مثال 3



مُعتمِدًا زوايا القطاعاتِ الظاهــرةَ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

1 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأصفرِ هوَ A. إذنْ:

$$P(A) = \frac{(\text{زاويةَ القطاعِ الأصفرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا

$$= \frac{140^\circ}{360^\circ}$$ بالتعويضِ

$$= \frac{7}{18}$$ بالتبسيطِ

2 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ هوَ B. إذنْ:

$$P(B) = \frac{(\text{مجموعَ زاويتَي القطاعينِ الأزرقِ والأحمرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا

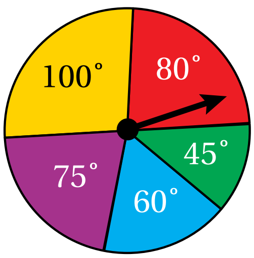
$$= \frac{60^\circ + 52^\circ}{360^\circ}$$ بالتعويضِ

$$= \frac{112^\circ}{360^\circ} = \frac{14}{45}$$ بالتبسيطِ

أتذكَّرُ

فـي الاحتمـال، يـدلُّ حرفُ العطفِ (أوْ) على الاتحادِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي



مُعتمِدًا زوايـا القطاعاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

a) احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ.

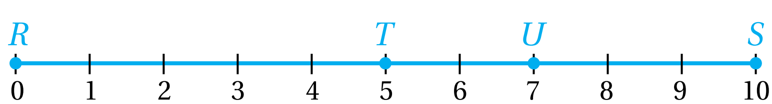
b) احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأحمرِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

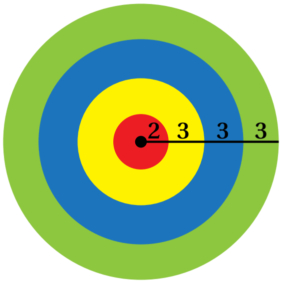
مُعتمِدًا الشـكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشـوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XZ}$.
2. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.
3. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WX}$ أوْ $\overline{YZ}$.
4. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WY}$.
5. احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

مُعتمِدًا الشكلَ الآتي، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



6. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$.
7. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TS}$.
8. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$ أوْ $\overline{US}$.
9. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$.
10. احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على UR.



لوحةُ أسهمٍ: أطلقَتْ دلالُ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

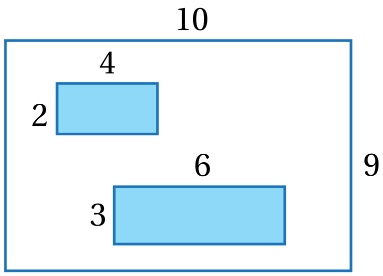
11 وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ.

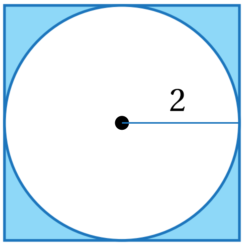
12 وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الصفراءِ.

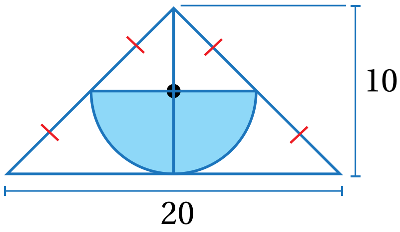
13 عدمُ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الزرقاءِ.

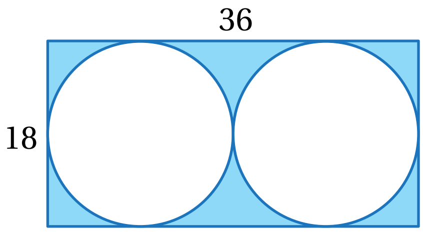
14 وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الخضراءِ أوِ المنطقةِ الصفراءِ.

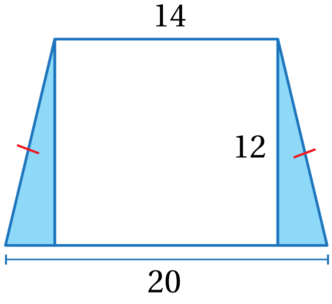
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ:

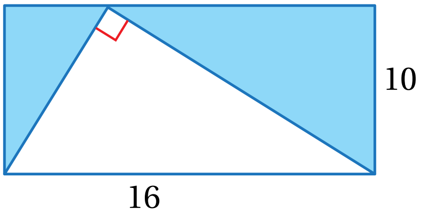
15


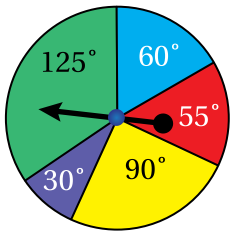
16


17


18


19


20




مُعتمِدًا زوايا القطاعــاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجــدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

21 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ البنفسجيِّ.

22 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأخضرِ.

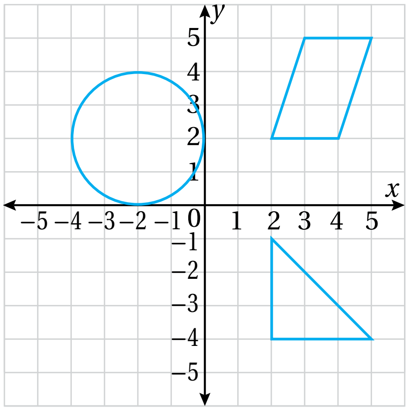
23 احتمالُ عدمِ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأحمرِ.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

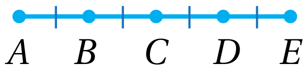
مهاراتُ التفكيرِ العليا

25 **تبريرٌ:** إذا كانَتِ $\overline{BZ}$ تحوي $\overline{MN}$، وكانَ $BZ = 20$، واختيرَتْ نقطةٌ عشــوائيًّا على $\overline{BZ}$، وكانَ احتمالُ وقوعِها على $\overline{MN}$ هوَ 0.3، فأجدُ طولَ $\overline{MN}$، مُبرِّرًا إجابتي.

26 **تبريــرٌ:** في المســتوى الإحداثــيِّ الآتي، إذا اختيــرَ الــزوجُ المُرتَّبُ (x, y) عشــوائيًّا، حيــثُ: $-5 \le x \le 5$، و$-5 \le y \le 5$، فأجــدُ احتمالَ ألّا يقعَ الــزوجُ المُرتَّبُ في أيٍّ منَ المُثلَّثِ، والدائــرةِ، ومتوازي الأضلاعِ، مُبرِّرًا إجابتي.



27 **مســألةٌ مفتوحةٌ:** مُعتمِدًا $\overline{AE}$، أَصِفُ حادثًا احتمالُهُ أكبرُ منْ $\frac{1}{2}$ (أكتبُ ثلاثةَ حلولٍ مُمكِنةٍ).



أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 تبايـنُ مجموعةِ البياناتِ الآتيةِ مُقرَّبًـا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ هوَ:

$$11, 13, 14, 16, 18$$

a) 5.8 b) 2.4

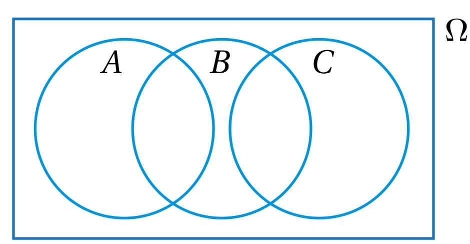
c) 14.4 d) 3.8

2 استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 2x - 15$ لتعديلِ مجموعةٍ منَ البيانـاتِ. إذا كانَ الانحرافُ المعيـاريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 3، فـإنَّ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ هوَ:

a) -9 b) 21

c) 3 d) 6

3 الحادثُ A والحادثُ C في شكلِ فِنْ الآتي هما:



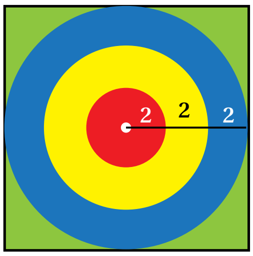
a) حادثانِ شاملانِ.

b) حادثانِ متنافيانِ.

c) حادثانِ متنافيانِ وشاملانِ.

d) حادثانِ متقاطعانِ.

4 أُطلِقَ سـهمٌ علـى لوحةِ الأسـهمِ المجـاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحـةِ، فـإنَّ احتمـالَ وقوعِـهِ علـى المنطقـةِ الصفراءِ هوَ:



a) $\frac{\pi}{36}$ b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{\pi}{4}$

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي قياساتِ أحذيةٍ لمجموعةٍ منَ الطلبةِ:

المقاسُ	33	34	35	36	37	38	39
التكرارُ	1	3	8	14	6	2	1

5 أجدُ تباينَ قياساتِ الأحذيةِ.

6 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لقياساتِ الأحذيةِ.

حُوِّلَتْ مجموعةٌ منَ البياناتِ، عددُها 50، باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 70$، حيثُ y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، وx المشاهدةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ:

$\sum y = -135, \sum y^2 = 2567$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

7 الوسطُ الحسابيُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ.

8 الانحرافُ المعياريُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ.

في ما يأتي أسعارُ مجموعةٍ منَ السيّاراتِ المُستعمَلةِ بالدينارِ:

2925	2850	2790	2650	2650	2590
3740	3595	3420	3125	3125	3090
4200	4150	4050	3945	3920	3750

9 أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

10 أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي توزيعًا لعددِ الجرائدِ المَبيعةِ في إحدى المكتباتِ خلالَ 15 يومًا:

التكرارُ	عددُ الجرائدِ
4	81 – 85
5	86 – 90
4	91 – 95
2	96 – 100
15	المجموعُ

11 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ.

12 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ.

13 أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

14 يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ التالي كمِّيةَ الماءِ (باللترِ) التي استهلكَتْها مجموعةٌ منَ الأشخاصِ في أحدِ الأيامِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	كمِّيةُ الماءِ (L)
45	$75 \le s < 125$
50	$125 \le s < 150$
70	$150 \le s < 175$
90	$175 \le s < 225$
45	$225 \le s < 300$

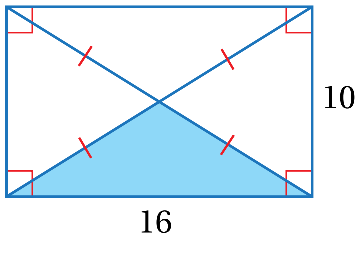
في مجموعةٍ تضمُّ 25 شخصًا منْ منتسبي أحدِ النوادي الرياضيةِ، كانَ 13 شخصًا منْهُمْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، و11 شخصًا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، و6 أشخاصٍ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ ولعبةَ كرةِ القدمِ معًا. إذا اختيرَ شخصٌ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ:

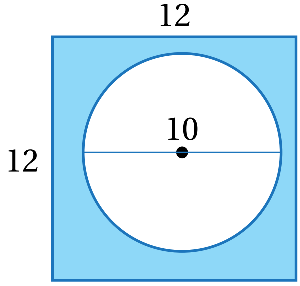
15 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ أو لعبةَ كرةِ القدمِ.

16 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ.

17 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

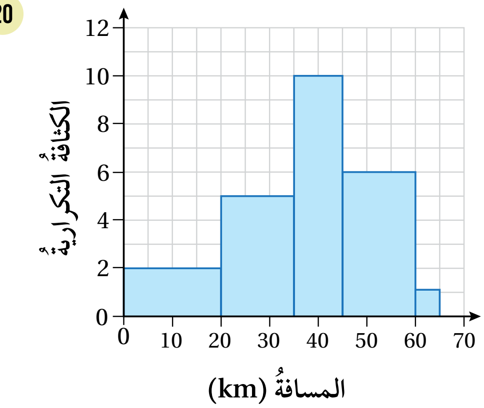
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الشكلينِ الآتيينِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ.

18


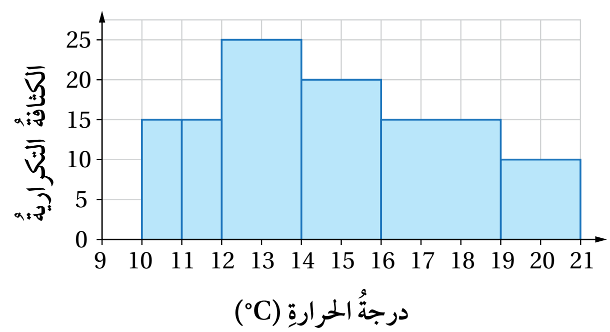
19


أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلِّ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ممّا يأتي:

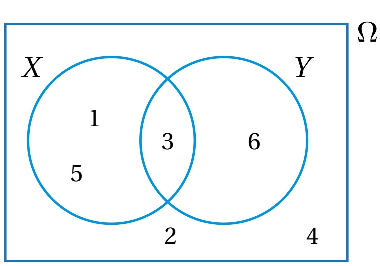
20



21



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 6 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ X و Y في شكلِ فِنْ الآتي. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



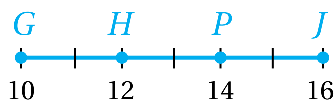
22 $P(X \cap Y)$

23 $P(X \cup Y)$

24 $P(\overline{X \cup Y})$

25 $P(X - Y)$

مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{GJ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يلي:



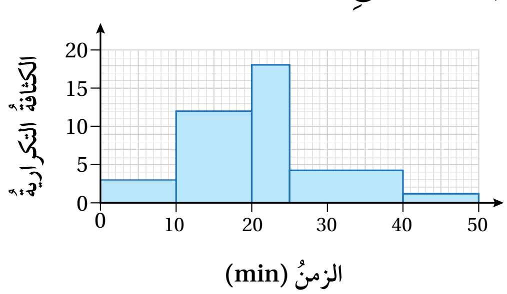
26 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HP}$.

27 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{GP}$.

28 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HJ}$.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي الزمنَ (بالدقائقِ) الذي استغرقَهُ عددٌ منَ المرضى في الانتظارِ قبلَ دخولِهِمْ عندَ طبيبِ الأسنانِ خلالَ أسبوعٍ:



29 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا أكثرَ منْ 30 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ.

30 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا منْ 10 دقائقَ إلى 40 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ.

قيسَتْ أطوالُ 8 أشخاصٍ بوحدةِ السنتيمترِ، وكانَتِ النتائجُ كالآتي:

165	170	190	180
175	185	176	184

31 أجدُ تباينَ أطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ.

32 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ.