المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي يوسف سليمان جرادات أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هـذا الكتـاب في مـدارس المملكـة الأردنيـة الهاشـمية جميعهـا، بنـاءً عـلى قـرار المجلـس الأعـلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2025/8)، تاريـخ 2025/10/16 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليـم رقـم (2025/251)، تاريـخ 2025/12/04 م، بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2026/2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 789 - 8

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/372)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	رياضيات الأعمال، كتاب الطالب: الصف الثاني عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الثاني
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوي مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي: أ. د. عدنان سليم عابد   **التصميم الجرافيكي**: راكان محمد السعدي   **التحرير اللغوي**: نضال أحمد موسى

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)   1447 هـ / 2025 م

المقدمة

الحمد لله رَبِّ العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمُرسَلين، وبعد؛ فانطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلِّ المشكلات في مختلف الحقول، فقد أَوْلى المركز مناهجه عناية كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتاب رياضيات الأعمال أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدامًا في تخصُّصات إدارة الأعمال؛ بُغْيَةَ إعداد طلبة حقل الأعمال لدراسة أيٍّ من هذه التخصُّصات في المرحلة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. روعي في إعداد الكتاب أيضًا اشتماله على مستوى معرفي ومستوى مهاري مناسبين لطلبة الحقول جميعًا في حال اختار هؤلاء الطلبة دراسة مادة هذا الكتاب. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديم الموضوعات بطريقة مُنظَّمة، وجاذبة، ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاسة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتسبوها سابقًا، وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات إدارة الأعمال التي تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة

4

أشكال الانتشار والسلاسل الزمنية

Scatter Diagrams and Time Series

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ أشكال الانتشار والسلاسل الزمنية أداتين مُهِمَّتين في مجال الأعمـال؛ إذ تتيحان تحليل العلاقـة بين مُتغيِّرين، والتنبُّؤ بالاتجاهات المستقبلية. تسـاعد أشـكال الانتشار على الكشف عن الترابط بين العديد من العوامل، مثل: السعر، والمبيعات، والإعلان، والأرباح. أمّا السلاسـل الزمنية فتُمكِّن الشركات من تتبُّع الأداء بمرور الزمـن، والتخطيط بناءً على الأنماط الموسـمية أو الاتجاهات الطويلة المدى. باسـتعمال هذين الأسـلوبين، يُمكِن اتِّخاذ قرارات مدروسـة اسـتنادًا إلى بيانات فعليـة بدلًا من الاعتمـاد على الحدس فقط.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ أشكال الانتشار، ووصفها.
- ✓ استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المُتغيِّرين بمعرفة قيمة الآخر.
- ✓ إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة.
- ✓ تمثيل البيانات بالخطوط.
- ✓ قراءة بيانات مُمثَّلة بالخطوط، وتفسيرها.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- المقصود بالمُتغيِّر التابع والمُتغيِّر المستقل، وأنواع الارتباط.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون بين مُتغيِّرين، وتفسير دلالته.
- إيجاد معادلة خطِّ الانحدار ذي المُربَّعات الصغرى، واستعمالها للتنبُّؤ بقيمة المُتغيِّر التابع.
- ماهيَّة السلاسل الزمنية، وكيفية تمثيلها بيانيًّا.
- رسم خطِّ الاتجاه العام، وتحديد نوعه، وتفسيره.
- إيجاد الأوساط المُتحرِّكة لبيانات سلسلة زمنية.
- التباين الموسمي في السلاسل الزمنية، وتفسيره، وكيفية حسابه عند نقطة ما.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6–11) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الارتباط والانحدار
Correlation and Regression

فكرة الدرس

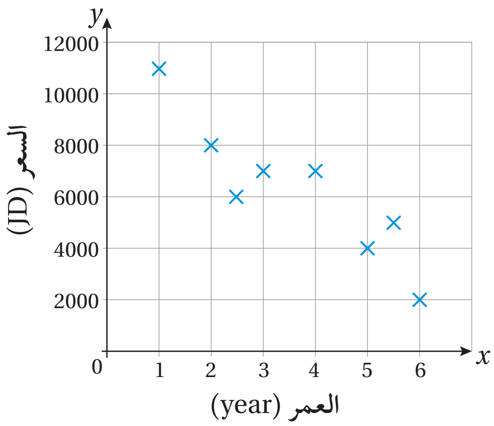
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون بين مُتغيِّرين، وتفسير دلالته.
- إيجاد معادلة خطِّ انحدار المُربَّعات الصغرى، واستعمالها للتنبُّؤ بقيمة المُتغيِّر التابع.

المصطلحات

المُتغيِّر المستقل، المُتغيِّر التابع، شكل الانتشار، المستقيم الأفضل مطابقة، ارتباط، ارتباط موجب، ارتباط سالب، معامل ارتباط بيرسون، خطُّ انحدار المُربَّعات الصغرى.

مسألة اليوم

اعتمادًا على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثِّل أعمار 8 سيّارات مُستعمَلة (بالسنوات) من الطراز نفسه، وأسعار بيعها (بالدينار) كما أُعلِن في إحدى المِنصّات الإلكترونية للإعلانات المُبوَّبة:



1) ما سعر السيّارة التي عمرها 5 سنوات؟

2) ما عمر السيّارة التي سعرها JD 8000؟

3) هل توجد علاقة بين عمر السيّارة وسعرها؟ أَصِف هذه العلاقة (إنْ وُجِدت).

شكل الانتشار والارتباط

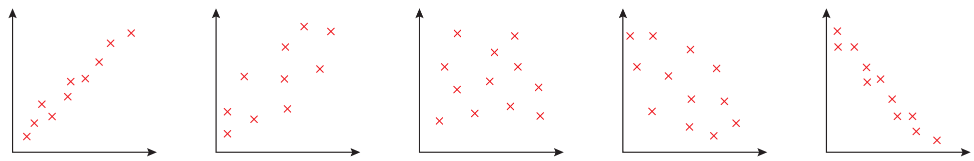
تتضمَّن كثير من المواقف الحياتية وجود مُتغيِّرين نرغب في تعرُّف العلاقة بينهما، وبيان نوعها ومدى قوَّتها، مثل: العلاقة بين كتلة الإنسان وضغط دمه، والعلاقة بين طول الإنسان وكتلته، والعلاقة بين عدد سنوات خبرة الموظف وراتبه. لفهم هذه العلاقة، تُجمَع البيانات اللازمة عن مُتغيِّرين؛ أحدهما يُسمّى **المُتغيِّر المستقل** (independent variable)؛ وهو مُتغيِّر يتمُّ اختياره أو التحكُّم فيه. والآخر يُسمّى **المُتغيِّر التابع** (dependent variable)؛ وهو مُتغيِّر يتمُّ قياسه بناءً على المُتغيِّر المستقل.

تُعرَض هذه البيانات في صورة أزواج مُرتَّبة (x, y)، وهي تُمثَّل بوصفها نقاطًا في المستوى الإحداثي؛ فيَنتج شكل يُسمّى **شكل الانتشار** (scatter diagram). بناءً على هذا الشكل، يُمكِن تقرير وجود علاقة **ارتباط** (correlation) خطِّية بين المُتغيِّرين أو لا.

أتعلَّم

يُمثِّل الإحداثي x المُتغيِّر المستقل، في حين يُمثِّل الإحداثي y المُتغيِّر التابع.

بعد ذلك، يتمُّ تحديد اتجاه هذه العلاقة، وتعرُّف إذا كان الارتباط بينهما **موجبًا** (positive)، بما يعني أنَّ زيادة أحد المُتغيِّرين تؤدّي إلى زيادة الآخر بوجه عام، أو **سالبًا** (negative)؛ أيْ إنَّ زيـادة أحد المُتغيِّرين تؤدّي إلى نقصان الآخر بوجـه عام، وكذلك تعرُّف إذا كان الارتباط بينهما قويًّا، أو ضعيفًا، أو لا يوجد ارتباط بينهما كما هو مُبيَّن في أشكال الانتشار الآتية:



ارتباط سالب قوي | ارتباط سالب ضعيف | لا يوجد ارتباط | ارتباط موجب ضعيف | ارتباط موجب قوي

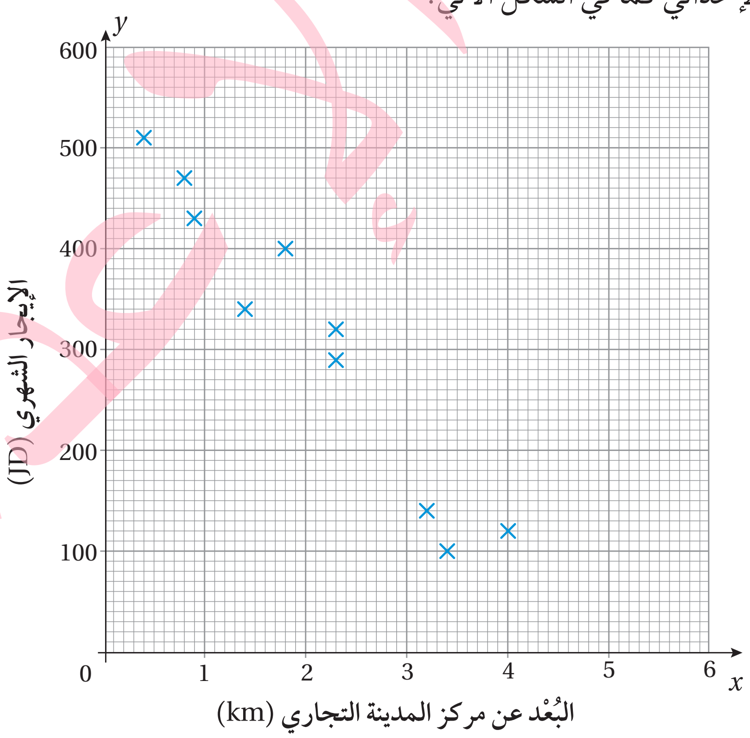
مثال 1 : من الحياة

أجرة: يُبيِّن الجدول الآتي بُعْد 10 شقق عن المركز التجاري لإحدى المدن، والإيجار الشهري لكل شقَّة:

بُعْد الشقَّة عن مركز المدينة التجاري (km)	1.8	0.8	4	2.3	0.5	3.4	3.2	2.3	1.4	0.9
الإيجار الشهري (JD)	400	470	120	290	510	100	140	320	340	430

1 **أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.**

بما أنَّ إيجار الشقَّة الشـــهري يعتمد على بُعْد الشقَّة عن مركز المدينة التجاري، فإنَّ بُعْدها عن هذا المركز يُمثِّل المُتغيِّر المســتقل، والإيجار يُمثِّل المُتغيِّــر التابع. أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي كما في الشكل الآتي:



أتذكَّر

ليس من الضـــروري أنْ يبـــدأ تدريـــج المحورين الإحداثيين من الصفر.

2 **أَصِف الارتباط بين بُعْد الشقَّة عن مركز المدينة التجاري والإيجار الشهري، ثمَّ أُفسِّره.**

أُلاحِظ وجود ارتباط سالب قوي بين بُعْد الشقَّة عن مركز المدينة التجاري والإيجار الشهري؛ ما يعني أنَّه كلَّما زاد بُعْد الشقَّة عن مركز المدينة التجاري، قَلَّ الإيجار.

أتعلَّم

عند وصف الارتباط، لا بُدَّ من ذكر قوَّة الارتباط، وتحديد إذا كان الارتباط موجبًا أو سالبًا.

أتحقَّق من فهمي

رواتب: يُبيِّن الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة لـ 10 موظفين في إحدى الشركات، والراتب الشهري لكل موظف منهم:

عدد سنوات الخبرة (year)	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11
الراتب الشهري (JD)	330	370	410	500	530	570	610	640	680	750

a) أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

b) أَصِف الارتباط بين عدد سنوات الخبرة والراتب الشهري، ثمَّ أُفسِّره.

أتعلَّم

عند وصف ارتباط مُعيَّن بأنَّه سالب، فإنَّ ذلك لا يعني بالضرورة أنَّه كلَّما زاد أحد المُتغيِّرين، قَلَّ الآخر؛ إذ قد تخرج بعض القِيَم عن هذه القاعدة بصورة محدودة. ففي المثال 1، يُلاحَظ أنَّ إيجار الشقَّة التي تبعد 1.8 km أكثر من إيجار تلك التي تبعد 1.4 km وبالرغم من ذلك، يوصَف الارتباط بأنَّه سالب.

معامل ارتباط بيرسون

يُعَدُّ رسم شكل الانتشار وسيلة فعّالة للتحقُّق من وجود علاقة بين مجموعتين من البيانات، لكنَّ ذلك لا يُوفِّر دائمًا دلالة واضحة على طبيعة هذا الارتباط؛ لذا يُستعمَل **معامل ارتباط بيرسون** (Pearson's correlation coefficient) بوصفه مقياسًا عدديًّا يُحدِّد تحديدًا دقيقًا قوَّة العلاقة الخطِّية بين مجموعتين من البيانات، إضافةً إلى اتجاهها؛ سواء أكان موجبًا أم سالبًا.

مفهوم أساسي **معامل ارتباط بيرسون**

يعطى معامل ارتباط بيرسون بين n من أزواج المُشاهَدات للمُتغيِّر x والمُتغيِّر y بالصيغة الآتية:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\,S_{yy}}}$$

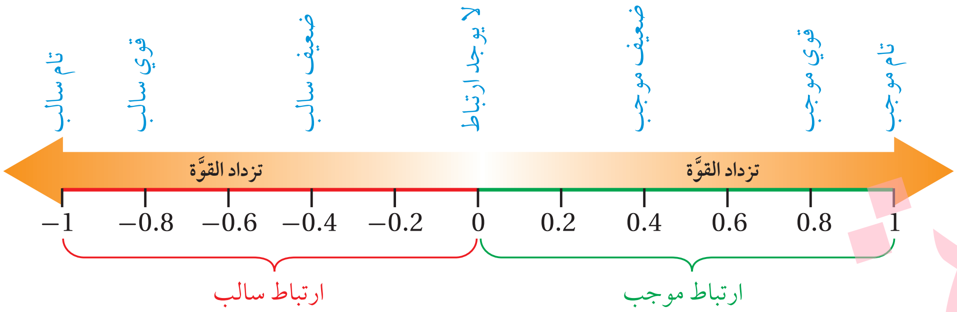
حيث:

$$S_{xx}=\sum x_i^{\,2}-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n},\quad S_{yy}=\sum y_i^{\,2}-\frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n},\quad S_{xy}=\sum x_i y_i-\frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

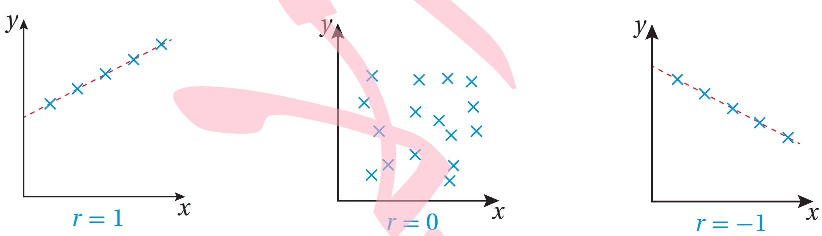
رموز رياضية

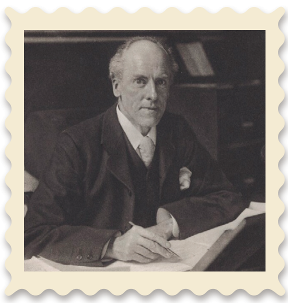
عند كتابة $\sum x_i$، فإنَّ المقصود بذلك هو $\sum_{i=1}^{n} x_i$، حيث n عدد البيانات.

تنحصر قيمة معامل ارتباط بيرســون r بين -1 و 1، وكلّما اقتربت قيمة معامل ارتباط بيرسون من هذين العددين، كان الارتباط أكثر قوّة، في حين يضعف الارتباط بابتعاد قيمة r عنهما نحو الصفر 0. تُصنَّف قوّة الارتباط ونوعه بين المُتغيِّرين وَفق قيمة معامل ارتباط بيرســون كما في الشكل الآتي:



إذا كانت قيمة معامل ارتباط بيرســون $r = 1$، فــإنَّ الارتباط التام الموجب يَحْكم العلاقة بين المُتغيِّرين؛ إذ تقع جميع نقاط شــكل الانتشار على خطٍّ مستقيم ذي ميل موجب. أمّا إذا كانت قيمة معامل ارتباط بيرسون $r = -1$ ، فإنَّ العلاقة بين المُتغيِّرين يُمثِّلها الارتباط التام السالب؛ إذ تقع جميع النقاط على خطٍّ مســتقيم ذي ميل ســالب. وأمّا إذا كانت قيمــة معامل ارتباط بيرسون $r = 0$، فإنَّ العلاقة بين المُتغيِّرين تكون معدومة؛ إذ تظهر نقاط شكل الانتشار مُتناثِرة بشــكل عشوائي أو مُتجمِّعة على هيئة نمط دائري؛ ما يشــير إلى غياب العلاقة الخطِّية بينهما. والشكل الآتي يُبيِّن الحالات الثلاث المذكورة آنفًا بصورة بصرية.





معلومة

سُمِّي معامل ارتباط بيرسون بهذا الاسم نسبةً إلى العالِم كارل بيرسون الذي يُعَدُّ أحد مُؤسِّسي علم الإحصاء الحديث، ومِنْ أوائل مَنِ استعمل الرياضيات لتحليل البيانات في العلوم الاجتماعية والعلوم الطبيعية.

مثال 2 : من الحياة

تدريب: يُبيِّن الجدول التالي عدد ساعات التدريب اللازمة للوصول إلى مستوى مُحدَّد من المهارة لكل فئة عمرية من المُتدرِّبين المشاركين في برنامج تدريبي مُخصَّص للشباب في مجال التجارة الإلكترونية. أجد معامل ارتباط بيرسون بين العمر وعدد ساعات التدريب، ثمَّ أُفسِّر دلالته.

العمر بالأعوام (x)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
عدد ساعات التدريب (y)	12	11	10	9	11	8	9	7	6	5

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا يحوي الأعمدة المُظلَّل عناوينها على النحو الآتي:

	x	y	xy	x^2	y^2
	16	12	192	256	144
	17	11	187	289	121
	18	10	180	324	100
	19	9	171	361	81
	20	11	220	400	121
	21	8	168	441	64
	22	9	198	484	81
	23	7	161	529	49
	24	6	144	576	36
	25	5	125	625	25
المجموع	**205**	**88**	**1746**	**4285**	**822**

الخطوة 2: أجد قِيَم كلٍّ من: S_{yy} , S_{xx} , S_{xy}.

صيغة S_{xy}

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 1746 - \frac{(205)\,(88)}{10} = -58$$

صيغة S_{xx}

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 4285 - \frac{(205)^2}{10} = 82.5$$

صيغة S_{yy}

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 822 - \frac{(88)^2}{10} = 47.6$$

الخطوة 3: أجد معامل ارتباط بيرسون.

صيغة معامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\,S_{yy}}}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= \frac{-58}{\sqrt{(82.5)\,(47.6)}} \approx -0.93$$

أُفكِّر

متى يكـــون $r = 0$؟ ماذا يعني ذلك؟

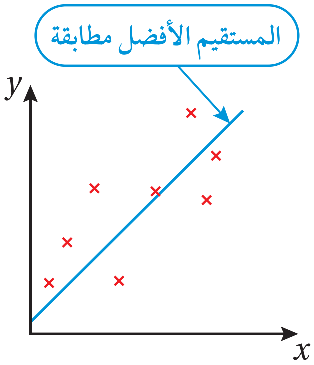
بما أنَّ معامل ارتباط بيرســـون $r \approx -0.93$، فإنَّ الارتباط بين العمر وعدد ســـاعات التدريب سالب قوي؛ ما يعني بوجه عام أنَّه كلَّما زاد العمر، قَلَّ عدد ساعات التدريب اللازمة للوصول إلى مستوى مُحدَّد من المهارة.

أتحقَّق من فهمي

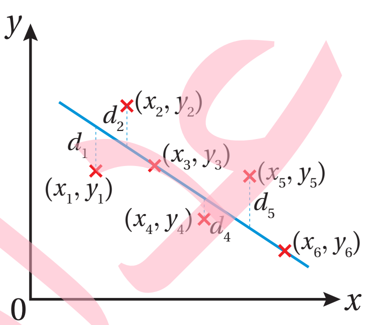
تكلفة: يُبيِّـن الجدول التالي المســـافة (x) بالكيلومتر، والتكلفـــة (y) بالدينار لكل رحلة من 10 رحلات بسيّارة أجرة. أجد معامل ارتباط بيرسون بين المسافة والتكلفة، ثمَّ أُفسِّر دلالته.

المسافة (x)	13	10	18	6.5	4	9	3.5	16	7	12
التكلفة (y)	10.2	8.8	7.2	5.7	7.4	7.4	5.2	12.0	6.4	10.0

معادلة خطِّ الانحدار



إذا كانت العلاقة خطِّية بين مُتغيِّرين، فإنَّه يُمكِن تمثيلها بما يُعرَف **بالمســـتقيم الأفضل مطابقة** (line of best fit)؛ وهو مســـتقيم يمرُّ قرب أكبر عدد مُمكِن من نقاط شـــكل الانتشـــار، بحيث تتوزَّع النقاط غير الواقعة عليه بشـــكل مُتوازِن تقريبًا على جانبي الخطِّ، وتكون المســـافات بينها وبينه مُتقارِبة قَدْر الإمكان. يُســـتعمَل هذا المستقيم أداةً للتنبُّؤ بقِيَم المُتغيِّر التابع بناءً على قِيَم معلومة للمُتغيِّر المســـتقل؛ ما يجعله أداة تحليلية مُهِمَّة في دراســـة العلاقات الإحصائية بين المُتغيِّرات.



يُبيِّن الشكل المجاور شكل انتشار رُسِم عليه المستقيم الأفضل مطابقة، وفيه تُمثِّل المسافات: d_1, d_2, d_4, d_5 الفروق بين القِيَم المُتنبَّأ بها للمُتغيِّر y من خلال المستقيم الأفضل مطابقة والقِيَم الفعلية للمُتغيِّر y من نقاط شكل الانتشـــار. لتقليل هذه الفروق، يجب اختيار المستقيم الأفضل مطابقة الذي يجعل مجموع مُربَّعات هذه الفروق أصغر ما يُمكِن، والذي يُسمّى **خطَّ انحـــدار المُربَّعات الصغـــرى** (least squares regression line)، ويُمكِن إيجاد معادلته باستعمال الصيغة الآتية:

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $\bar{x}$ للدلالة على الوسط الحسابي لِقِيَم المُتغيِّر x، ويُستعمَل الرمز $\bar{y}$ للدلالة على الوسط الحسابي لِقِيَم المُتغيِّر y.

مفهوم أساسي

معادلة خطِّ انحدار المُربَّعات الصغرى

معادلة خطِّ انحدار المُربَّعات الصغرى للتنبُّؤ بِقِيَم المُتغيِّر التابع y من قِيَم المُتغيِّر المستقل x هي:

$$y = mx + b$$

حيث: $m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$, $b = \bar{y} - m\bar{x}$

مثال 3 : من الحياة

صِحَّة: تسعى إحدى الشركات إلى تطوير خوارزمية للتنبُّؤ بحالة الموظفين الصِّحِّية أثناء أداء المهام البدنية المختلفة داخل مستودعاتها. وتحقيقًا لذلك؛ جُمِعت بيانات تجريبية عن عدد الأنفاس وعدد نبضات القلب في الدقيقة الواحدة لـ **10** موظفين أثناء العمل كما هو مُبيَّن في الجدول الآتي:

عدد الأنفاس (x)	16	20	20	24	26	28	28	30	34	36
عدد نبضات القلب (y)	58	68	70	72	84	80	84	88	94	104

لغة الرياضيات

يُطلَق على معادلة خطِّ انحدار المُربَّعات الصغرى اختصارًا اسم معادلة خطِّ الانحدار.

1 أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا يحوي الأعمدة المُظلَّل عناوينها على النحو الآتي:

	x	y	xy	x^2
	16	58	928	256
	20	68	1360	400
	20	70	1400	400
	24	72	1728	576
	26	84	2184	676
	28	80	2240	784
	28	84	2352	784
	30	88	2640	900
	34	94	3196	1156
	36	104	3744	1296
المجموع	**262**	**802**	**21772**	**7228**

الخطوة 2: أجد قِيَم كلٍّ من: S_{xx} , S_{xy}.

صيغة S_{xy}

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 21772 - \frac{262\,(802)}{10} = 759.6$$

صيغة S_{xx}

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 7228 - \frac{(262)^2}{10} = 363.6$$

الخطوة 3: أجد قِيَم كلٍّ من: $\bar{x}, \bar{y}$.

الوسط الحسابي لقِيَم x

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{262}{10} = 26.2$$

الوسط الحسابي لقِيَم y

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{802}{10} = 80.2$$

الخطوة 4: أجد معادلة خطِّ الانحدار.

صيغة m

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= \frac{759.6}{363.6} \approx 2.09$$

صيغة b

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

بالتعويض، واستعمال الآلة الحاسبة

$$= 80.2 - 2.09(26.2) \approx 25.4$$

صيغة معادلة خطِّ الانحدار

$$y = mx + b$$

بتعويض $m = 2.09, b = 25.4$

$$= 2.09\,x + 25.4$$

إذن، معادلة خطِّ انحدار y على x هي:

$$y = 2.09\,x + 25.4$$

أُفكِّر

ما علاقة إشارة m باتجاه شكل انتشار البيانات؟ أُبرِّر إجابتي.

2 أستعمل معادلة خطِّ الانحدار التي أوجدتها في الفرع السابق للتنبُّؤ بعدد نبضات قلب موظف عدد أنفاسه 25 نَفَسًا في الدقيقة الواحدة.

$y = 2.09\,x + 25.4$ معادلة خطِّ الانحدار

$= 2.09\,(25) + 25.4$ بتعويض $x = 25$

≈ 78 باستعمال الآلة الحاسبة

3 أُفسِّر دلالة كلٍّ من الميل (m) والمقطع (b) في معادلة خطِّ الانحدار.

يدلُّ الميل $m = 2.09$ على مقدار الزيادة في عدد نبضات القلب لكل زيادة مقدارها نَفَس واحد في عدد أنفاس الشخص. أمّا المقطع $b = 25.4$ فيدلُّ على عدد نبضات القلب عندما يكون عدد الأنفاس صفرًا، لكنَّ هذا غير منطقي، والتفسير الأقرب إلى المنطق لهذا العدد هو عدد نبضات القلب لشخص لا يؤدّي أيَّ مهمة بدنية.

أتحقَّق من فهمي

مقهى: يعتقد مالك أحد المقاهي أنَّ زيادة مبيعات القهوة أسبوعيًّا تؤدّي إلى زيادة مبيعات الحلويات في الأسبوع نفسه. للتحقُّق من ذلك، جمع مالك المقهى بيانات 7 أسابيع مُتتالِية عن قيمة مبيعات القهوة بالدينار (x)، وقيمة مبيعات الحلويات بالدينار (y) كما هو مُبيَّن في الجدول الآتي:

مبيعات القهوة بالدينار (x)	275	295	320	250	260	305	280
مبيعات الحلويات بالدينار (y)	335	345	355	380	370	340	360

a) أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

b) أستعمل معادلة خطِّ الانحدار التي أوجدتها في الفرع السابق للتنبُّؤ بمبيعات الحلويات في الأسبوع الذي بلغت فيه مبيعات القهوة JD 310.

c) أُفسِّر دلالة كلٍّ من الميل (m) والمقطع (b) في معادلة خطِّ الانحدار.

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من منطقية القيمة المُتنبَّأ بها عن طريق مقارنتها بالقِيَم المجاورة في العيِّنة. فمثلًا، إذا كان عدد أنفاس الموظف 25 نَفَسًا، فإنَّ من المعقول أنْ تتراوح نبضات قلبه بين 72 نبضة و84 نبضة في الدقيقة الواحدة؛ لأنَّ مَنْ تنفَّس 24 نَفَسًا نبض قلبه 72 نبضة، ومَنْ تنفَّس 26 نَفَسًا نبض قلبه 84 نبضة؛ ما يُؤكِّد اتِّساق النموذج مع اتجاه البيانات العام. بالرغم من ذلك، فإنَّ خطَّ الانحدار قد يطرح قيمًا غير مُتوقَّعة نتيجة ضعف الارتباط بين المُتغيِّرين.

أتعلَّم

إنَّ من أهمِّ أهداف إيجاد خطِّ الانحدار هو التنبُّؤ بقِيَم المُتغيِّر التابع لبعض قِيَم المُتغيِّر المستقل غير المُعطاة، كما في الفرع 2 من المثال 3، والفرع b من بند (أتحقَّق من فهمي).

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

مبيعات: يُبيِّن الجدول الآتي عدد الجولات التي قام بها 10 مندوبي مبيعات، وعدد القطع المَبيعة:

عدد الجولات	10	30	15	50	20	50	18	10	40	20
عدد القطع المَبيعة	25	40	20	30	50	60	35	50	20	30

1 أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

2 أَصِف الارتباط بين عدد الجولات وعدد القطع المَبيعة، ثمَّ أُفسِّره.

بوظة: يُبيِّن الجدول الآتي درجة الحرارة وقت الظهيرة، وعدد حبّات المُثلَّجات التي يبيعها محمود في مَحلِّه مُدَّة أسبوعين:

درجة الحرارة وقت الظهيرة	27	23	26	27	19	29	16	21	22	30	24	18	28	20
عدد حبّات المُثلَّجات المَبيعة	82	79	91	93	63	91	58	65	78	97	76	58	86	70

3 أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

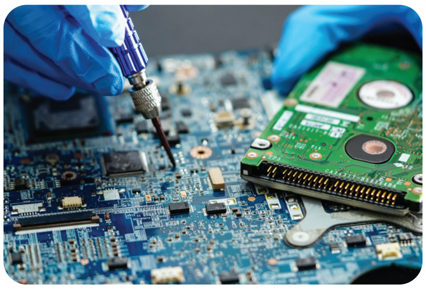
4 أَصِف الارتباط بين درجة الحرارة وقت الظهيرة وعدد حبّات المُثلَّجات التي يبيعها محمود، ثمَّ أُفسِّره.

كثافة سُكّانية: يُبيِّن الجدول الآتي بُعْد المنطقة عن مركز المدينة (بالكيلومتر)، والكثافة السُّكّانية في تلك المنطقة (عدد السُّكّان/ كيلومتر مُربَّع) لعدد من الأماكن المختارة عشوائيًّا في إحدى المدن:

البُعْد عن مركز المدينة (km)	1	2.5	4	3.5	1.9	1.7	2	3	3.8	0.6
الكثافة السُّكّانية	3500	2400	1600	1800	2400	3900	3300	2000	2300	4700

5 أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

6 أَصِف الارتباط بين البُعْد عن مركز المدينة والكثافة السُّكّانية، ثمَّ أُفسِّره.



7 **صيانة إلكترونيات:** يُقدِّر موظفو متجر إلكترونيات تكلفة صيانة الأجهزة مُسبَّقًا، ثمَّ يُدوِّنون التكلفة الفعلية لاحقًا. لتقييم دِقَّة هذه التقديرات، حلَّلت الإدارة عيِّنة عشوائية من 8 عمليات صيانة كما في الجدول أدناه. أجد معامل ارتباط بيرسون بين التكلفة التقديرية والتكلفة الفعلية، ثمَّ أُفسِّر دلالته.

التكلفة التقديرية بالدينار (x)	40	47	97	50	25	80	45	30
التكلفة الفعلية بالدينار (y)	45	39	87	63	29	73	48	27

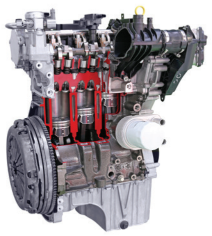
إنتاج حليب: أُعطِيت عشر بقرات وحدات من مُكمِّل غذائي يوميًّا مُدَّة أسبوعين، وكانت كتلة كل وحدة منها 25 g؛ بُغْيَةَ دراسة تأثير هذا المُكمِّل في زيادة إنتاج الحليب، علمًا بأنَّ مُعدَّل الإنتاج اليومي لكل بقرة في بداية التجربة هو 18 L. يُبيِّن الجدول الآتي عدد وحدات المُكمِّل الغذائي التي تناولتها كل بقرة، إلى جانب كمية الحليب المُنتَجة باللتر (L) في اليوم الأخير من الأسبوعين:

عدد الوحدات (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الإنتاج (y)	18	19	20	21	21	22	24	24	23	23

8 أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

9 أكتب أيَّ استنتاجات يُمكِن أنْ أتوصَّل إليها من شكل الانتشار.

10 أجد معامل ارتباط بيرسون لبيانات البقرات السبع الأولى، ثمَّ أُفسِّر دلالته.



استهلاك وقود: تعكف إحدى شركات تصنيع السيّارات على اختبار نوع جديد من المُحرِّكات لبيان تأثير السرعة (km/h) في مُعدَّل استهلاك الوقود (km/L)، وقد أمكن لها الحصول على البيانات الآتية في ظلِّ ظروف مَعْملية يُمكِن فيها تشغيل المُحرِّك بسرعة ثابتة:

السرعة (x)	50	65	80	100	120
مُعدَّل استهلاك الوقود (y)	12	11.9	11.2	10.3	9.8

11 أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

12 أستعمل معادلة خطِّ الانحدار التي أوجدتها في السؤال السابق للتنبُّؤ بمُعدَّل استهلاك الوقود إذا بلغت سرعة السيّارة 70 km/h

13 أُفسِّر دلالة كلٍّ من الميل (m) والمقطع (b) في معادلة خطِّ الانحدار.

جُمِعت 10 أزواج من القِيَم المُتناظِرة للمُتغيِّر x والمُتغيِّر y، فتبيَّن أنَّ:

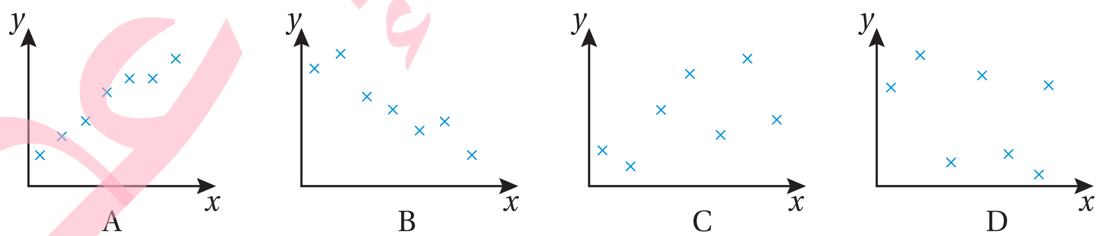
$$\sum x_i = 109, \quad \sum y_i = 120, \quad \sum x_i^2 = 1960, \quad \sum y_i^2 = 2145$$

وأنَّ معادلة خطِّ انحدار y على x هي: $y = 0.7x + 4.4$:

14 أجد $\sum x_i y_i$.

15 أجد معامل ارتباط بيرسون بين المُتغيِّر x والمُتغيِّر y.

تُبيِّن أشكال الانتشار الآتية درجات مختلفة من الارتباط بين مُتغيِّرين:



أكتب بجانب معامل الارتباط رمز شكل الانتشار المناسب في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $r = -0.94$

16 $r = -0.31$

19 $r = 0.97$

18 $r = 0.55$

20 **إدارة أعمال:** حَسَبت سامية معامل ارتباط بيرسون بين عمر الموظف وعدد الأخطاء التي يقع فيها أثناء إدخال البيانات المالية في النظام الحاسوبي للشركة، فوجدته -0.86. ماذا تعني هذه القيمة لمعامل الارتباط؟

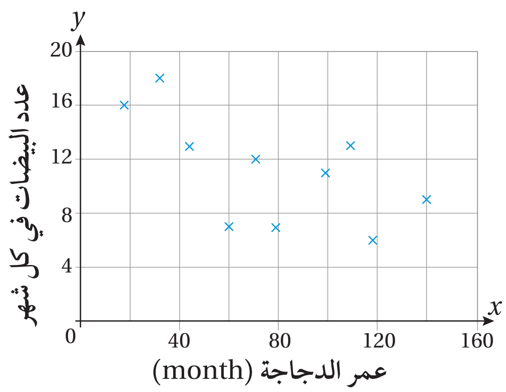
مهارات التفكير العليا

21 **تبرير:** إذا كان الارتباط بين x و y موجبًا، والارتباط بين y و z سالبًا، والارتباط بين z و w موجبًا، فما نوع الارتباط بين x و w؟ أُبرِّر إجابتي.

22 **أكتشف الخطأ:** يُمثِّل شكل الانتشار المجاور أعمار عدد من الدجاجات بالأشهر (x)، وعدد البيضات التي تضعها كلٌّ من هذه الدجاجات في الشهر (y). أوجدت ميسون معادلة خطِّ انحدار y على x، فكانت هذه المعادلة كما يأتي:

$$y = 0.063x + 16.1$$

أُبيِّن من دون إجراء أيِّ حسابات أنَّ المعادلة التي وضعتها ميسون غير صحيحة.



تبرير: جمعت سلمى بيانات من أحد المحالِّ التجارية الكبرى عن 8 مُنتَجات مختلفة من الشوكولاتة، كتلة كلٍّ منها 100 g، وذلك بهدف دراسة العلاقة بين النسبة المئوية لمسحوق الكاكاو الخام في كل قطعة من هذه المُنتَجات وسعر البيع (بالقرش) كما هو مُبيَّن في الجدول الآتي:

العلامة التجارية للشوكولاتة	A	B	C	D	E	F	G	H
النسبة المئوية لمسحوق الكاكاو الخام (x)	10	20	30	35	40	50	60	70
السعر بالقرش (y)	35	55	40	100	60	90	110	130

23 أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

24 أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

25 أجد معامل ارتباط بيرسون بين نسبة مسحوق الكاكاو الخام وسعر قطعة الشوكولاتة، ثمَّ أُفسِّر دلالته.

26 تعتقد سلمى أنَّ سعر قطعة الشوكولاتة من إحدى العلامات التجارية مُبالَغ فيه. أستعمل شكل الانتشار لتحديد هذه العلامة التجارية، ثمَّ أقترح سعرًا عادلًا لقطعة الشوكولاتة التي تحمل هذه العلامة، وأُبرِّر إجابتي.

الدرس

2

السلاسل الزمنية

Time Series

فكرة الدرس

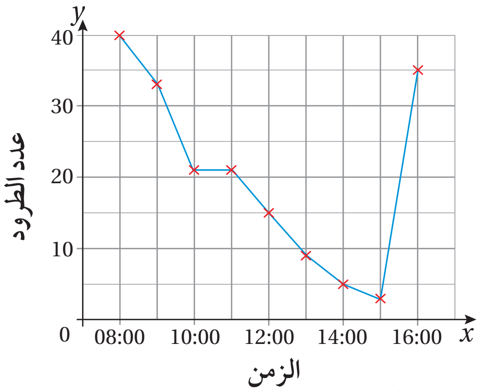
- تعرُّف السلاسل الزمنية، وكيفية تمثيلها بيانيًّا، وتفسيرها.
- تعرُّف الاتجاه العام في سلسلة زمنية، ورسم خطِّ الاتجاه العام، واستعماله لتحديد إذا كان اتجاه البيانات العام في سلسلة زمنية صاعدًا أو هابطًا أو مستقرًّا.

المصطلحات

السلسلة الزمنية، السلسلة الزمنية رُبع السنوية، خطُّ الاتجاه العام، خطُّ اتجاه عام صاعد، خطُّ اتجاه عام هابط، خطُّ اتجاه عام مستقر.

مسألة اليوم

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور عدد الطرود المُتبقِّية في أحد مستودعات شحن البضائع الإلكترونية خلال أحد الأيام:



1) في أيِّ ساعة كان عدد الطرود في المستودع هو الأقلَّ؟

2) ما عدد الطرود التي شُحِنت بين الساعة 8:00 صباحًا والساعة 12:00 ظهرًا؟

3) ما التغيُّر الذي طال عدد الطرود بين الساعة 15:00 والساعة 16:00؟ ما تفسير ذلك في هذا السياق؟

السلاسل الزمنية وتمثيلها بيانيًّا

السلسلة الزمنية (time series) هي تسلسل من البيانات التي تُجمَع أو تُدوَّن عند نقاط زمنية مُتتابِعة، وتكون عادةً على فترات مُنتظَمة (كل ساعة، أو يوم، أو شهر، أو سنة مثلًا). تُستعمَل هذه السلاسل في العديد من المجالات، لا سيَّما الاقتصادية والبيئية والطبية؛ لِما تُوفِّره من قدرة على تحليل التغيُّرات بمرور الزمن. من الأمثلة الشائعة على السلاسل الزمنية: سعر إغلاق أحد الأسهم يوميًّا على مدار سنة كاملة، وعدد زُوّار موقع إلكتروني كل ساعة.

يُمكِن تمثيل السلسلة الزمنية بيانيًّا، بحيث يُمثَّل الزمن على المحور الأُفقي (x)، وتُمثِّل قِيَم الظاهرة المدروسة على المحور الرأسي (y).

بدايةً، تُعيَّن نقاط في المستوى الإحداثي تُمثِّل الأزواج المُرتَّبة (t, v)، حيث: t الزمن، و v القيمة (المُشاهَدة) المُقابِلة لـ t . بعد ذلك، يوصَل بين كل نقطتين مُتتالِيتين بقطعة مستقيمة مُتقطِّعة؛ فيَنتج شكل خطِّي (مُتشعِّب) يُبيِّن مراحل تطوُّر الظاهرة بمرور الزمن، ويساعد على تحليل الاتجاهات والتغيُّرات الدورية والموسمية.

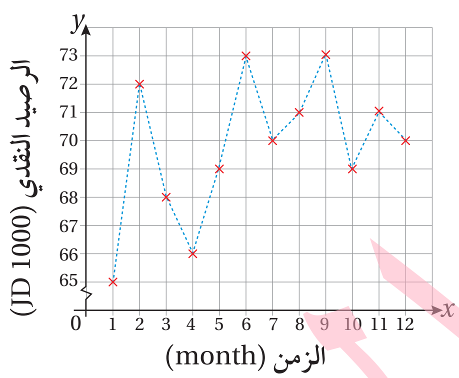
مثال 1 : من الحياة

رصيد نقدي: **يُبيِّن الجدول التالي المبالغ النقدية (بآلاف الدنانير) التي توافرت في خزنة أحد متاجر التجزئة في نهاية كل شهر من شهور عام 2024م. أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا:**

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبلغ (JD 1000)	65	72	68	66	69	73	70	71	73	69	71	70

الخطوة 1: أرسم الرُّبع الأوَّل من المستوى الإحداثي، ثمَّ أختار تدريجًا مناسبًا للمحورين الإحداثيين.

الخطوة 2: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي باستعمال علامة (×).



الخطوة 3: أَصِل بين كل نقطتين مُتتالِيتين بقطعة مستقيمة مُتقطِّعة؛ لعدم وجود معلومات عن المبلغ المُتوافِر في الأيام التي تقع بين نهايتي كل شهرين مُتتالِيين.

أتعلَّم

تتراوح قيمة المبلغ المُتوافِر في الخزنة بين 65 ألف دينار و73 ألف دينار؛ لذا، فإنَّ من المناسب تدريج المحور الرأسي من 65 إلى 73، وجعل طول كل مُربَّع وحدة واحدة لتسهيل تعيين النقاط.

أتذكَّر

تشير العلامة (⌇) إلى أنَّ التدريج على المحور y غير مُكتمِل.

أتحقَّق من فهمي

ألعاب: يُبيِّن الجدول التالي المبيعات الشهرية (بآلاف الدنانير) لمتجر مُتخصِّص في تجارة ألعاب الأطفال خلال أحد الأعوام. أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

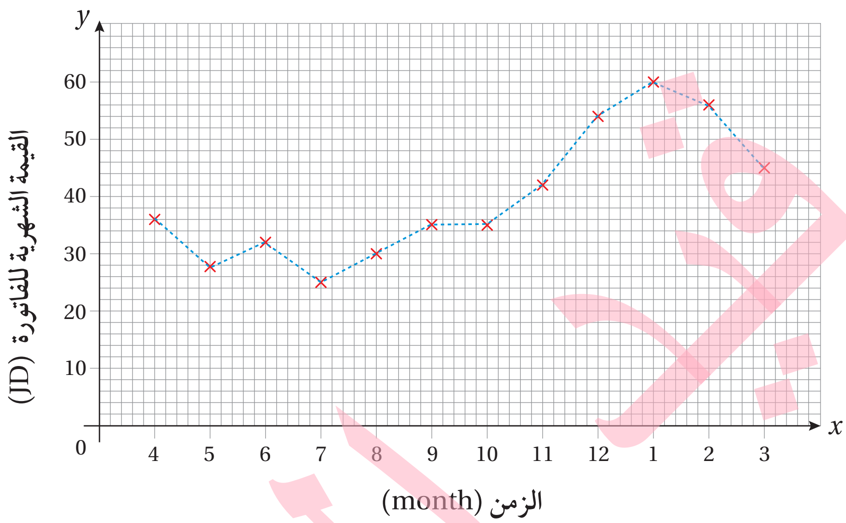
الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبلغ (JD 1000)	3.6	5.2	5.1	5.5	5	7.1	7	7.4	5.8	7.9	7.5	8.8

قراءة السلاسل الزمنية وتفسيرها

يُمكِن تحليل منحنى السلسلة الزمنية المُعطى، وقراءته، وتفسيره، فضلًا عن استعماله للتنبُّؤ بقِيَم الظاهرة – موضوع الدراسة – في فترات زمنية لاحقة.

مثال 2 : من الحياة

فواتير كهرباء: أتأمَّل الشكل الآتي الذي يُمثِّل منحنى السلسلة الزمنية لقيمة فاتورة الكهرباء الشهرية لإحدى العائلات (بالدينار)، بَدْءًا بشهر نيسان عام 2015م، وانتهاءً بشهر آذار عام 2016م، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة التي تليه:



أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ القِيَم على المحور x تُمثِّل الأشهر؛ لذا استُعمِلت الأعداد: 1, 2, 3 للدلالة على أوَّل ثلاثة أشهر من عام 2016م.

1 **في أيِّ شهرٍ كان صَرْف العائلة للكهرباء هو الأعلى؟ أُبرِّر إجابتي.**

في شهر كانون الثاني؛ لأنَّ قيمة الفاتورة كانت هي العليا في هذا الشهر.

2 **ما الفترة الزمنية التي ظلَّ فيها استهلاك العائلة للكهرباء ثابتًا؟**

الفترة الزمنية بين شهر أيلول وشهر تشرين الأوَّل.

3 **أَصِف تغيُّر استهلاك العائلة للكهرباء على مدار العام.**

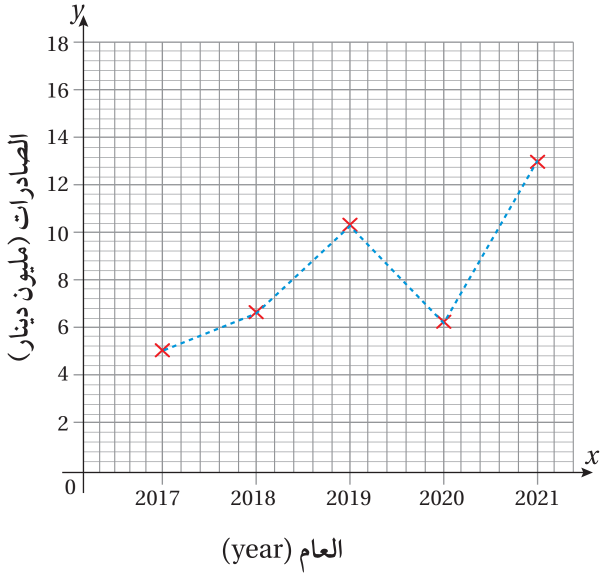
بوجه عام، انخفض استهلاك العائلة للكهرباء في الفترة بين شهر نيسان وشهر تشرين الأوَّل، ثمَّ عاد إلى الارتفاع في الفترة بين شهر تشرين الثاني وشهر آذار.

أُفكِّر

أقترح سببًا يُفسِّر زيادة استهلاك العائلة للكهرباء في هذه الفترة.

أتحقَّق من فهمي

صـادرات: أتأمَّل الشـكل المجـاور الـذي يُمثِّل منحنى السلسـلة الزمنية لصـادرات إحدى الشـركات الصناعية (بملايين الدنانير) بين عام 2017م وعام 2021م، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية:



a) ما قيمة صادرات الشركة عام 2019م؟

b) أَصِف تغيُّر صادرات الشركة في هذه الفترة الزمنية.

c) أقترح سببًا يُفسِّر زيادة صادرات الشركة عام 2021م.

السلاسل الزمنية الرُّبعية

تعلَّمْتُ في المثالين السابقين أنَّ البيانات تُدوَّن في السلاسل الزمنية على فترات زمنية مُتساوِية، قد تكون دقائقَ، أو ساعاتٍ، أو أيامًا، أو أسـابيعَ، أو أشهرًا، أو سنواتٍ، وذلك بحسب طبيعة الظاهرة موضوع الدراسـة. في المجالات الصناعية والتجارية والمالية، تُستعمَل غالبًا فترات زمنية رُبع سنوية (كل ثلاثة أشهر). يُطلَق على هذا النوع من السلاسل اسم **السلسلة الزمنية رُبع السنوية** (quarterly time series)، وهي تُعَدُّ أداة فعّالة لفهم الأنماط الموسمية والأنماط الدورية في البيانات؛ ما يُسهِم في تحسين عمليـة التنبُّؤ، ودعم التخطيط السـليم، واتِّخاذ قرارات مدروسة تُفْضي إلى تعزيز الإنتاجية، وزيادة العائد المالي مستقبلًا.

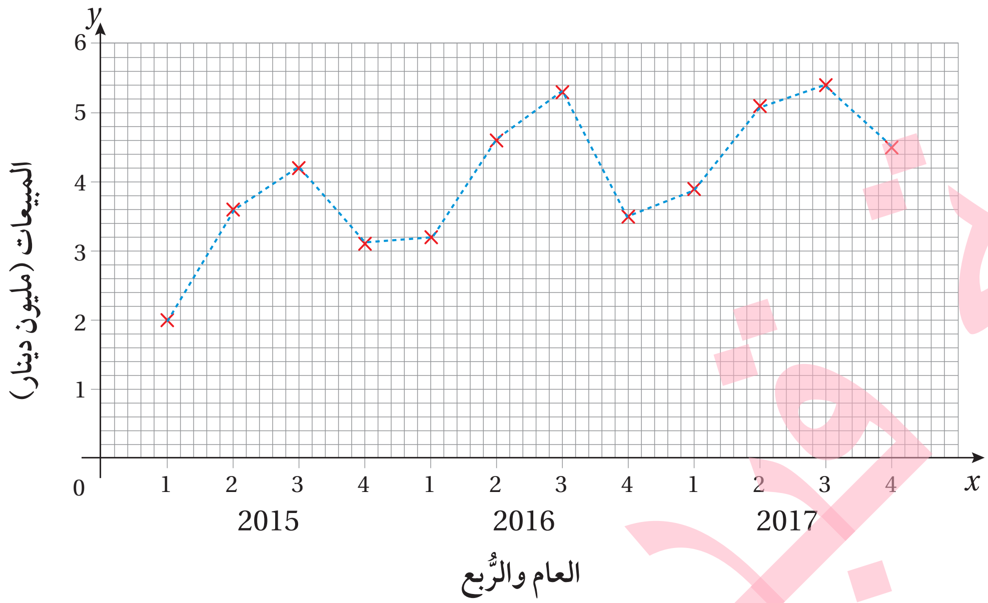
مثال 3 : من الحياة

مبيعات: يُبيِّن الجدول الآتي المبيعات الرُّبعية (بملايين الدنانير) لإحدى شركات صناعة الملابس على مدار 3 أعوام مُتتالِية:

العام	2015				2016				2017			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
المبيعات (مليون دينار)	2	3.6	4.2	3.1	3.2	4.6	5.3	3.5	3.9	5.1	5.4	4.5

1 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

أرسم محورين، ثمَّ أُدوِّن الأرباع على المحور الأُفقي، وأختار تدريجًا مناسبًا للمحور الرأسي، ثــمَّ أُعيِّن النقــاط المُقابِلة لكل رُبعٍ وقيمــة المبيعات فيه لكل عام، ثمَّ أَصِــل بين كل نقطتين مُتتالِيتين بقطعة مستقيمة مُتقطِّعة ليَنتج الرسم الآتي:



2 في أيِّ الأرباع كان حجم المبيعات أكثر سنويًّا؟

كان حجم المبيعات أكثر في الرُّبع الثالث من كل عام.

3 هل مبيعات الشركة تتزايد أم تتناقص بوجه عام؟

يَتَّضِح من الرسم أنَّ مبيعات الشركة تتزايد بوجه عام بمرور الزمن، ولو بشكل طفيف.

4 أَصِف التمثيل البياني.

يتباين حجم مبيعات الملابس على مدار العام؛ إذ تكون المبيعات في أدنى مستوياتها في الرُّبع الأوَّل مــن كل عام، ثمَّ تزداد في الرُّبع الثاني، لتصل ذروتهــا في الرُّبع الثالث من كل عام قبل أنْ تنخفض مَــرَّة أُخرى في الرُّبع الرابع من كل عام. والتمثيل البياني يُوضِّح أنَّ حجم مبيعات الملابس آخِذ بالتزايد كل سنة بوجه عام.

أتعلَّم

أُلاحِــظ أنَّ أقــلَّ قيمــة للمبيعــات هــي مليونا دينــار، وأنَّ أكبر قيمة لها هــي 5.4 ملاييــن دينار؛ لــذا، فإنَّ من المناســب تقســيم المحور الرأسي (6–1) أقسامًا مُتساوِيةً.

أتعلَّم

أَصِــف التمثيــل البياني دائمًا في ســياق المسألة. فمثلًا، سياق هذه المسألة هو مبيعات الملابس.

أتحقَّق من فهمي

عطور: يُبيِّن الجـدول الآتي البيانات الرُّبعية لعـدد زجاجات العطور المَبيعة في محل تجاري كل رُبع عام على مدار 3 أعوام مُتتالِية:

العام	2020				2021				2022			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد زجاجات العطور المَبيعة	26	44	105	48	31	57	112	51	34	59	115	54

a) أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

b) في أيِّ الأرباع كان عدد زجاجات العطور المَبيعة أقلَّ سنويًّا؟

c) هل مبيعات المحل من زجاجات العطور تتزايد أم تتناقص بوجه عام؟

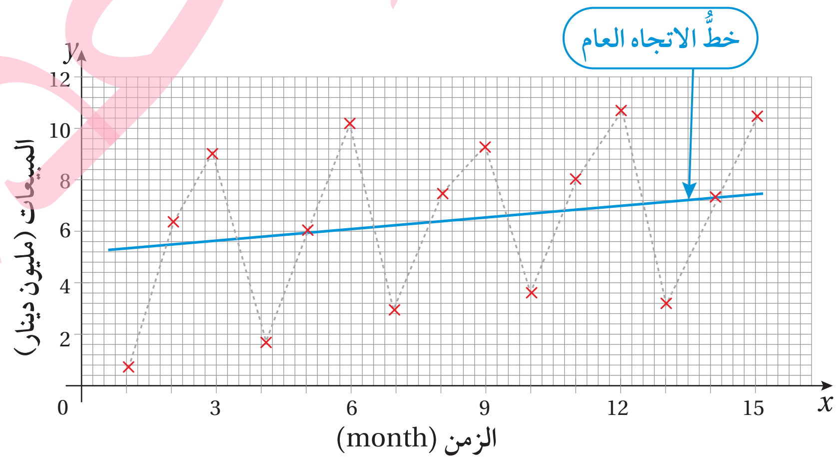
d) أَصِف التمثيل البياني.

أتعلَّم

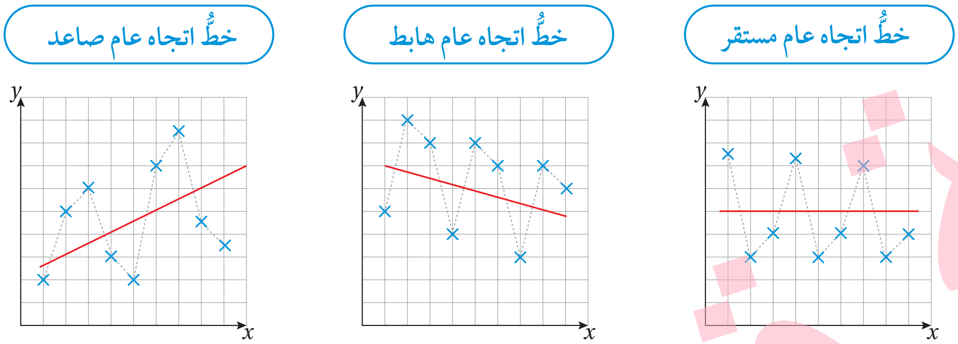
عنـد وصـف المبيعات بأنَّها تزداد بوجه عام، فإنَّ ذلك لا يعنـي بالضرورة أنَّها في ازدياد دائم، وإنَّما يعني أنَّها تزداد بوجه عام، وأنَّها قد تتناقص أحيانًا.

خطُّ الاتجاه العام

تعلَّمْتُ سابقًا رسم المستقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، الذي يتوسَّط نقاط الشكل، والذي قد يمرُّ ببعضها، مع مراعاة أنْ يكون عدد النقاط على جانبي المستقيم مُتقارِبًا. وبالطريقة نفسها، يُمكِن رسم مستقيم يتوسَّط نقاط السلسلة الزمنية، ويُعرَف في هذه الحالة باسم **خطِّ الاتجاه العام** (trend line)؛ إذ يُستعمَل لتوضيح التوجُّه العام لبيانات السلسلة الزمنية كما هو مُبيَّن في الشكل الآتي:



يَتَّخِذ خطُّ الاتجاه العام أشكالًا مختلفةً وَفقًا لميله؛ فإذا كان الميل موجبًا، فإنَّ الخطَّ يكون صاعدًا، ويُسمّى **خطَّ اتجاه عام صاعدًا** (rising trend line). أمّا إذا كان الميل سالبًا، فإنَّ الخطَّ يكون هابطًا، ويُسمّى **خطَّ اتجاه عام هابطًا** (falling trend line)، وأمّا إذا كان الخطُّ أُفقيًّا تقريبًا، ولا يشير إلى زيادة في البيانات أو إلى نقصان فيها، فإنَّه يُسمّى **خطَّ اتجاه عام مستقرًّا** (level trend line). والشكل الآتي يُبيِّن الحالات الثلاث لخطِّ الاتجاه العام.

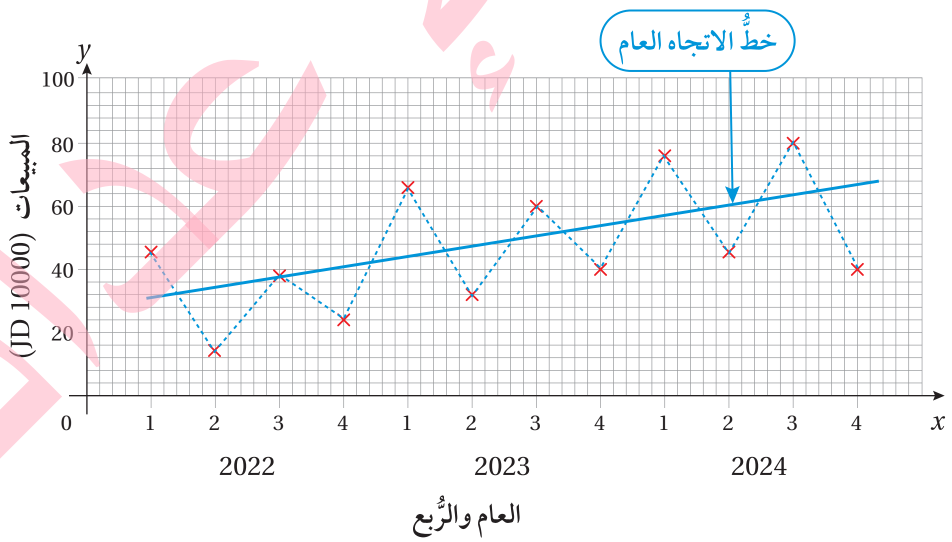


مثال 4 : من الحياة

مبيعات: يُبيِّن الجدول الآتي المبيعات الرُّبعية (بعشرات آلاف الدنانير) لأحد معارض السيّارات الكهربائية على مدار 3 أعوام:

العام	2022				2023				2024			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
المبيعات (JD 10000)	45	14	38	23	65	32	60	40	75	45	80	40

1 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا، ثمَّ أرسم عليها خطَّ الاتجاه العام.



أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ حجم المبيعات أخذ ينقص أحيانًا، لكنَّ الاتجاه العام للمبيعات في ازدياد.

2 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

خطُّ اتجاه البيانات العام هو من النوع الصاعد؛ ما يعني أنَّ المبيعات مُرشَّحة للازدياد مستقبلًا.

أتحقَّق من فهمي

متاحـــف: يُبيِّن الجدول الآتي عدد الزُّوّار (بالآلاف) لأحـــد المتاحف كل رُبع عام من الأعوام (2022م – 2024م):

العام \ الرُّبع	1	2	3	4
2022	1460	1840	2000	1520
2023	1490	1670	1800	1460
2024	1300	1650	1690	1380

a) أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا، ثمَّ أرسم عليها خطَّ الاتجاه العام.

b) أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

رصيد: يُبيِّن الجدول الآتي رصيد حساب منار البنكي (بمئات الدنانير) في نهاية كل شهر من عام 2024م:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الرصيد (JD 100)	6	8.5	9.8	11.8	10	8.7	8	2	4.5	5.7	8.6	5.8

1 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

2 في أيِّ نهاية شهر كان رصيد منار هو الأعلى؟

3 إذا علمْتُ أنَّ منار سدَّدت فواتير كثيرة في شهرين من هذا العام، فأُحدِّد هذين الشهرين، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

مواليد: يُبيِّن الجدول الآتي عدد المواليد (بالآلاف) في إحدى المدن الأردنية بين عام 2014م وعام 2021م:

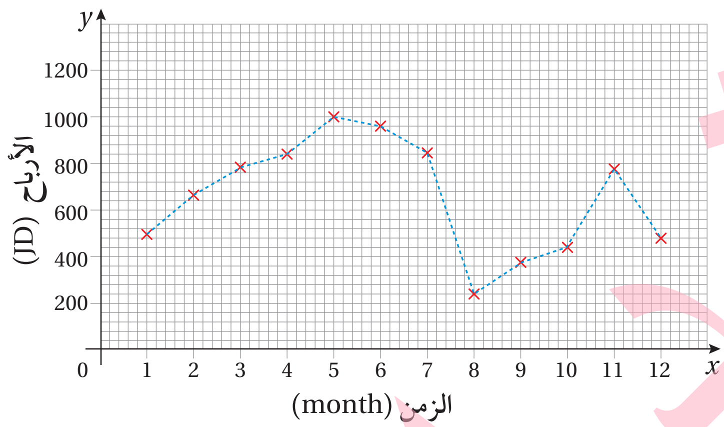
العام	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
المواليد (1000)	27.5	29	26	23.8	24.3	25.2	26.4	30

4 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

5 في أيِّ الأعوام كان عدد المواليد هو الأقلَّ؟

6 أَصِف تغيُّرَ أعداد المواليد في هذه الفترة الزمنية.

مشروعات صغيرة: أتأمَّل الشكل المجاور الذي يُمثِّل منحنى السلسلة الزمنية لأرباح متجر لبيع المُنتَجات اليدوية (بالدينار) في نهاية كل شهر خلال عام كامل، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:



7 ما الشهر الذي حقَّق فيه المتجر أعلى ربح؟

8 إذا علمْتُ أنَّ المتجر أغلق أبوابه عددًا من الأيام خلال شهرين بسبب أعمال الصيانة، فما هذان الشهران؟ أُبرِّر إجابتي.

عُمّال بِناء: يُبيِّن الجدول الآتي البيانات الرُّبعية لعدد عُمّال البِناء (بالآلاف) العاملين في مشروعات إحدى شركات المقاولات بين عام 2017م وعام 2019م:

العام	2017				2018				2019			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد العاملين (بالآلاف)	14	19	22	15	12	20	24	16	14	22	26	18

9 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

10 في أيِّ الأرباع كان عدد العُمّال هو الأقلَّ سنويًّا؟

11 هل أعداد العُمّال تتزايد أم تتناقص بوجه عام؟

12 أَصِف التمثيل البياني.

13 أرسم خطَّ الاتجاه العام على منحنى السلسلة الزمنية.

14 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

سيّارات: يُبيِّن الجدول المجاور البيانات الرُّبعية لعدد السيّارات (بالآلاف) المَبيعة التي تعمل بالوقود في إحدى الدول التي تبنَّت خُطَّة للحدِّ من مصادر غازات الدفيئة بين عام 2020م وعام 2023م:

العام \ الرُّبع	1	2	3	4
2020	346	620	480	320
2021	265	490	370	225
2022	198	409	305	186
2023	175	380	290	100

15 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا.

16 في أيِّ الأرباع كان عدد السيارات المَبيعة هو الأعلى سنويًّا؟

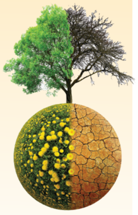
17 هل أعداد السيارات المَبيعة تتزايد أم تتناقص بوجه عام؟

18 أَصِف التمثيل البياني.

19 أرسم خطَّ الاتجاه العام على منحنى السلسلة الزمنية.

20 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

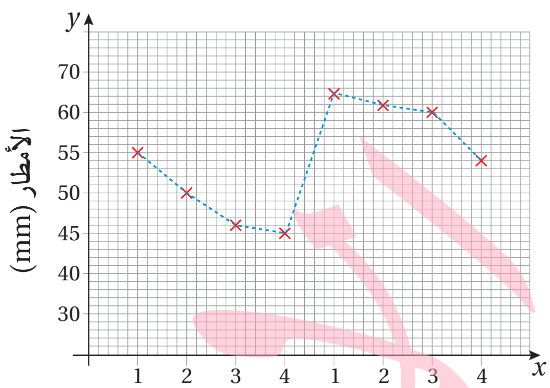
معلومة



تُمثِّل عوادم السيّارات مصدرًا رئيسًا لغاز ثاني أكسيد الكربون؛ وهو أحد غازات الدفيئة التي تتسبَّب في ظاهرة الاحتباس الحراري التي تُؤثِّر سلبًا في الأنظمة البيئية حول العالَم.

مهارات التفكير العليا

21 **أكتشف الخطأ:** أُحدِّد الخطأ (الأخطاء) في تمثيل السلسلة المُبيَّنة في الشكل المجاور، ثمَّ أُصحِّح ما فيها من خطأ.



تحدٍّ: يُبيِّن الجدول الآتي مُعدَّل المبيعات الشهرية (بآلاف الدنانير) لشركتين صناعيتين مُتنافِستين على مدار 3 أعوام:

العام	2022			2023			2024		
الأشهر	1–4	5–8	9–12	1–4	5–8	9–12	1–4	5–8	9–12
الشركة (A)	260	240	290	470	430	520	720	700	730
الشركة (B)	460	340	400	400	480	410	460	510	540

22 أُمثِّل مبيعات الشركتين في مستوى إحداثي واحد.

23 أرسم خطَّ الاتجاه العام لكلٍّ من الشركتين.

24 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام لكلٍّ من الشركتين، ثمَّ أُفسِّره.

الدرس 3

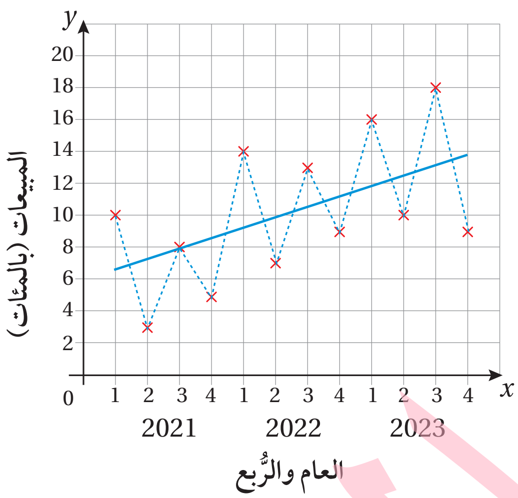
التباين في السلاسل الزمنية
Variations in Time Series

فكرة الدرس

- إيجاد الأوساط المُتحرِّكة في سلسلة زمنية، واستعمالها لوصف اتجاه السلسلة العام.
- تعرُّف التباين الموسمي في السلاسل الزمنية، وتفسيره.
- حساب التباين الموسمي عند نقطة ما، واستعمال وسطه الحسابي وخطِّ الاتجاه العام للتنبُّؤ ببيانات مستقبلية.

المصطلحات التباين الموسمي، الأوساط المُتحرِّكة، الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

مسألة اليوم **يُمثِّل الشكل المجاور منحنى السلسلة الزمنية للبيانات الرُّبعية لعدد أجهزة الهاتف المحمول المَبيعة (بالمئات) في محل هواتف على مدار 3 أعوام مُتتالِية، وخطَّ الاتجاه العام لهذه السلسلة:**

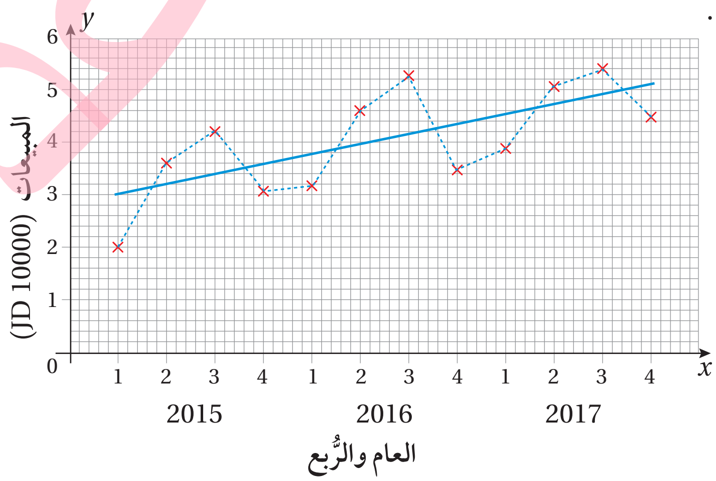


1) أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

2) هل يُمكِن التنبُّؤ بعدد الهواتف المَبيعة في الرُّبع الأوَّل من عام 2024م؟

التباين في السلسلة الزمنية

يُمثِّل الشكل الآتي منحنى السلسلة الزمنية للمبيعات الرُّبعية (بعشرات آلاف الدنانير) من أجهزة تكييف الهواء في محل أجهزة كهربائية على مدار 3 أعوام مُتتالِية، وخطَّ الاتجاه العام لهذه السلسلة.



بالرغم من أنَّ الاتجاه العام لمبيعات أجهزة التكييف يُظهِر زيادة تدريجية على المدى الطويل، فإنَّ حجم المبيعات يختلف من رُبع إلى آخر خلال العام نفسه؛ ففي الرُّبعين الأوَّل والرابع، تكون المبيعات أقلَّ من المُتوقَّع مقارنةً بخطِّ الاتجاه العام، في حين ترتفع المبيعات في الرُّبعين الثاني والثالث، وتكون أكثر ممّا يتوقَّعه خطُّ الاتجاه العام. يُعْزى هذا التباين إلى تأثير الفصول؛ إذ يزداد الطلب على المُكيِّفات خلال أشهر الصيف بسبب ارتفاع درجات الحرارة، في حين يقلُّ الطلب عليها شتاءً.

في بعض السلاسل الزمنية، قد تظهر تباينات واختلافات كبيرة نتيجةً لوجود العديد من القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى؛ ما يُصعِّب رسم خطِّ الاتجاه، وتحديد الاتجاه العام بدِقَّة. لمعالجة هذه المشكلة، تُستعمَل طريقة أكثر فعّالية، تُسمّى **الأوساط المُتحرِّكة** (moving averages)؛ وهي قِيَم جديدة تُحسَب بأخذ الوسط الحسابي لعدد من المُشاهَدات المُتتالِية ضمن السلسلة الزمنية، بهدف تقليل تأثير التذبذبات الموسمية والعشوائية، وتوضيح الاتجاه العام. ولكنْ، يُشترَط في ذلك أنْ تشمل المُشاهَدات المُستعمَلة دورة فصلية كاملة؛ أيْ أنْ تشمل مُشاهَدة واحدة من كل فصل. أمّا في البيانات الرُّبعية، فيتمُّ عادةً استعمال أربع نقاط مُتتالِية لإيجاد الوسط المُتحرِّك؛ لذا تُسمّى هذه الطريقة **الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع** (four points moving averages).

أتعلَّم

قد تتكوَّن بعض السلاسل الزمنية من فصول، يمتدُّ كلٌّ منها إلى أربعة أشهر. وفي هذه الحالة، تُحسَب الأوساط المُتحرِّكة لثلاث قِيَم مُتتالِية، في ما يُعرَف بالأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الثلاث.

مفهوم أساسي — **الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع**

إذا كانت المُشاهَدات (القِيَم) بالترتيب هي: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$، فإنَّ الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ تعطى على النحو الآتي:

$$M_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, M_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4}, M_3 = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{4}$$

وهكذا إلى آخر الأوساط المُتحرِّكة.

مثال 1 : من الحياة

مبيعات: أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع للسلسلة الزمنية الآتية التي تُبيِّن المبيعات الرُّبعية (بآلاف الدنانير) لأحد المتاجر على مدار عامين.

العام	2021				2022			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4
المبيعات (JD 1000)	15	25	53	24	17	28	60	50

أُنظِّم البيانات والحسابات على النحو الآتي:

العام	الرُّبع	المبيعات (JD 1000)
2021	1	15
	2	25
	3	53
	4	24
2022	1	17
	2	28
	3	60
	4	50

الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع

$$M_1 = \frac{15 + 25 + 53 + 24}{4} = 29.25$$

$$M_2 = \frac{25 + 53 + 24 + 17}{4} = 29.75$$

$$M_3 = \frac{53 + 24 + 17 + 28}{4} = 30.5$$

$$M_4 = \frac{24 + 17 + 28 + 60}{4} = 32.25$$

$$M_5 = \frac{17 + 28 + 60 + 50}{4} = 38.75$$

أتعلَّم

إذا كان عدد المُشاهَدات في سلسلة زمنية هو n، فإنَّ عدد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع هو $n-3$، حيث $n \geq 4$.

أتحقَّق من فهمي

أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع للسلسلة الزمنية الآتية التي تُبيِّن نسبة الإشغال في أحد الفنادق خلال عامين ونصف.

العام	الأوَّل				الثاني				الثالث	
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
نسبة الإشغال (%)	85	75	90	70	80	65	85	60	75	60

رسم خطِّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية رسم خطِّ الاتجاه العام بالنظر، لكنَّ هذا الأسلوب ليس دقيقًا بما فيه الكفاية. يُمكِن رسم خطِّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بطريقة أكثر موثوقية، وذلك باستعمال نقاط الأوساط المُتحرِّكة؛ إذ تُوفِّر هذه النقاط تمثيلًا أكثرَ سلاسةً ووضوحًا لاتجاه البيانات الحقيقي بمرور الزمن.

أتعلَّم

يُعَدُّ خطُّ الاتجاه المرسوم باستعمال نقاط الأوساط المُتحرِّكة أكثر دِقَّة في تمثيل الاتجاه العام مقارنةً بالخطِّ الذي يُرسَم اعتمادًا على البيانات الأصلية مباشرة. ولكنْ، لا ينبغي رسم هذا الخطِّ عن طريق توصيل نقاط الأوساط المُتحرِّكة، وإنَّما يُرسَم على نحوٍ يكون فيه عدد النقاط الواقعة فوقه وعدد النقاط الواقعة تحته مُتقارِبًا؛ ما يُعزِّز دِقَّته في تمثيل الاتجاه الحقيقي للسلسلة الزمنية.

مفهوم أساسي   **رسم خطِّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة**

يُمكِن تمثيل خطِّ الاتجاه العام لسلسلة زمنية بيانيًّا باستعمال نقاط الأوساط المُتحرِّكة، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. تمثيل السلسلة بيانيًّا.
2. إيجاد منتصفات الفترات الزمنية التي ستُقابِل الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع، ثمَّ إيجاد تلك الأوساط.
3. تعيين نقطة لكل وسط حسابي مُتحرِّك، بحيث توضَع هذه النقطة مُقابِل منتصف الفترة الزمنية التي استُعمِلت لحساب ذلك الوسط، وعلى ارتفاع يُعادِل قيمة الوسط الحسابي المُتحرِّك.
4. رسم المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط الأوساط المُتحرِّكة، الذي يُمكِن به رؤية الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بوضوح وسهولة.

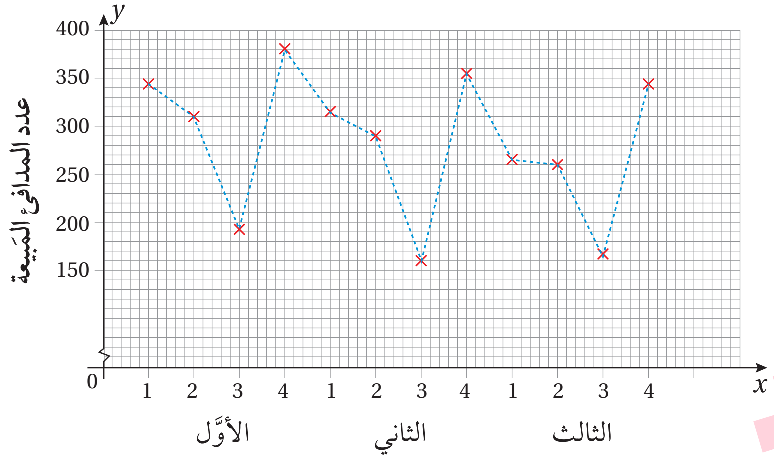
مثال 2 : من الحياة

مدافئ: **يُبيِّن الجدول الآتي البيانات الرُّبعية لعدد المدافئ التي باعها مصنع على مدار 3 أعوام مُتتالِية:**

العام	الأوَّل				الثاني				الثالث			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد المدافئ	342	306	194	378	315	287	163	355	265	258	169	342

1. **أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.**

الخطوة 1: أُمثِّل السلسلة بيانيًّا.



الخطوة 2: أجد منتصفات الفترات الزمنية التي ستُقابِل الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع، ثمَّ أجد تلك الأوساط.

يُقابِل الوسط المُتحرِّك الأوَّل منتصف الفترة الزمنية من 1 إلى 4 في العام الأوَّل؛ أيْ 2.5، ويُقابِل الوسط المُتحرِّك الثاني منتصف الفترة الزمنية من 2 في العام الأوَّل إلى 1 في العام الثاني؛ أيْ 3.5، وهكذا.

أجد الأوساط المُتحرِّكة كما تعلَّمْتُ سابقًا، ثمَّ أُنظِّم البيانات والحسابات على النحو الآتي:

العام	الرُّبع	عدد المدافئ
1	1	342
	2	306
	3	194
	4	378
2	1	315
	2	287
	3	163
	4	355
3	1	265
	2	258
	3	169
	4	342

منتصف الفترة	الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع
2.5	$M_1 = 305$
3.5	$M_2 = 298.25$
4.5	$M_3 = 293.5$
1.5	$M_4 = 285.75$
2.5	$M_5 = 280$
3.5	$M_6 = 267.5$
4.5	$M_7 = 260.25$
1.5	$M_8 = 261.75$
2.5	$M_9 = 258.5$

أتعلَّم

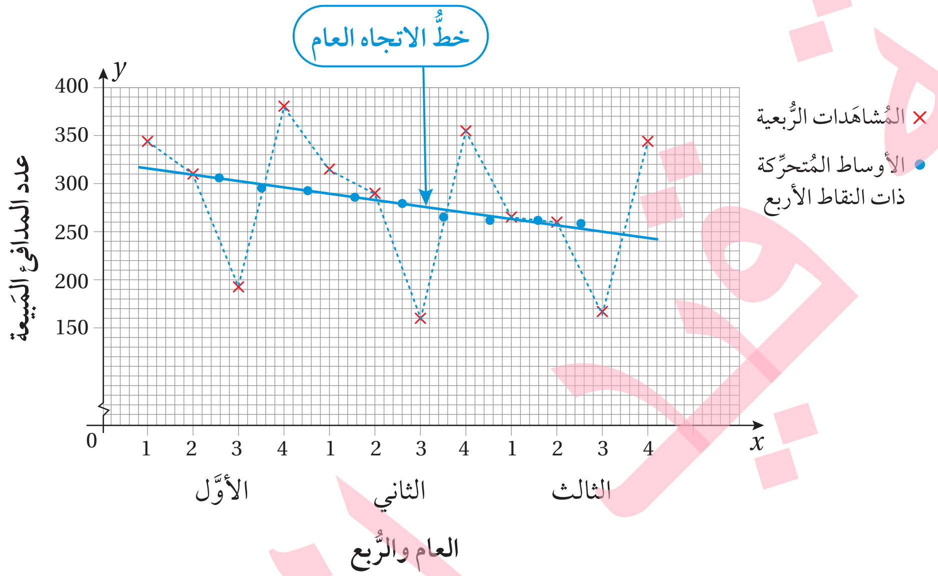
يزيد منتصف الفترة المُقابِل للوسط المُتحرِّك ذي النقاط الأربع بمقدار 0.5 على رقم ثاني رُبع من الأرباع الأربعة المُستعمَلة لحساب ذلك الوسط المُتحرِّك.

الخطوة 3: أُعيِّن الأوساط المُتحرِّكة في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن كل وسط مُتحرِّك، بحيث توضَع النقطة مُقابِل منتصف الفترة الزمنية التي استُعمِلت لحساب ذلك الوسط.

الخطوة 4: أرسم خطَّ الاتجاه العام.

أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للأوساط المُتحرِّكة التي يتوسَّطها، بحيث يكون عدد النقاط على جهتيه مُتساوِيًا.



أتعلَّم

يُمكِن ترقيم الأرباع في صورة: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ لحساب نقطة منتصف الفترة التي يَلزم تعيين نقطة الوسط المُتحرِّك مُقابِلها.

2 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

الاتجاه العام هابط؛ أيْ إنَّ مبيعات المدافئ تتناقص بمرور الزمن.

أتحقَّق من فهمي

كتب: **يُبيِّن الجدول الآتي البيانات الرُّبعية لعدد الكتب المستعارة من مكتبة عامة في كل يوم تفتح فيه المكتبة أبوابها على مدار 3 أسابيع:**

الأسبوع	الأوَّل				الثاني				الثالث			
اليوم	أحد	إثنين	أربعاء	خميس	أحد	إثنين	أربعاء	خميس	أحد	إثنين	أربعاء	خميس
عدد الكتب المستعارة	36	21	33	54	32	24	30	57	36	28	34	72

a) أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

b) أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

أتعلَّم

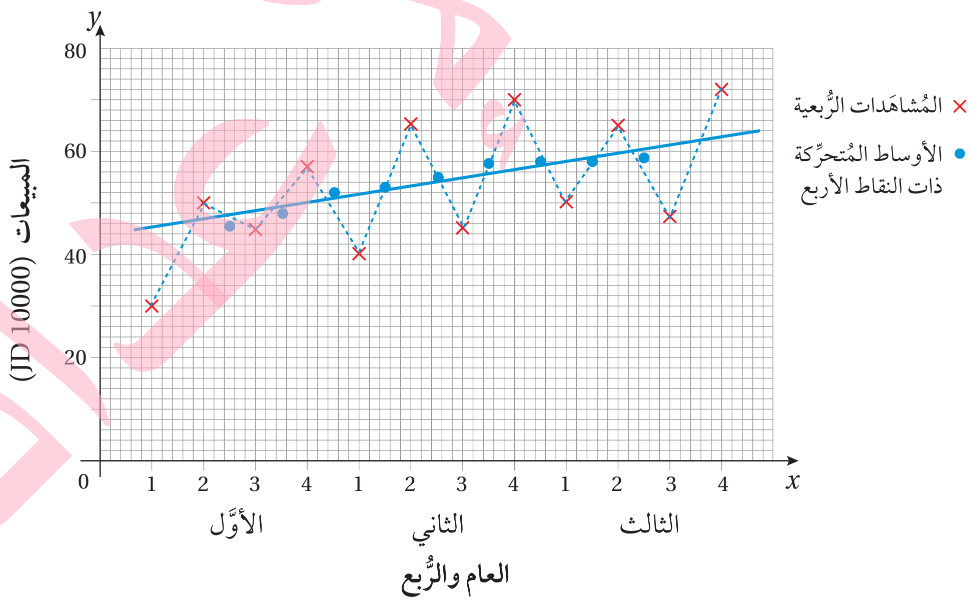
قد لا ترتبط التباينات الموسمية بفصول السنة فحسب، بل يُمكِن أنْ تنشأ من أنماط زمنية أُخرى، كأيام الأسبوع. فمثلًا، يزداد وقت مُشاهَدة التلفاز في عطلة نهاية الأسبوع؛ ما يُشكِّل دورة موسمية أسبوعية، يكون فيها كل يوم أشبه بفصل مستقل.

تقدير الوسط الحسابي للتباين الموسمي

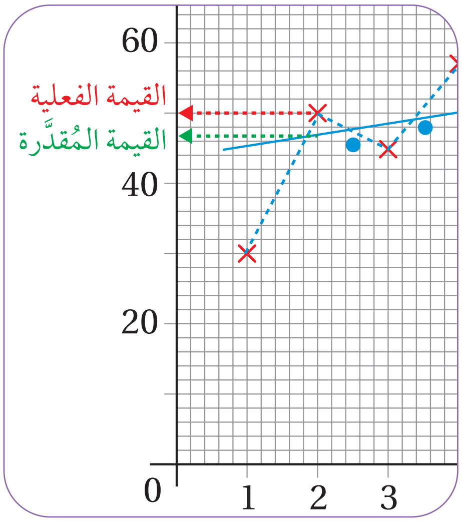
يُطلَق على الفرق بين القيمة من نقاط السلسلة الزمنية (القيمة الفعلية) والقيمة المُقدَّرة على خطِّ الاتجاه العام اسم **التباين الموسمي** (seasonal variation)؛ فإذا كانت القيمة الفعلية أعلى من القيمة المُقدَّرة من خطِّ الاتجاه العام، فإنَّ التباين الموسمي يكون موجبًا، وإذا كانت هذه القيمة أقلَّ، فإنَّ التباين الموسمي يكون سالبًا. يُذكَر أنَّ هذه التباينات الموسمية تتكرَّر بنمط دوري مُنتظَم كل عام. ونظرًا إلى تكرار الأرباع ضمن السلسلة الزمنية؛ فإنَّ كل رُبع يظهر مرّات عديدة، ومن ثَمَّ يصبح للتباين الموسمي قِيَم عِدَّة مُرتبِطة بكل رُبع. لتحليل هذا التباين بشكل منهجي، يُمكِن تقدير الوسط الحسابي للتباينات الموسمية الخاصة بكل رُبع؛ ما يُفْضي إلى تقدير أكثر استقرارًا للتأثير الموسمي المُرتبِط به.

مثال 3

يُمثِّل الشكل التالي منحنى سلسلة زمنية، رُسِم عليها خطُّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع. أُقدِّر الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثاني.



الخطوة 1: أجد القيمة الفعلية والقيمة المُقدَّرة لكلٍّ من قِيَم الرُّبع الثاني.



لإيجاد القِيَم الفعلية، أرسم مستقيمات أُفقية من نقاط الرُّبع الثاني على منحنى السلسلة إلى المحور الرأسي؛ فتظهر القِيَم الفعلية للرُّبع الثاني من الأعوام الثلاثة (من نقاط السلسلة)، وهي: 65 ,65 ,50. أمّا القِيَم المُقدَّرة فيُمكِن إيجادها برسم مستقيمات أُفقية من نقاط تُقابِل نقاط الرُّبع الثاني على خطِّ الاتجاه العام إلى المحور الرأسي، وبذلك تظهر القِيَم المُقدَّرة من خطِّ الاتجاه العام، وهي: 60 ,53 ,47 على الترتيب.

الخطوة 2: أجد التباين الموسمي لكل قيمة من قِيَم الرُّبع الثاني، ثمَّ أُقدِّر الوسط الحسابي لهذه التباينات.

التباين الموسمي للقيمة 50 من العام الأوَّل $50 - 47 = 3$

التباين الموسمي للقيمة 65 من العام الثاني $65 - 53 = 12$

التباين الموسمي للقيمة 65 من العام الثالث $65 - 60 = 5$

الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثاني $\frac{3 + 12 + 5}{3} \approx 6.6666$

بضرب الوسط الحسابي في 10000 $6.6666 \times 10000 = 66666$

إذن، الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثاني هو: JD 66666 تقريبًا.

أتعلَّم

لإيجاد التباين الموسمي، تُطرَح القيمة المُقدَّرة الناتجة من خطِّ الاتجاه العام من القيمة الفعلية.

أتعلَّم

قد يكون التباين الموسمي سالبًا إذا كانت القيمة الناتجة من تقدير خطِّ الاتجاه العام أعلى من القيمة الفعلية.

أتحقَّق من فهمي

أجد التباينات الموسمية لكلٍّ من الرُّبع الثالث والرُّبع الرابع من السلسلة الواردة في المثال 3، ثمَّ أُقدِّر الوسط الحسابي لكلٍّ منهما.

أتعلَّم

لا يُمكِن الوثوق بالتنبُّؤات البعيدة المدى؛ لأنَّ استمرار الاتجاه العام مُدَّة طويلة غير مضمون، في حين أنَّ التنبُّؤات القصيرة المدى، التي لا تتجاوز سنة واحدة، تكون غالبًا أقرب إلى الدِّقَّة.

التنبُّؤ ببيانات مستقبلية

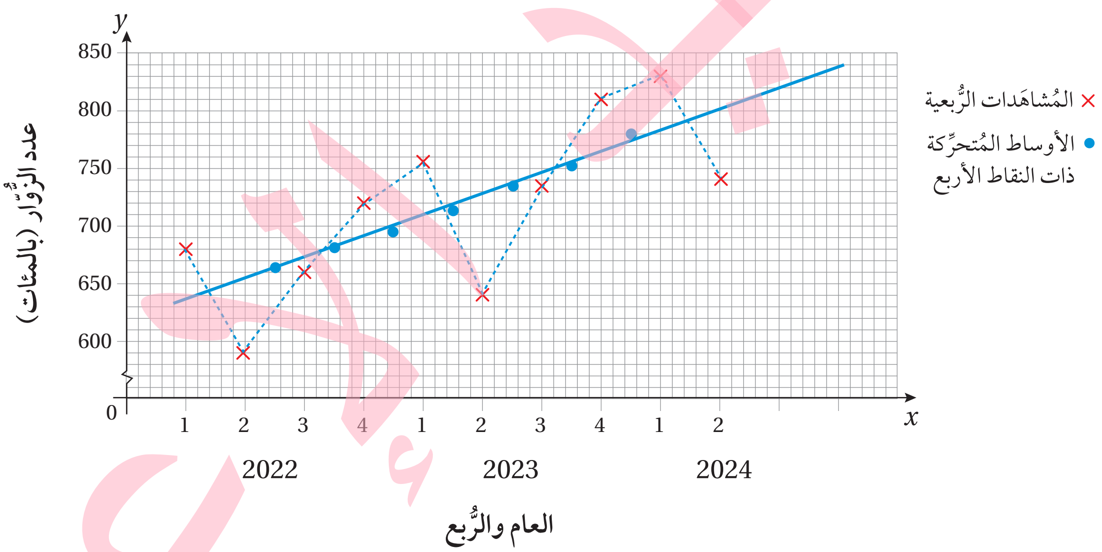
يُمكِن استعمال خطِّ الاتجاه العام والوسط الحسابي للتباينات الموسمية عند أيِّ نقطة في سلسلة زمنية للتنبُّؤ بِقِيَم تُقابِل هذه النقطة في السنوات اللاحقة.

مفهوم أساسي — **التنبُّؤ**

تُمثِّل القيمة المُتوقَّعة عند نقطة مستقبلية مجموع قيمتين، هما: القيمة المُقدَّرة من خطِّ الاتجاه العام عند تلك النقطة، والوسط الحسابي للتباينات الموسمية المُرتبِطة بتلك النقطة في السنوات السابقة.

مثال 4

يُمثِّل الشكل التالي منحنى سلسلة زمنية، رُسِم عليها خطُّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع. أتنبَّأ بعدد الزُّوّار في الرُّبع الثالث من عام 2024م.



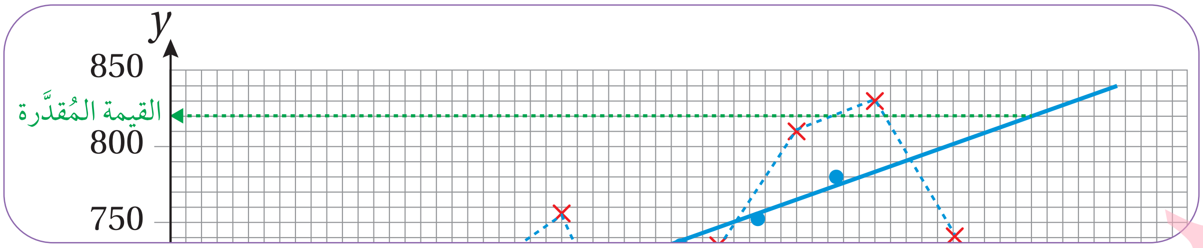
الخطوة 1: أجد التباين الموسمي لكل قيمة من قِيَم الرُّبع الثالث، ثمَّ أجد الوسط الحسابي لهذه التباينات.

التباين الموسمي للقيمة 660 من العام الأوَّل $660 - 670 = -10$

التباين الموسمي للقيمة 735 من العام الثاني $735 - 750 = -15$

الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثالث $\dfrac{-10 + (-15)}{2} = -12.5$

الخطوة 2: **أتنبَّأ بعدد الزُّوّار في الرُّبع الثالث من عام 2024م.**



القيمة المُتوقَّعة تساوي القيمة المُقدَّرة من خطِّ الاتجاه العام للرُّبع الثالث من عام 2024م (820)، مضافًا إليها الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثالث (-12.5):

القيمة المُتوقَّعة $820 + (-12.5) = 807.5$

بضرب القيمة المُتوقَّعة في 100 $807.5 \times 100 = 80750$

إذن، العدد المُتوقَّع للزُّوّار في الرُّبع الثالث من عام 2024م هو: 80750 زائرًا.

أتحقَّق من فهمي

أتنبَّأ بعدد الزُّوّار في الرُّبع الرابع من عام 2024م، بناءً على معطيات المثال 4.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أعمال خيرية: **يُبيِّن الجدول الآتي البيانات الرُّبعية لعدد الطرود الخيرية التي وزَّعتها جمعية خيرية على الأُسَر المحتاجة خلال 3 أعوام مُتتالِية:**

العام	2015				2016				2017			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد الطرود	120	180	218	170	150	230	265	200	180	255	300	240

1 أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع لهذه السلسلة الزمنية.

2 أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

3 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

مناخ: يُبيِّن الجدول الآتي البيانات الرُّبعية لعدد الساعات المُشمِسة في إحدى المدن على مدار 3 أعوام:

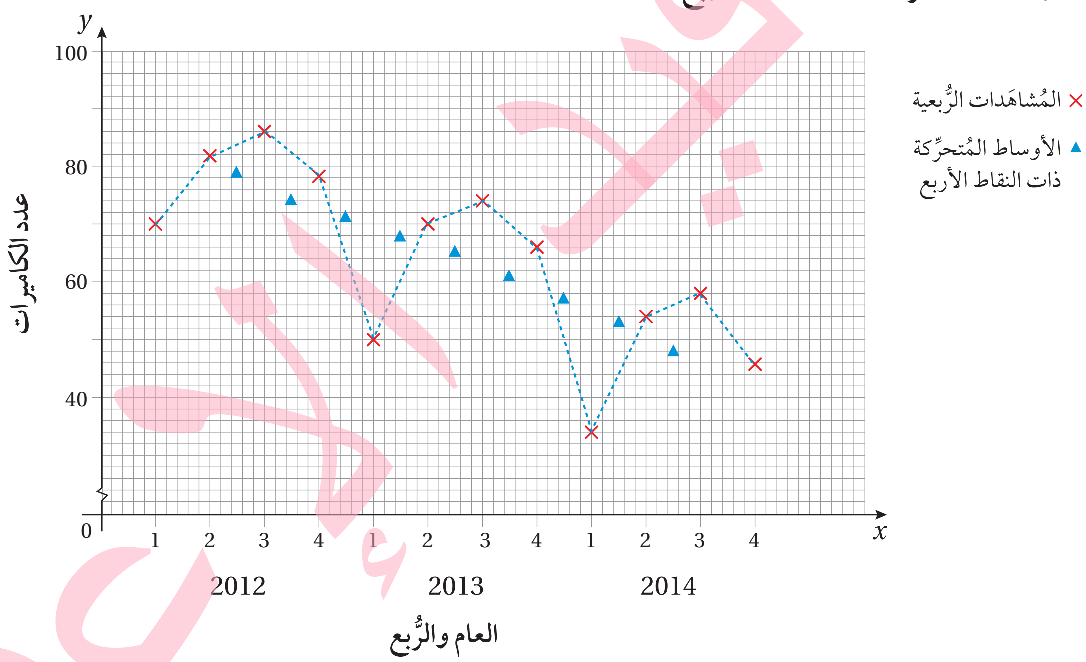
العام	2010				2011				2012			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد الساعات المُشمِسة	300	640	460	240	340	720	420	320	300	620	460	200

4 أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع لهذه السلسلة الزمنية.

5 أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

6 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

كاميرات: يُبيِّن الشكل الآتي السلسلة الزمنية لعدد الكاميرات الاحترافية المَبيعة في أحد المحالِّ التجارية، وقد رُسِمت عليها الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع:



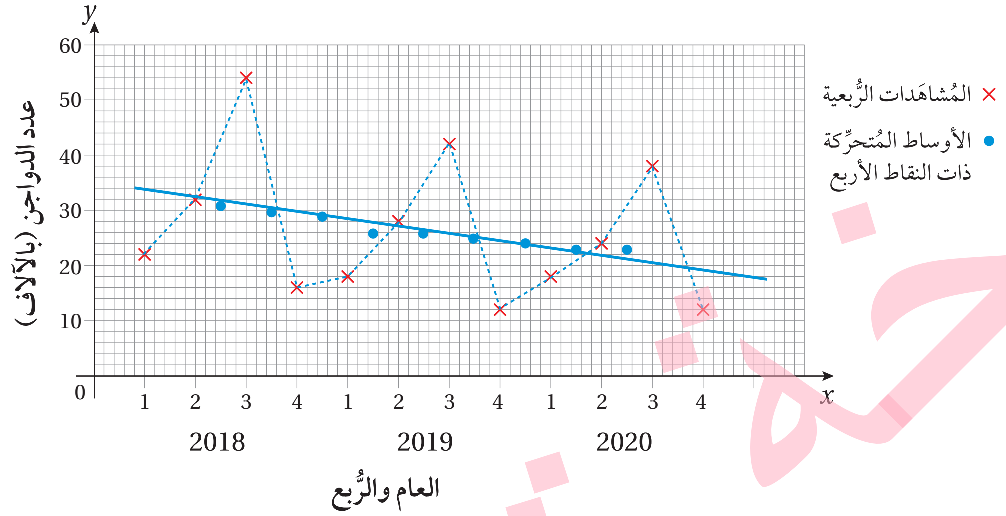
7 أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

8 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

9 أُقدِّر الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الأوَّل.

10 أتنبَّأ بعدد الكاميرات المَبيعة في الرُّبع الأوَّل من عام 2015م.

دواجن: يُبيِّن الشــكل الآتي السلسلة الزمنية لعدد الدواجن (بالآلاف) التي أنتجتها شركة مُتخصِّصة، وقد رُسِم عليها خطُّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع:



11 أَصِف اتجاه السلسلة العام، ثمَّ أُفسِّره.

12 أُقدِّر الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للرُّبع الثاني.

13 أتنبَّأ بعدد الدواجن التي أُنتِجت في الرُّبع الثاني من عام 2021م.

جامعات: يُبيِّن الجدول الآتي عدد الطلبة المُسجَّلين في أحد المساقات الجامعية في الفصل الأوَّل والفصل الثاني والفصل الصيفي بإحدى الجامعات على مدار 3 أعوام:

العام	2021			2022			2023		
الفصل	الأوَّل	الثاني	الصيفي	الأوَّل	الثاني	الصيفي	الأوَّل	الثاني	الصيفي
عدد الطلبة	325	160	85	382	220	160	457	250	220

14 أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الثلاث لهذه السلسلة.

15 أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الثلاث.

16 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

17 أُقدِّر الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للفصل الأوَّل.

18 أتنبَّأ بعدد الطلبة الذين سيُسجِّلون في هذا المساق للفصل الأوَّل من عام 2024م.

طاقة شمسية: يُبيِّن الجدول الآتي القِيَم الفعلية والقِيَم المُقدَّرة باستعمال خطِّ الاتجاه العام لأعداد الموافقات التي منحتها إحدى البلديات لمشروعات الطاقة الشمسية المنزلية خلال عامين مُتتالِيين:

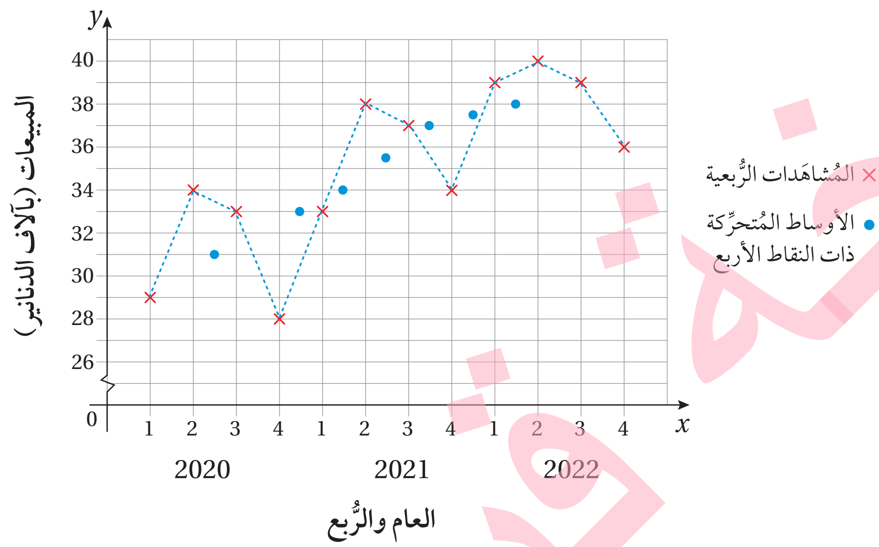
العام	الأرباع	القِيَم الفعلية	القِيَم المُقدَّرة	التباين الموسمي
2019	1	28	24	
	2	42	28	
	3	60	70	
	4	12	15	
2020	1	22	18	
	2	36	25	
	3	50	42	
	4	12	13	

19 أملأ الفراغ بما هو مُناسِب في عمود التباين الموسمي لكل رُبع.

20 أُقدِّر الوسط الحسابي للتباين الموسمي لكل رُبع من الأرباع الأربعة.

مهارات التفكير العليا

21 **أكتشف الخطأ:** عيَّنت أريج الأوساط الحسـابية المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع على منحنى السلسلة الزمنية المُبيَّن في الشكل المجاور، لكنَّها نسيت تعيين بعضها. أكتشف الأوساط المُتحرِّكة المفقودة من الرسم، ثمَّ أُعيِّنها عليه.



تبرير: **يُبيِّن الجدول الآتي مبيعات أحد المحالِّ التجارية لكل أربعة أشهر مُتتالِية على مدار 3 أعوام:**

العام	2000			2001			2002		
الأشهر	1–4	5–8	9–12	1–4	5–8	9–12	1–4	5–8	9–12
المبيعات (JD 1000)	30	37	33	33	30	37	36	32	40

22 لماذا لا تُحسَب الأوساط الحسابية المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع في هذه الحالة؟ أُبرِّر إجابتي.

23 أجد الأوساط الحسابية المُتحرِّكة التي يُمكِن حسابها في هذه المسألة.

24 **تبرير:** رصدت إدارة أحد المسارح عدد الحضور (بالمئات) في كل يوم تُعرَض فيه مسـرحية على مدار 3 أسابيع. هل تُحسَب لهذه البيانات أوساط حسابية مُتحرِّكة ذات نقاط ثلاث أم أوساط حسابية مُتحرِّكة ذات نقاط أربع؟ أُبرِّر إجابتي.

الأسبوع / اليوم	1	2	3
الجمعة	14	12	10
السبت	25	20	18
الإثنين	6	4	4
الأربعاء	8	7	6

معمل برمجية Excel

رسم خطِّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط المُتحرِّكة

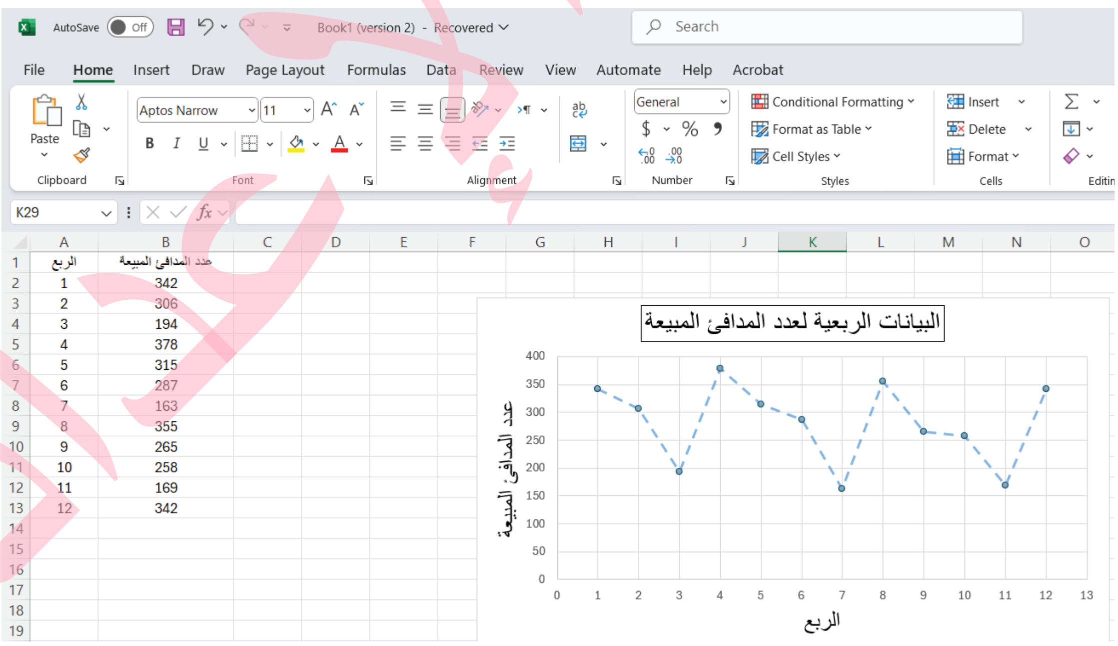
يُمكِن استعمال برمجية Excel لتمثيل سلسلة زمنية رُبعية، ورسم خطِّ الاتجاه العام لهذه السلسلة باستعمال الأوساط المُتحرِّكة، والتنبُّؤ ببيانات مستقبلية.

نشاط

1 أستعمل برمجية Excel لرسم خطِّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية الواردة في المثال 2 في الصفحة 34، وذلك باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

الخطوة 1: أفتح برمجية Excel، ثمَّ أُنشِئ ورقة عمل، ثمَّ أُدخِل البيانات في جدول مُنظَّم من عمودين، أُسمّي أوَّلهما الرُّبع، وتدخل فيه الأرباع مُتسلسِلة من 1 إلى 12، وأُسمّي ثانيهما عدد المدافئ المَبيعة.

الخطوة 2: أُحدِّد الخلايا التي تحتوي على البيانات (العمودان كاملان، بما في ذلك العناوين)، ثمَّ أنتقل إلى علامة التبويب (Insert) في شريط الأدوات، وأختار (Scatter) من قائمة الرسوم البيانية، ثمَّ أنقر ، فيظهر التمثيل البياني للسلسلة الزمنية تلقائيًّا بخطوط مستقيمة متصلة. ولتمثيلها بخطوط مستقيمة مُتقطِّعة، أنقر التمثيل البياني، ثمَّ أختار من القائمة التي تظهر يمين الشكل، ثمَّ أختار التمثيل البياني بخطوط مُتقطِّعة. يُمكِن تنفيذ هذا الإجراء بطريقة أُخرى، وذلك بنقر التمثيل البياني نقرًا مُزدوَجًا، ثمَّ اختيار التمثيل البياني بالخطوط المُتقطِّعة الذي يظهر في شريط الأدوات.



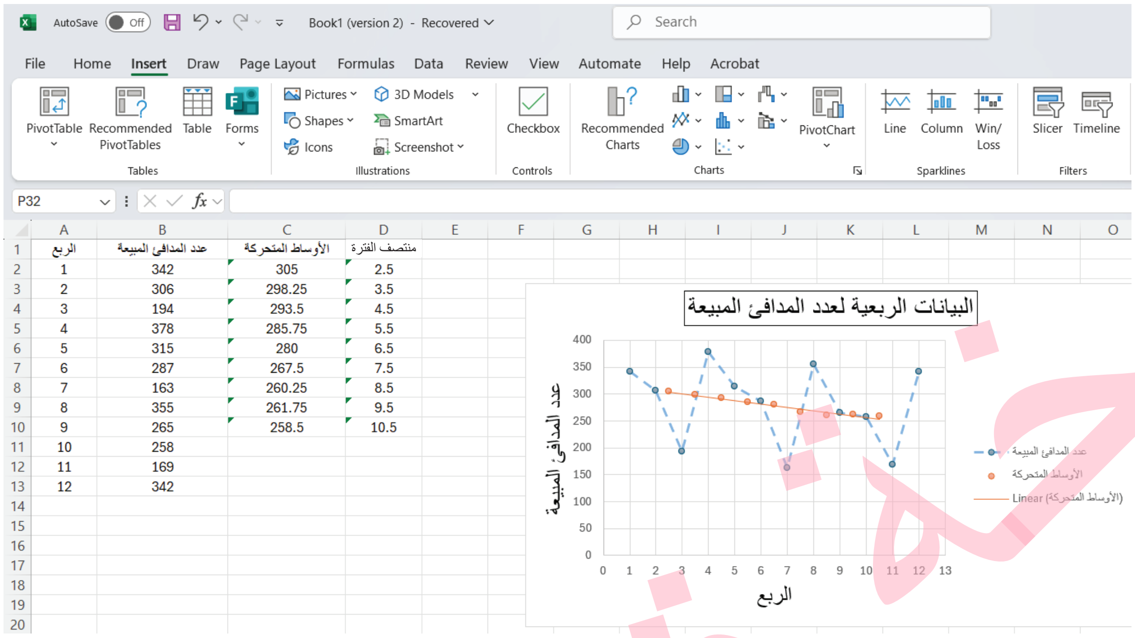
الخطوة 3: أُنسِّق التمثيل البياني – كما تعلَّمْتُ في مبحث المهارات الرقمية – بإعادة تسمية التمثيل البياني، ثمَّ تسمية المحاور، وتخصيص الألوان والخطوط؛ لجعل التمثيل أكثر وضوحًا.

الخطوة 4: أُسمّي عمودًا جديدًا باسم الأوساط المُتحرِّكة، ثمَّ أستعمل الدالَّة (AVERAGE) لإيجاد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع. فمثلًا، لإيجاد الوسط المُتحرِّك الأوَّل، تُكتَب الصيغة: ((AVERAGE(B2:B5 =) في الخلية المُحدَّدة، فتظهر النتيجة: 305، وهكذا.

الخطوة 5: أُسمّي عمودًا جديدًا باسم منتصف الفترة، ثمَّ أستعمل الدالَّة (AVERAGE) لإيجاد منتصف الفترة الزمنية التي استُعمِلت لإيجاد الوسط المُتحرِّك. فمثلًا، لإيجاد منتصف الفترة الزمنية التي استُعمِلت لإيجاد الوسط المُتحرِّك الأوَّل، تُكتَب الصيغة: ((AVERAGE(A2:A5 =) في الخلية المُحدَّدة، فتظهر النتيجة: 2.5، وهكذا.

الخطوة 6: أُمثِّل الأوساط المُتحرِّكة على التمثيل البياني للسلسلة الزمنية، بنقر التمثيل، ثمَّ الضغط على زرِّ الفأرة الأيمن لاختيار Select Data... ، فيظهر مُربَّع حوار، أختار منه Add ، ثمَّ أضغط على (OK)، فيفتح مُربَّع حوار آخر، أُسمّي فيه السلسلة الجديدة باسم الأوساط المُتحرِّكة، ثمَّ أُحدِّد مدى (Series X–values) من عمود منتصف الفترة، وأُحدِّد مدى (Series Y–values) من عمود الأوساط المُتحرِّكة، ثمَّ أضغط على (OK)، فيظهر تمثيل بياني متصل بخطوط مستقيمة مُتقطِّعة للأوساط المُتحرِّكة، يُمكِن حذفها بنقر التمثيل البياني الخاص بالأوساط المُتحرِّكة، ثمَّ أختار (Scatter) من قائمة الرسوم البيانية في شريط الأدوات، ثمَّ أنقر  .

الخطوة 7: أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للأوساط المُتحرِّكة، بنقر التمثيل البياني للأوساط المُتحرِّكة، ثمَّ اختيار + من القائمة التي تظهر يمين الشكل، ثمَّ نقر ☑ Trendline ، فيظهر على التمثيل البياني خطُّ الاتجاه العام المُمثَّل باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.



2 أستعمل برمجية Excel للتنبُّؤ بعدد المدافئ المَبيعة في الرُّبع الأوَّل من العام الرابع.

للتنبُّؤ بعدد المدافئ المَبيعة في الرُّبع الأوَّل من العام الرابع، أكتب 13 في الخلية A14، ثمَّ أُدخِل في الخلية المجاورة لها الصيغة: (=FORECAST.LINEAR(A14,B2:B13,A2:A13))، ثمَّ أضغط على (Enter)، فتظهر القيمة المُتوقَّعة للرُّبع الأوَّل من العام الرابع.

	A	B
1	الربع	عدد المدافئ المبيعة
2	1	342
3	2	306
4	3	194
5	4	378
6	5	315
7	6	287
8	7	163
9	8	355
10	9	265
11	10	258
12	11	169
13	12	342
14	13	250.3939394

أتدرَّب

مسافرون: يُبيِّن الجدول الآتي عدد المسافرين إلى الخارج (بعشرات الآلاف) في كل رُبع على مدار 3 أعوام مُتتالِية:

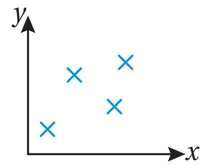
العام	2009				2010				2011			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
المسافرون (10000)	8.7	10	11.8	11.5	9,5	10.7	12.4	11.8	10.2	11.6	13.4	12.6

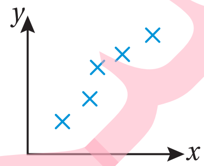
1 أستعمل برمجية Excel لرسم خطِّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

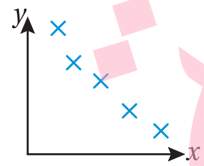
2 أستعمل برمجية Excel للتنبُّؤ بعدد المسافرين إلى الخارج في الرُّبع الثاني من عام 2012م.

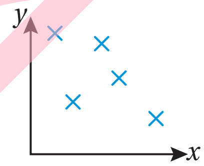
أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 شكل الانتشار الذي يُمثِّل ارتباطًا قويًّا موجبًا من بين الأشكال الآتية هو:

a) 

b) 

c) 

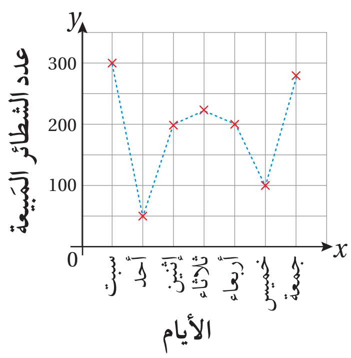
d) 

2 إذا كان: $S_{xx} = 40,\ S_{xy} = 80,\ \bar{x} = 6,\ \bar{y} = 8$، فإنَّ معادلة خطِّ انحدار y على x هي:

a) $y = 2x - 4$ b) $y = 4x - 2$

c) $y = 2x + 4$ d) $y = 4x + 2$

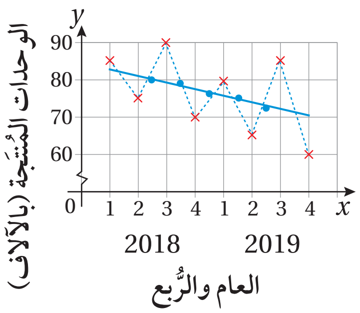
3 يُمثِّل الشكل التالي عدد الشطائر التي باعها مطعم في أسبوع. يزيد عدد الشطائر التي بيعت يوم الإثنين عمّا بيع منها يوم الأحد بنحو:



a) 200 b) 50

c) 150 d) 250

4 يُبيِّن الشكل التالي سلسلة زمنية، رُسِم عليها خطُّ الاتجاه العام باستعمال الأوساط الحسابية المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع. قيمة التباين الموسمي للرُّبع الأوَّل من عام 2019م هي:



a) -4 b) 4 c) -2 d) 2

5 إذا كانت القيمة المُقدَّرة من خطِّ الاتجاه العام المرسوم باستعمال الأوساط المُتحرِّكة لمبيعات الرُّبع الأوَّل من عام 2025م هي 235 ألف دينار، وكانت التباينات الموسمية لمبيعات الرُّبع الأوَّل للأعوام: 2022, 2023, 2024 هي $11, -7, 20$، فإنَّ القيمة المُتوقَّعة لمبيعات الرُّبع الأوَّل من عام 2025م (بآلاف الدنانير) هي:

a) 228 b) 243 c) 246 d) 255

تكلفة: **يُبيِّن الجدول الآتي المسافة بالكيلومتر والتكلفة بالدينار لـ 10 رحلات بسيّارة أجرة:**

المسافة x (km)	8	6	4	3	7	9	2	10	5	12
التكلفة y (JD)	9	7.5	5.5	4	10	12	3	14	7	15

6 أُحدِّد المُتغيِّر المستقل والمُتغيِّر التابع، ثُمَّ أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

7 أَصِف الارتباط بين المسافة والتكلفة، ثمَّ أُفسِّره.

8 أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

9 أستعمل معادلة خطِّ الانحدار التي أوجدتها في السؤال السابق للتنبُّؤ بتكلفة رحلة مسافتها 11 km

إنتاج: رصد مُحاسِب في مصنعٍ عدد الوحدات المُنتَجة (بالآلاف) في كل شهر خلال النصف الأوَّل من العام، وتكاليف الإنتاج الكلية (بآلاف الدنانير) في تلك الأشهر كما في الجدول الآتي:

عدد الوحدات x (1000)	45	70	75	15	40	55
التكاليف y (JD 1000)	65	90	100	35	50	45

10 أجد معامل ارتباط بيرسون بين عدد الوحدات المُنتَجة والتكاليف الكلية، ثمَّ أُفسِّر دلالته.

11 أجد معادلة خطِّ انحدار y على x.

12 أستعمل معادلة خطِّ الانحدار التي أوجدتها في السؤال السابق للتنبُّؤ بتكاليف إنتاج 60000 وحدة في شهرٍ ما لهذا المصنع.

أثاث: يُبيِّن الجدول الآتي مبيعات غرف النوم الرُّبعية (بالآلاف) لأحد معارض الأثاث على مدار عامين:

العام	2023				2024			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4
المبيعات (JD 1000)	8	18	30	15	10	22	40	21

13 أُمثِّل هذه السلسلة الزمنية بيانيًّا، ثمَّ أرسم عليها خطَّ الاتجاه العام.

14 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

يُبيِّن الجدول الآتي أعداد المُتطوِّعين الرُّبعية من طلبة المرحلة الثانوية في أحد المشروعات الخيرية على مدار 3 أعوام:

العام	2017				2018				2019			
الرُّبع	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
عدد المُتطوِّعين	320	360	420	200	260	300	480	220	240	250	340	220

15 أجد الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع لهذه السلسلة.

16 أرسم خطَّ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستعمال الأوساط المُتحرِّكة ذات النقاط الأربع.

17 أُحدِّد نوع اتجاه البيانات العام، ثمَّ أُفسِّره.

18 أُقدِّر الوسط الحسابي للتباينات الموسمية لعدد المُتطوِّعين للرُّبع الثاني.

19 أتنبَّأ بعدد المُتطوِّعين في الرُّبع الثاني من عام 2020م.

رعاية صِحِّية: يُبيِّن الجدول الآتي عدد مراجعي أحد المراكز الصِّحِّية خلال 3 أوقات مختلفة من اليوم (صباحًا، ظهرًا، عصرًا) على مدار 4 أيام مُتتالية:

	صباحًا	ظهرًا	عصرًا
الإثنين	77	95	74
الثلاثاء	90	90	51
الأربعاء	51	54	18
الخميس	12	33	21

20 أجد الأوساط المُتحرِّكة المناسبة لهذه البيانات.

21 أُمثِّل بيانات السلسلة والأوساط المُتحرِّكة في المستوى الإحداثي نفسه.

22 أرسم خطَّ الاتجاه العام، ثمَّ أُحدِّد نوع خطِّ الاتجاه العام، ثمَّ أُفسِّره.

الوحدة 5

التوزيعات الاحتمالية
Probability Distributions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل التوزيعات الاحتمالية لنمذجة التجارب العشوائية والظواهر الطبيعية؛ ما يساعد على تفسير هذه الظواهر، والتوصُّل إلى استنتاجات دقيقة بخصوصها. يُعَدُّ توزيع ذي الحدَّين والتوزيع الطبيعي اللذان تُقدِّمهما هذه الوحدة من أهمِّ التوزيعات الاحتمالية؛ لِما لهما من استعمالات في المجالات العلمية والحياتية المختلفة. فمثلًا، يُستعمَل التوزيع الطبيعي لنمذجة كتل المواليد الجُدُد، وضغط الدم في جسم الإنسان، وعلامات الطلبة في الاختبارات.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ حساب التوافيق والتباديل.

✓ إيجاد احتمال حادث ما في تجربة عشوائية.

✓ ماهيَّة المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي.

✓ إيجاد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

◂ التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.

◂ التوقُّع لكلٍّ من التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.

◂ منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.

◂ إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (19–21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التوزيع الهندسي
Geometric Distribution

فكرة الدرس تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي.

المصطلحات تجربة بيرنولي، التجربة الاحتمالية الهندسية.

مسألة اليوم في مصنع لإنتاج الأوعية البلاستيكية، تشير الإحصاءات إلى أنَّ واحدًا من كل 12 وعاءً يكون مَعيبًا. إذا بدأ مدير الجودة بفحص الأوعية عشوائيًّا واحدًا تلو الآخر؛ على أنْ يتوقَّف عند العثور على أوَّل وعاء مَعيب، فما احتمال أنْ يتوقَّف عن عملية الفحص بعد فحصه 20 وعاءً؟

تجربة بيرنولي

تجربة بيرنولي (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبَّر عن أحدهما بالنجاح، ويُعبَّر عن الآخر بالفشل. فمثلًا، تجربة إلقاء قطعة النقد مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي؛ لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعَدُّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

بوجه عام، يُمكِن النظر إلى أيِّ تجربة عشوائية بوصفها تجربة بيرنولي، بافتراض أنَّ حدثًا مُعيَّنًا من الفضاء العيني للتجربة هو النجاح، بصرف النظر عن العدد الفعلي لعناصر ذلك الحدث. فمثلًا، عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، يُمكِن عَدُّ هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أقلَّ من 5 هو النجاح، وأنَّ أيَّ عدد (ناتج) آخر هو الفشل.

أتذكَّر

لأيِّ تجربة عشوائية، يكون الحادث (A) والحادث (B) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يُؤثِّر في احتمال وقوع الآخر أو عدم وقوعه.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتّى التوصُّل إلى أوَّل نجاح اسم **التجربة الاحتمالية الهندسية** (geometric probability experiment).

مفهوم أساسي

التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشـــروط الأربعة الآتية في تجربة عشـــوائية ما، فإنَّها تُعَـدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

أتعلَّم

بوجـه عـام، إذا كانـت المحـاولات مسـتقلة، فهذا لا يعنـي بالضرورة ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إلقاء ريّان حجر نرد مُنتظَمًا بشكل مُتكرِّر، ثمَّ التوقُّف عند ظهور العدد 2.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء حجر نرد مُنتظَم بشكل مُتكرِّر حتّى يظهر العدد 2). وبما أنَّ نتيجة إلقاء حجر النرد في كل مَرَّة لا تُؤثِّر في نتيجة إلقائه في المَرّات الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 2)، أو الفشل (ظهور أيِّ عدد آخر).
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

أفكِّر

في الفرع 2 من المثال 1، إذا سُحِبت الكرات الأربع على التوالي مع الإرجاع، فهل يُمثِّل ذلك تجربة احتمالية هندسية؟ أُعيد الحلَّ في هذه الحالة.

2 **سَحْبُ هديل 4 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 5 كرات حمراء، و6 كرات خضراء، ثمَّ كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.**

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية.

تتضمَّن هذه التجربة محاولات مُتكرِّرة (سحب 4 كرات). وبما أنَّ نتيجة سحب كل كرة تتأثَّر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم إرجاع الكرات المسحوبة إلى الصندوق، فإنَّ هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقاء عبد العزيز قطعة نقد مُنتظَمة 6 مَرّات، ثمَّ كتابة عدد مَرّات ظهور الصورة.

b) إطلاق سامية أسهمًا بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثمَّ التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة، علمًا بأنَّ احتمال إصابتها الهدف في كل مَرَّة هو 0.6

المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية، وأنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها في التجربة.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim Geo(p)$$

حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: ... ,3 ,2 ,1؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

أتذكَّر

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

إذن، إذا كان X مُتغيِّرًا عشـــوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي**

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فـإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

حيث:

x: عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتذكَّر

إذا كان الحادثـان A و B مسـتقلين، فـإنَّ احتمال حدوثهمـا معًـا هـو حاصل ضـرب احتمالي وقوعهما؛ أيْ إنَّ: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

مثال 2

إذا كان: $X \sim Geo(0.8)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X = 3)$

$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$P(X = 3) = (0.8)(1-0.8)^2$ بتعويض $x = 3, p = 0.8$

$= 0.032$ بالتبسيط

2 $P(X \leq 2)$

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ احتمال الحوادث المتنافية

$= (0.8)(1-0.8)^0 + (0.8)(1-0.8)^1$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$= 0.96$ بالتبسيط

أتذكَّر

إذا كان A و B حادثيـن متنافيين في تجربة عشوائية، فإنَّ احتمال وقوع أحدهما على الأقلِّ يساوي مجموع احتمالي وقوعهما: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3 $P(X > 3)$

المطلوب هو إيجاد $P(X > 3)$، وهذا يعني أنَّ:

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \cdots$$

بما أنَّ إيجاد $P(X > 3)$ يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات (الكسور)، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$ احتمال المُتممِّة

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big)$$ احتمال الحوادث المتنافية

$$= 1 - (0.8 + 0.8(0.2) + 0.8(0.2)^2)$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$$= 0.008$$ باستعمال الآلة الحاسبة

طريقة بديلة:

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ: $P(X > x) = (1 - p)^x$.

يُمكِن أيضًا حساب $P(X > 3)$ باستعمال القانون أعلاه على النحو الآتي:

$$P(X > x) = (1 - p)^x$$ قانون حساب $P(X > x)$ في التوزيع الهندسي

$$P(X > 3) = (1 - 0.8)^3$$ بتعويض $x = 3, p = 0.8$

$$= (0.2)^3 = 0.008$$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتذكَّر

احتمال وقوع مُتمِّمة الحادث A هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

أتذكَّر

مُتمِّمة $X > a$ هي $X \leq a$، ومُتمِّمة $X < a$ هي $X \geq a$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim Geo(0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X = 2)$ b) $P(X \leq 3)$ c) $P(X > 4)$

يُمكِن استعمال التوزيع الهندسي في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3 : من الحياة

فرن غاز: يُكرِّر أحمد محاولة تدوير مَقْبِض الاشتعال في فرن مطبخه – بعد حدوث عطل فيه– حتّى يتمكَّن من تشغيل الفرن لطهي الطعام. إذا كان احتمال تشغيل الفرن في كل محاولة هو $\frac{1}{3}$ ، ومثَّل X عدد محاولات أحمد حتّى اشتغال الفرن، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من تشغيل الفرن في المحاولة الرابعة.

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي $\quad P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$

بتعويض $x=4, p=\frac{1}{3}$ $\quad P(X=4)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$

بالتبسيط $\quad =\frac{8}{81}$

إذن، احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من تشغيل الفرن في المحاولة الرابعة هو $\frac{8}{81}$.

2 احتمال أنْ يحاول أحمد تشغيل الفرن أكثر من 4 مَرّات.

المطلوب هو إيجاد $P(X>4)$، وهذا يعني أنَّ:

$$P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+\cdots$$

بما أنَّ إيجاد $P(X>4)$ يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات (الكسور)، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

احتمال المُتمِّمة $\quad P(X>4)=1-P(X\leq 4)$

احتمال الحوادث المتنافية $\quad =1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4))$

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي $\quad =1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad =\frac{16}{81}$

إذن، احتمال أنْ يحاول أحمد تشغيل الفرن أكثر من 4 مَرّات هو $\frac{16}{81}$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ X هو مُتغيِّر عشوائي هندسي لتحقُّق الشروط الأربعة.

أفكِّر

كيف أجد هذا الاحتمال بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

صناعة: في دراســة لقســم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبيَّن أنَّ في 10% من الأواني الفخاريــة عيبًا مصنعيًّا. إذا مثَّل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتّى إيجاد أوَّل إناء مَعيب، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يكون الإناء العاشر هو أوَّل إناء مَعيب يجده مُراقِب الجودة.

b) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 3 أوانٍ حتّى إيجاد أوَّل إناء مَعيب.

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّ التوقُّع $E(X)$ للمُتغيِّر العشــوائي X هو الوسط الحســابي لِقيَمه الناتجة من تكرار التجربة نفســها عددًا كبيرًا من المَرّات (عند اقتراب العدد من ∞)، وأنَّه يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر X في احتمال وقوعها.

يُمكِن التعبير عن ذلك بالرموز على النحو الآتي:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

أتعلَّم

تشير القاعدة المجاورة إلى أنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندســي يساوي مقلوب احتمال النجاح الثابت في جميــع المحــاولات؛ أيْ إنَّــه إذا كان احتمال ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقد مُنتظَمــة هــو $\frac{1}{2}$، فإنَّه من المُتوقَّع ظهــور الصورة أوَّل مَرَّة بعــد إلقاء قطعة النقد مَرَّتين.

مثال 4 : من الحياة

صحافة: يريد مُراسِل صحفي إجراء مقابلات مع عدد من زُوّار مركز تجاري، وسؤالهم عن مُشاهَدة آخر مباراة لكرة القدم، ثمَّ التوقُّف عن ذلك عند مقابلته أوَّل شخص شاهد المباراة. إذا كان لدى المُراسِل إحصائية تشير إلى أنَّ ما نسبته 5% من سُكّان المدينة قد شاهدوا المباراة، فكم زائرًا يُتوقَّع أنْ يسأله المُراسِل قبل مقابلته شخصًا شاهد المباراة؟

بما أنَّ مقابلة الزُّوّار في المركز التجاري ستستمر حتّى الالتقاء بأوَّل شخص شاهد المباراة، فإنَّه يُمكِن استعمال توقُّع المُتغيِّر العشوائي الهندسي $X \sim Geo(0.05)$ لتعرُّف عدد مَنْ سألهم المُراسِل عن المباراة:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$ صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$$= \frac{1}{0.05}$$ بتعويض $p = 0.05$

$$= 20$$ بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع أنْ يسأل المُراسِل 19 زائرًا قبل التقائه بأوَّل شخص شاهد المباراة.

أفكِّر

إذا افترضْتُ أنَّ المُراسِل الصحفي قد سأل 35 زائرًا، وأنَّ أيًّا منهم لم يشاهد المباراة، فهل يعني ذلك أنَّ نسبة 5% غير صحيحة أو أنَّها فقط مصادفة؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

تسويق: أعلنت إحدى شركات تصنيع حبوب الفطور للأطفال عن وجود لعبة مجانية في بعض عُلَب الحبوب الجديدة التي تُنتِجها الشركة. إذا احتوت عُلْبة من كل 4 عُلَب على لعبة، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد العُلَب التي سيفتحها الطفل حتّى يجد لعبة، فكم عُلْبةً يُتوقَّع أنْ يفتحها الطفل حتّى يجد أوَّل لعبة؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1. عدد الأسئلة التي ستجيب عنها أسماء إجابة صحيحة من بين 25 سؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 5 بدائل، واحد منها فقط صحيح، في حال الإجابة عن الأسئلة جميعها بصورة عشوائية.

2 رمي لاعب كرة سلَّة الكرة نحو الهدف بشكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند إحراز الهدف أوَّل مَرَّة، علمًا بأنَّ احتمال إحرازه الهدف في كل مَرَّة هو 0.3

إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

3 $P(X = 2)$

4 $P(X \leq 3)$

5 $P(X \geq 3)$

6 $P(3 \leq X \leq 5)$

7 $P(X < 4)$

8 $P(X > 4)$

9 $P(1 < X < 3)$

10 $P(4 < X \leq 6)$

11 $P(X < 1)$

12 أُلقِــي حجر نرد مُنتظَم ذو ثمانية أوجه مُرقَّمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشــكل مُتكرِّر حتّى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مَرّات.

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

13 $X \sim Geo(0.3)$

14 $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$

15 $X \sim Geo(0.45)$

16 رياضة: تتدرَّب لينا على مسابقة رمي السهام. إذا كان احتمال إصابتها الهدف في كل رمية هو 0.2، فكم سهمًا يُتوقَّع أنْ تُطلِق لينا حتّى تصيب الهدف أوَّل مَرَّة؟

17 إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X > 3) = 0.512$، فأجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

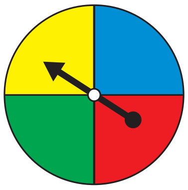
18 إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $E(X) = 8$، فأجد $P(X < 4)$.

صناعة: وجد مصنع لوحدات الإنارة المكتبية أنَّ احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة مَعيبة هو 0.10. إذا مثَّل X عدد وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة واحدةً تلو الأُخرى حتّى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

19 احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة الخامسة هي أوَّل وحدة إنارة مَعيبة يجدها مُراقِب الجودة.

20 احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتّى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

21 العدد المُتوقَّع من وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتّى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.



يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا مُقسَّمًا إلى 4 قطاعات متطابقة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات تدوير مُؤشِّر القرص حتّى يقف عند اللون الأخضر أوَّل مَرَّة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

22 $P(X = 3)$

23 $P(X \leq 4)$

24 احتمال تدوير مُؤشِّر القرص ثلاث مَرّات على الأقلِّ حتّى يقف عند اللون الأخضر أوَّل مَرَّة.

لعبة: اتفقت ليلى وزميلاتها على ألّا تُشارِك أيٌّ منهن في لعبة حتّى ترمي حجر نرد مُنتظَمًا، ويظهر الرقم 6. إذا أرادت ليلى المشاركة في اللعبة، وكان X يُمثِّل عدد مَرّات رميها حجر النرد حتّى ظهور العدد 6، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

25 احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد 3 مَرّات لكي تُشارِك في اللعبة.

26 احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد أكثر من 3 مَرّات لكي تُشارِك في اللعبة.

مهارات التفكير العليا

27 أكتشف الخطأ: أرادت لانا حلَّ السؤال الآتي:

" عند إلقاء قطعة نقد غير مُنتظَمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{2}{5}$. إذا أُلقِيت قطعة النقد بصورة مُتكرِّرة حتّى ظهور الصورة أوَّل مَرَّة، فما احتمال ظهور الصورة أوَّل مَرَّة عند إلقاء قطعة النقد في المَرَّة الثانية؟ ". وكان حلُّها على النحو الآتي:

$$P(X = 2) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2$$
$$= \frac{18}{125}$$

أكتشف الخطأ في حلِّ لانا، ثمَّ أُصحِّحه، وأُبرِّر إجابتي.

28 تبرير: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X \leq 3) = \frac{819}{1331}$، فأجد $P(X > 3)$، وأُبرِّر إجابتي.

29 تحدٍّ: إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $p > 0.5$، $P(X = 2) = 0.21$، فأجد $P(X = 4)$.

الدرس 2

توزيع ذي الحدَّين
Binomial Distribution

فكرة الدرس تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين.

المصطلحات التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين.

مسألة اليوم يستطيع لاعب كرة طاولة أنْ يُحرِز الفوز بنقطة إرسال بنسبة 60%. إذا أرسل اللاعب الكرة 7 مَرّات، فما احتمال أنْ يفوز بـ 4 نقاط إرسال فقط؟

التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المستقلة اسم **التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين** (binomial probability experiment).

أتعلَّم

تختلف تجربة ذات الحدَّين عن التجربة الهندسية باحتوائها على عدد محدود من تكرار المحاولات. أمّا في التجربة الهندسية، فإنَّ التجربة تستمر حتّى إحراز أوَّل نجاح.

مفهوم أساسي التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1. **إلقاء قطعة نقد مُنتظَمة 5 مَرّات، ثمَّ كتابة عدد الصور التي ظهرت.**

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية ذات الحدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء قطعة نقد مُنتظَمة 5 مَرّات). وبما أنَّ نتيجة إلقاء قطعة النقد في كل مَرَّة لا تُؤثِّر في نتيجة إلقائها في المَرّات الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.

2 فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة).

3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$

4 وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة، وهو 5

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

2 إلقاء قطعتي نقد مُنتظَمتين ومتمايزتين حتّى ظهور صورتين.

لا تحوي هذه التجربة عددًا مُحدَّدًا من المحاولات؛ لأنَّها ستستمر حتّى ظهور صورتين.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

أفكِّر

هل تُعَدُّ التجربة في الفرع 2 من المثال 1 هندسية؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقاء حجر نرد مُنتظَم 20 مَرَّة، ثمَّ كتابة عدد المَرّات التي ظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

b) اختيار 7 طلبة عشوائيًّا من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، وذلك لتشكيل فريق لإحدى الألعاب، ثمَّ كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين، وتوزيعه الاحتمالي

أتعلَّم

في المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين، من المُمكِن أنْ يكون $x = 0$، وهذا يدلُّ على عدم إحراز أيِّ نجاح عند تكرار المحاولة n مَرَّة.

في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim B(n, p)$$

حيث n وp معاملا المُتغيِّر العشوائي.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: $0, 1, 2, \ldots, n$؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

إذن، إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — **التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة: $C(n, r), \binom{n}{r}, {}_nC_r$

أتعلَّم

تُستعمَل التوافيق $\binom{n}{r}$ لإيجاد عدد المرّات التي يُمكِن بها اختيار r شيئًا من بين n شيئًا. وقد استُعمِلت التوافيق في قاعدة احتمال توزيع ذي الحدَّين لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأماكن التي حدث فيها النجاح.

مثال 2

إذا كان: $X \sim B(4, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X=2)$

معاملا المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين هما: $n = 4, p = 0.3$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$P(X=2) = \binom{4}{2} (0.3)^2 (0.7)^2$$ بتعويض $n = 4, r = 2, p = 0.3$

$$= 0.2646$$ باستعمال الآلة الحاسبة

2 $P(X>2)$

$$P(X>2) = P(X=3) + P(X=4)$$ صيغة الجمع للحوادث المتنافية

$$= \binom{4}{3} (0.3)^3 (0.7)^1 + \binom{4}{4} (0.3)^4 (0.7)^0$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$= 0.0837$$ باستعمال الآلة الحاسبة

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين يأخذ قِيَمًا معدودةً؛ لذا، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا مُنفصِلًا.

3 $P(X \leq 3)$

احتمال المُتمِّمة	$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$
$P(X > 3) = P(X = 4)$	$= 1 - P(X = 4)$
صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين	$= 1 - \binom{4}{4}(0.3)^4(0.7)^0$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= 0.9919$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X = 4)$

b) $P(X = 6)$

c) $P(X \leq 2)$

d) $P(X > 2)$

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد المطلوب في الفرع 3 من المثال 2 بطريقة أُخرى؟ إنْ وُجِدت طريقة أُخرى، فأيُّ الطريقتين أسهل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُمكِن استعمال توزيع ذي الحدَّين في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3 : من الحياة

صيانة: وَفقًا لنموذج تقييم الخدمة الإلكتروني في إحدى شركات صيانة الأجهزة الكهربائية المنزلية، تبيَّن رضا 75% من الزبائن عن خدمات الشركة. إذا قدَّمت الشركة خدماتها لـ 10 زبائن في أحد الأيام، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة.**

يُمكِن النظر إلى عملية صيانة 10 أجهزة منزلية بوصفها تجربة احتمالية ذات حدَّين؛ لأنَّ صيانة كل جهاز تُعَدُّ محاولة مُتكرِّرة ومستقلة، ولأنَّ عدد هذه المحاولات مُحدَّد، وهو 10، ولأنَّه يُمكِن فرز النتائج المُمكِنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (رضا الزبون)، أو الفشل (عدم رضا الزبون). وبما أنَّ احتمال رضا الزبون في كل محاولة هو 0.75، فإنَّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو 0.75

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الزبائن الراضين عن خدمات الشركة، فإنَّ:

$$X \sim B(10, 0.75)$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة هو $P(X = 4)$:

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين $$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

بتعويض $n = 10, r = 4, p = 0.75$ $$P(X=4)=\binom{10}{4}(0.75)^4(0.25)^{10-4}$$

باستعمال الآلة الحاسبة $$\approx 0.0162$$

إذن، احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة هو 0.0162 تقريبًا.

2 احتمال رضا 3 زبائن على الأقلِّ عن خدمات الشركة.

إنَّ احتمال رضا 3 زبائن على الأقلِّ عن خدمات الشركة هو $P(X \geq 3)$:

احتمال المُتمِّمة $$P(X\geq 3)=1-P(X<3)$$

صيغة الجمع للحوادث المتنافية $$=1-\left(P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\right)$$

$$=1-\left(\binom{10}{2}(0.75)^2(0.25)^8+\binom{10}{1}(0.75)^1(0.25)^9+\binom{10}{0}(0.75)^0(0.25)^{10}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة $$\approx 0.9996$$

إذن، احتمال رضا 3 زبائن على الأقلِّ عن خدمات الشركة هو 0.9996 تقريبًا.

أفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال 3 بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

تحتوي آلة حاسبة على 16 زرًّا للعمليات الأساسية، والمساواة، والفاصلة العشرية، والأعداد من 0 إلى 9. إذا أغمض أحمد عينيه، ثمَّ ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مَرَّة بصورة عشوائية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يضغط أحمد على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مَرّات فقط.

b) احتمال أنْ يضغط أحمد على أزرار العمليات الحسابية الأساسية مَرَّة واحدة على الأقلِّ.

التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — **التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X\sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots , n\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = np$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتذكَّر

يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

مثال 4 : من الحياة

صناعة دوائية: أُجرِيت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواءً جديدًا. وقد خلَصت الدراسة إلى أنَّ 10% من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيبٌ هذا الدواء لـ 50 طفلًا، فكم طفلًا يُتوقَّع أنْ تظهر عليه هذه الأعراض؟

إذا كان X يُمثِّل عدد الأطفال الذين تظهر عليهم الأعراض الجانبية من بين الخمسين طفلًا الذين تناولوا الدواء، فإنَّ: $X\sim B(50, 0.1)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد العدد المُتوقَّع من الأطفال الذين ستظهر عليهم أعراض الدواء الجانبية على النحو الآتي:

$E(X) = np$	صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين
$= 50 \times 0.1$	بتعويض $n = 50, p = 0.1$
$= 5$	بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع أنْ تظهر الأعراض الجانبية للدواء الجديد على 5 أطفال.

أتحقَّق من فهمي

سيّارات: بعد إجراء مسح للسيّارات التي صنعتها شركة ما، تبيَّن أنَّ في 5% منها عطلًا ميكانيكيًّا. إذا استورد وكيل للشركة في إحدى الدول 1000 سيّارة، فأجد عدد السيّارات التي يُتوقَّع أنْ يظهر فيها هذا العطل.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ تباين المُتغيِّر العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم X عن وسطها الحسابي $E(X)$، وأنَّه يُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز σ^2.

ومن ثَمَّ، إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد تباينه باستعمال الصيغة الآتية:

أتذكَّر

$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(X))^2$

مفهوم أساسي **التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطى التباين للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 5

إذا كان: $X \sim B(20, 0.7)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **التوقُّع $E(X)$.**

صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين	$E(X) = np$
بتعويض $n = 20, p = 0.7$	$= 20 \times 0.7$
بالتبسيط	$= 14$

2 **التباين $\text{Var}(X)$.**

صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين	$\text{Var}(X) = np(1-p)$
بتعويض $n = 20, p = 0.7$	$= 20(0.7)(0.3)$
بالتبسيط	$= 4.2$

أتذكَّر

يُرمَز إلى الانحراف المعياري بالرمز σ، وهو الجذر التربيعي للتباين.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوقُّع $E(X)$.

b) التباين $\text{Var}(X)$.

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إلقاء قطعة نقد 80 مَرَّة، ثمَّ تسجيل عدد مَرّات ظهور الكتابة.

2 إلقاء حجر نرد مُنتظَم 20 مَرَّة، ثمَّ كتابة عدد المَرّات التي ظهر فيها العدد 4 على الوجه العلوي لحجر النرد.

3 إطلاق أسهم بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثمَّ التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة.

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًا ذا حدَّين، وكان معاملاه: $n = 17, p = 0.64$، فأُعبِّر عن هذا المُتغيِّر بالرموز.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

5 $P(X=2)$

6 $P(X=5)$

7 $P(X<3)$

8 $P(X \leq 7)$

9 $P(X \geq 2)$

10 $P(2 < X \leq 8)$

إذا كان: $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X=1)$

12 $P(X>1)$

13 $P(0 \leq X < 2)$

طيران: **يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤية باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20 مَرَّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

14 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤية خلال عملية الهبوط في 3 مَرّات فقط.

15 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤية خلال عملية الهبوط في 3 مَرّات على الأقلِّ.

16 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤية خلال عملية الهبوط في المَرّات جميعها.

17 العدد المُتوقَّع من المَرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤية خلال عملية الهبوط.

أجد التوقُّع والتباين لكل مُتغيِّر عشوائي ممّا يأتي:

18 $X \sim B(5, 0.1)$

19 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

إذا كان احتمال إصابة شـخص ما بأعراض جانبية بعد أخذه مطعومًا مُعيَّنًا هو 12%، وقرَّر طبيب إعطاء 50 شخصًا هذا المطعوم، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

20 احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 3 أشخاص فقط مِمَّنْ أخذوا المطعوم.

21 العدد المُتوقَّع للأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية.

22 التباين للمُتغيِّر العشوائي X.

23 **اتصالات:** بعد إجراء مسـح لمشتركي إحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشـترك عشوائيًّا لاسـتطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تُقدِّمها الشركة، فأجد عدد الإناث المُتوقَّع في هذه العيِّنة.

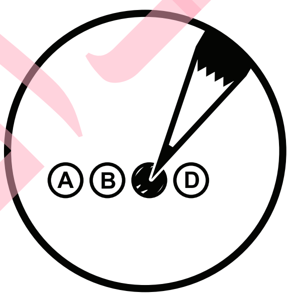
24 إذا كان: $X \sim B(n, p)$، وكان: $E(X) = 1.4, Var(X) = 1.12$، فأجد $P(X \geq 6)$.

مهارات التفكير العليا

25 **تبرير:** إذا كان: $X \sim B(3, p)$، وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$، فأجد $P(X = 2)$، وأُبرِّر إجابتي.

26 **تبرير:** إذا كان: $X \sim B(100, p)$، وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، وأُبرِّر إجابتي.

27 **تحـدٍّ:** يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سـؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعـدِّد، ولكلٍّ منها 4 بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76 من 100؟



الدرس 3

التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

فكرة الدرس

- تعرُّف منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية.

المصطلحات

المنحنى الطبيعي، القاعدة التجريبية، المُتغيِّر العشوائي المتصل، المُتغيِّر العشوائي المُنفصِل، التوزيع الطبيعي.

مسألة اليوم

إذا كان الزمن الذي يستغرقه شحن سمّاعة لاسلكية شحنًا كاملًا يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 90 دقيقة، وانحرافه المعياري 10 دقائق، فما احتمال أنْ تكتمل عملية الشحن في أقلَّ من 80 دقيقة؟

أتذكَّر

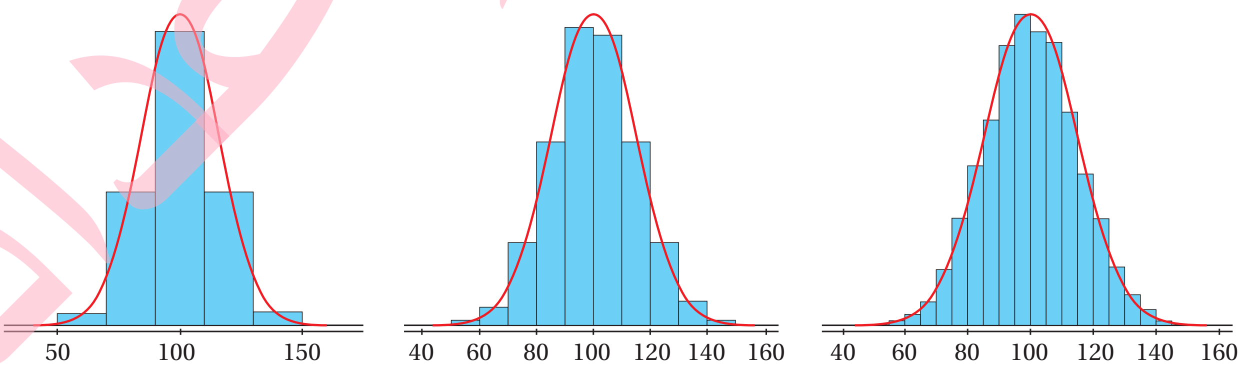
البيانات العددية المُنفصِلة هي بيانات تأخذ قِيَمًا قابلةً للعدِّ، مثل: عدد الإخوة، وعدد الكتب. أمّا البيانات العددية المتصلة فهي بيانات قِيَمها المُمكِنة غير قابلة للعدِّ، لكنَّها قابلة للقياس، مثل: الطول، والكتلة.

المنحنى الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ البيانات العددية هي بيانات يُمكِن رصدها في صورة أعداد، ويُمكِن أيضًا قياسها، وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعديًّا وتنازليًّا.

تُصنَّف البيانات العددية إلى نوعين، هما: البيانات المُنفصِلة، والبيانات المتصلة. ويُمكِن استعمال المدرجات التكرارية لتمثيل البيانات العددية المتصلة بيانيًّا.

تُبيِّن المدرجات التكرارية الآتية كتل مجموعة من الأشخاص الذين اختيروا عشوائيًّا من مدينة ما:



$n = 100$ $n = 1000$ $n = 10000$

أُلاحِظ أنَّ زيادة حجم العيِّنة، وتقليص أطوال الفئات، يجعلان المدرج التكراري أكثر تناسقًا وقربًا من المنحنى المرسوم باللون الأحمر، الذي يُسمّى **المنحنى الطبيعي** (normal curve). يُستعمَل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًّا في كثير من المواقف الحياتية.

بوجه عام، فإنَّ للمنحنى الطبيعي خصائص تُميِّزه عن غيره من المنحنيات الأُخرى؛ ما يُفسِّر سبب استعماله كثيرًا في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة.

مفهوم أساسي **خصائص المنحنى الطبيعي**

يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّطها البيانات.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

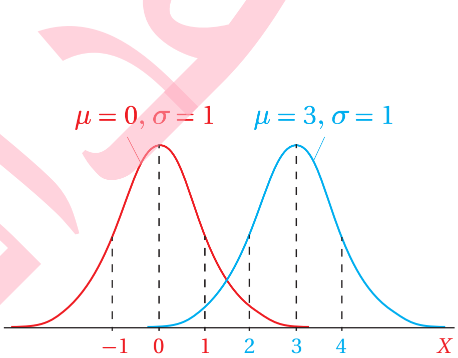
أتعلَّم

يجب أنْ يكون عدد البيانات كبيرًا جدًّا لكي يَتَّخِذ تمثيلها البياني شكل المنحنى الطبيعي.

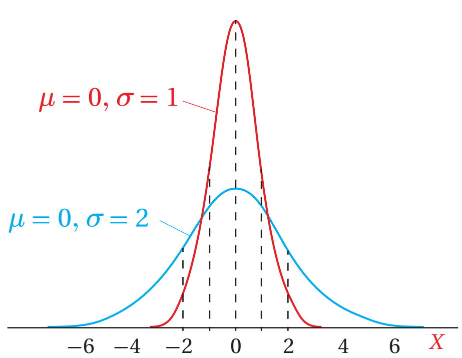
يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي μ، والانحراف المعياري σ للبيانات. فمثلًا، في الشكل (a) التالي، يُمكِن ملاحظة أنَّ التغيُّر في الوسط الحسابي يؤدّي إلى انسحاب أُفقي للمنحنى الطبيعي. أمّا في الشكل (b) فيُلاحَظ أنَّ زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشارًا وتوسُّعًا.

أتعلَّم

أُلاحِظ من الشكل (a) أنَّ زيادة الوسط الحسابي من 0 إلى 3 تسبَّبت في انسحاب المنحنى إلى اليمين 3 وحدات، علمًا بأنَّ σ مُتساوِية، في حين أنَّ زيادة الانحراف المعياري من 1 إلى 2 في الشكل (b) أدَّت إلى توسُّع المنحنى أُفقيًّا، من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في مركز البيانات.



(a)

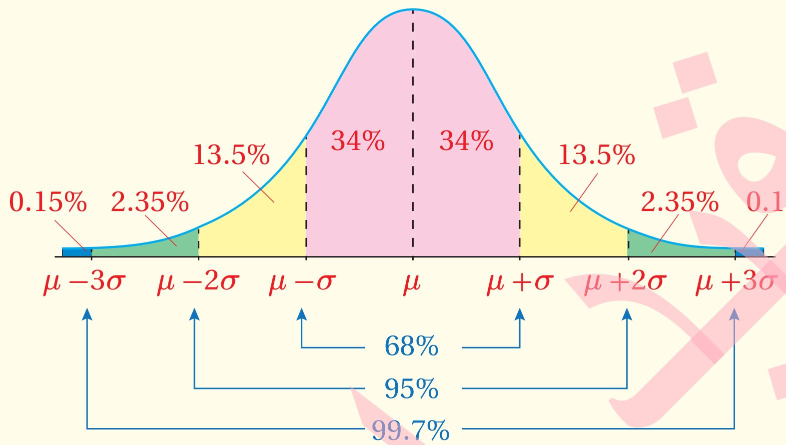


(b)

تُمثِّل المساحة التي تقع بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين، ويُمكِن استعمال **القاعدة التجريبية** (empirical rule) الآتية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض قِيَم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي:

مفهوم أساسي **القاعدة التجريبية**

إذا اتَّخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي μ، وانحرافها المعياري σ، فإنَّ:



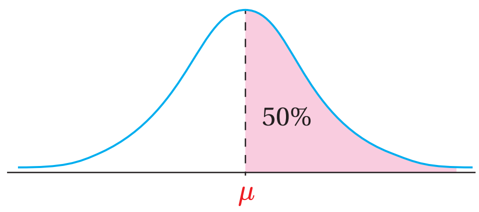
- 68% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$؛ أيْ إنَّ 68% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.
- 95% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$؛ أيْ إنَّ 95% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الانحراف المعياري.
- 99.7% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$؛ أيْ إنَّ 99.7% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

مثال 1

إذا اتَّخذت علامات بعض الطلبة شكل المنحنى الطبيعي في أحد الاختبارات، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

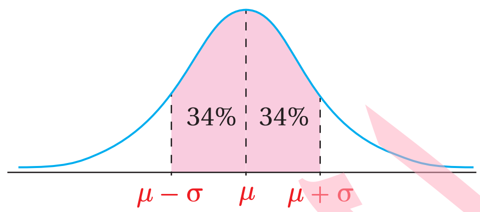
1 النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

بما أنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 50% من العلامات تقع فوق الوسط الحسابي كما في الشكل المجاور.



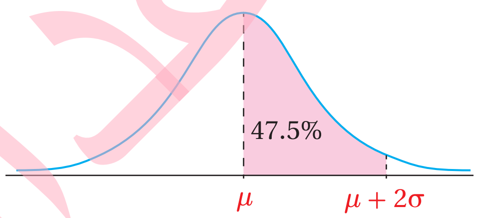
2 النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

68% هي النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد كما في الشكل المجاور.



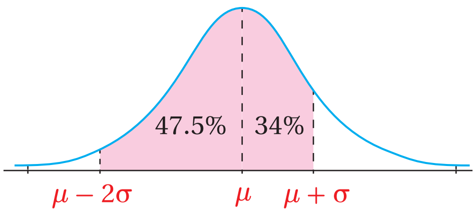
3 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

بما أنَّ 95% من المُشاهَدات في المنحنى الطبيعي تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$، وأنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 47.5% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين كما في الشكل المجاور.



4 **النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.**

بما أنَّ 47.5% من العلامات تقلُّ عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، وأنَّ 34% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، فإنَّ 81.5% من العلامات تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + \sigma$ كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي

إذا اتَّخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية.

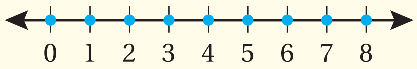
يوجد نوعان من المُتغيِّرات العشوائية، هما: **المُتغيِّر العشوائي المُنفصِل** (discrete random variable)، و**المُتغيِّر العشوائي المتصل** (continuous random variable).

مفهوم أساسي

المُتغيِّرات العشوائية المتصلة والمُنفصِلة

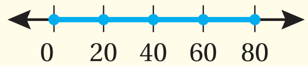
- المُتغيِّر العشوائي المُنفصِل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

مثال: عدد السيّارات التي ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



- المُتغيِّر العشوائي المتصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة من الأعداد الحقيقية.

مثال: سرعة أوَّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



أتعلَّم

يُعَدُّ كلٌّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين مُتغيِّرًا عشوائيًّا مُنفصِلًا؛ لأنَّ كُلًّا منهما يأخذ قِيَمًا معدودةً، مثل: عدد مَرّات إصابة الهدف، وعدد السيّارات.

إذا ارتبط المُتغيِّر العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتَّخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي **التوزيع الطبيعي** (normal distribution)، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث:

μ: الوسط الحسابي.

σ: الانحراف المعياري.

أتعلَّم

يُرمَز إلى التوزيع الطبيعي بالحرف N؛ وهو الحرف الأوَّل من الكلمة الإنجليزية (Normal) التي تعني طبيعي.

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّ المساحة الواقعة بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي تُمثِّل النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. وبما أنَّ المساحة أسفل المنحنى الطبيعي هي 1، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال بعض قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية، بافتراض أنَّ المساحة أسفل المنحنى كاملة تُمثِّل احتمال الحادث الأكيد.

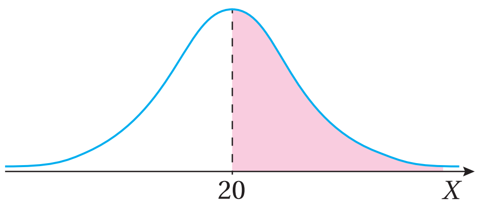
أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإنَّ: $0 \le P(A) \le 1$.

مثال 2

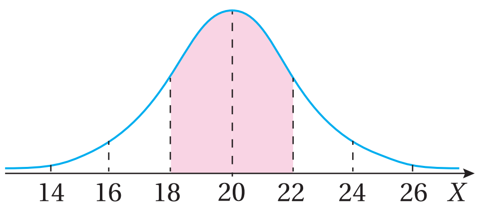
إذا كان: $X \sim N(20, 4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X > 20)$



بما أنَّ الوسط الحسابي هو 20، والمنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ: $P(X > 20) = P(X > \mu) = 0.5$ كما في الشكل المجاور.

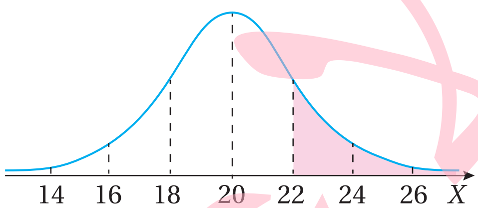
2 $P(18 < X < 22)$



تبعد كلٌّ من القيمة 18 والقيمة 22 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي. وبما أنَّ 68% من البيانات لا يزيد بُعْدها عن الوسط الحسابي بمقدار قيمة الانحراف المعياري، فإنَّ:

$P(18 < X < 22) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$.

3 $P(X > 22)$



بما أنَّ القيمة 22 تبعد انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي، فإنَّ المطلوب هو إيجاد احتمال القِيَم التي يزيد بُعْدها عن الوسط الحسابي بمقدار يزيد على انحراف معياري واحد.

وبما أنَّ 16% من البيانات تُحقِّق ذلك، فإنَّ:

$P(X > 22) = P(X > \mu + \sigma) = 0.16$.

أتعلَّم

بما أنَّ $\sigma^2 = 4$، فإنَّ $\sigma = 2$؛ أيْ إنَّ الانحراف المعياري لهذا التوزيع الطبيعي هو 2.

أتعلَّم

نسبة 16% ناتجة من:

$13.5\% + 2.35\% + 0.15\%$

أو من: $50\% - 34\%$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim N(55, 121)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X < 55)$

b) $P(55 < X < 66)$

c) $P(X > 77)$

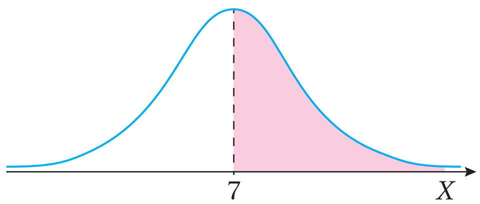
يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي لنمذجة كثير من المواقف الحياتية، وإيجاد احتمالات مُرتبِطة بها باستعمال القاعدة التجريبية.

مثال 3 : من الحياة

صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على طول قُطْر برغي (بالملّيمتر) تُنتِجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(7, 0.1^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X > 7)$

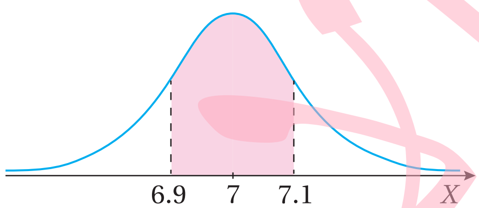
بما أنَّ الوسط الحسابي هو 7، والمنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ: $P(X > 7) = P(X > \mu) = 0.5$ كما في الشكل المجاور.



2 $P(6.9 < X < 7.1)$

تبعد كلٌّ من القيمة 6.9 والقيمة 7.1 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي.

وبما أنَّ 68% من البيانات تبعد عن الوسط الحسابي بمقدار أقلَّ من قيمة الانحراف المعياري، فإنَّ:



$P(6.9 < X < 7.1) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$.

أتعلَّم

في ما يختصُّ بالتوزيع الطبيعي، فإنَّ إشارة المساواة لا تُؤثِّر في قِيَم الاحتمال؛ أيْ إنَّ: $P(X \leq a) = P(X < a)$.

أتحقَّق من فهمي

صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على طول قُطْر رأس مِثْقب (بالملّيمتر) تُنتِجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X > 30)$

b) $P(29.6 < X < 30.4)$

c) $P(29.2 < X < 30)$

d) $P(29.2 < X < 30.4)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا اتَّخذت علامات الطلبة في اختبار لمبحث التاريخ شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

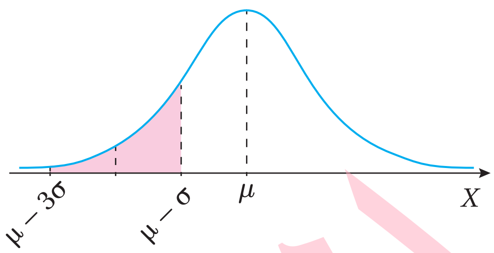
2 النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

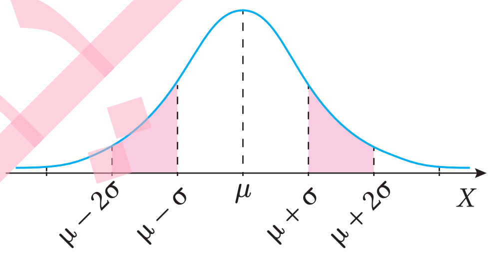
4 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

أُحدِّد النسبة المئوية لمساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل كل توزيع طبيعي ممّا يأتي:

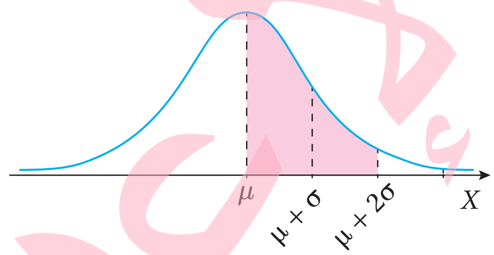
5



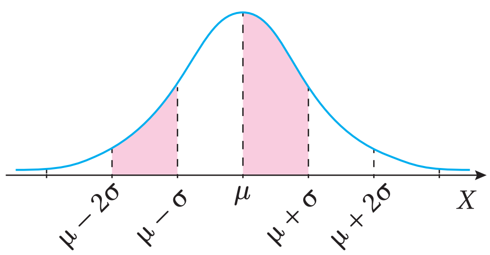
6



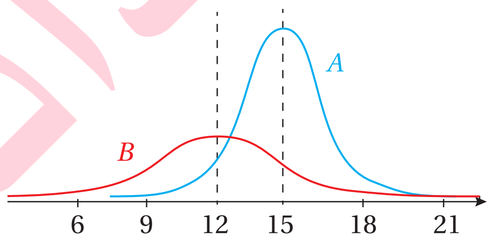
7



8



9 يُمثِّل كلٌّ من المنحنيين في الشكل المجاور توزيعًا طبيعيًّا. أُقارِن بين هذين التوزيعين من حيث قِيَم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



إذا كان: $X \sim N(79, 144)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 $P(X < 79)$

11 $P(67 < X < 91)$

12 $P(X > 91)$

13 $P(X > 103)$

14 $P(43 < X < 115)$

15 $P(X < 43)$

أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي **167 cm**، وانحرافه المعياري **8 cm**. إذا اختيرت امرأة عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16 احتمال أنْ يكون طول المرأة أقلَّ من 167 cm

17 احتمال أنْ يتراوح طول المرأة بين 159 cm و 167 cm

18 احتمال أنْ يتراوح طول المرأة بين 151 cm و 175 cm

صناعة: يُنتِج مصنعٌ أكياسَ أسمنت تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي **50 kg**، وانحرافه المعياري **2 kg**. إذا اختير كيس أسمنت عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

19 احتمال أنْ تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg

20 احتمال أنْ تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و 52 kg

مهارات التفكير العليا

21 **أكتشف الخطأ:** قال يوسف: "إنَّ $X \sim N(4^2, t^2)$ مُتغيِّر عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 4، وانحرافه المعياري t^2 ". أكتشف الخطأ في قول يوسف، ثمَّ أُصحِّحه.

22 **تبرير:** يدلُّ المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد σ^2، وأُبرِّر إجابتي.

23 **تبرير:** إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ، وكان: $P(X \leq \mu + a) = 0.23$، فما قيمة $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a)$؟

24 **تحدٍّ:** تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68، وانحرافه المعياري 15. إذا لم ينجح في الاختبار 16% من الطلبة، فأجد علامة النجاح.

الدرس 4

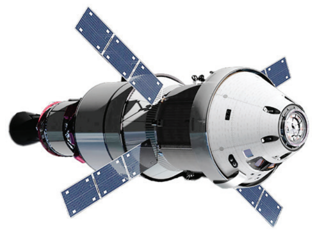
التوزيع الطبيعي المعياري
Standard Normal Distribution

فكرة الدرس

- تعرُّف التوزيع الطبيعي المعياري، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول.

المصطلحات التوزيع الطبيعي المعياري.

مسألة اليوم أَجْرت وكالة فضاء اختبارًا دقيقًا لحركة الأقمار الصناعية حول الأرض، تضمَّن قياس انحراف كل قمر عن مداره المثالي. وقد تبيَّن أنَّ هذه الانحرافات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 0 km، وانحرافه المعياري 1. إذا اختير قمر صناعي عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون انحرافه عن مداره أكثر من 0.8 km؟

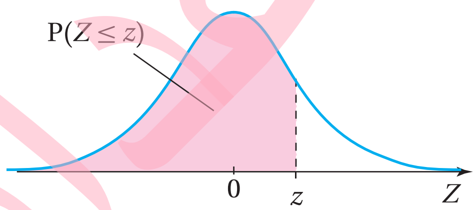


التوزيع الطبيعي المعياري

يُطلَق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0، وانحرافه المعياري 1 اسم **التوزيع الطبيعي المعياري** (standard normal distribution)، ويُمكِن التعبير عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري بالرموز على النحو الآتي:

$$Z \sim N(0, 1)$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المُتماثِل حول الوسط الحسابي 0.



تُمثِّل مساحة المنطقة المُظلَّلة احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري Z التي تقلُّ عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z، أو $P(Z \leq z)$.

أتعلَّم

يُستعمَل الحرف X عادةً للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، ويُستعمَل الحرف Z للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري.

إذن، $P(Z < z)$ تساوي المساحة إلى يسار القيمة المعيارية z، وهي المساحة التي يُمكِن إيجادها باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

يُبيِّن الشكل التالي جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يحتوي فيه العمود الأوَّل من جهة اليسار على منزلة أجزاء العشرة في قيمة z المعيارية، ويحتوي فيه الصف الأوَّل على منزلة أجزاء المئة في قيمة z المعيارية، وتُمثِّل القيمة المُقابِلة لكلٍّ من هاتين القيمتين في الجدول المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار قيمة z المعيارية، أو $P(Z < z)$.

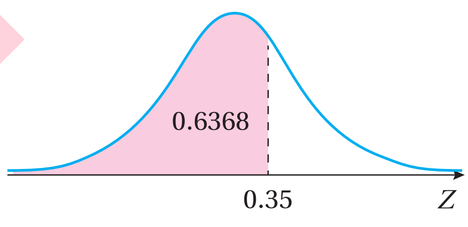
فمثلًا، لإيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار $z = 0.35$، أجد القيمة المُقابِلة لكلٍّ من 0.3 في العمود الأوَّل، و 0.05 في الصف الأوَّل، وهذه القيمة تساوي $P(Z < 0.35)$.

أتعلَّم

عند استعمال المُتغيِّر العشوائي المتصل X، فإنَّ إشارة المساواة لا تُؤثِّر في قيمة الاحتمال؛ لأنَّ المساحة (الاحتمال) أسفل نقطة واحدة على المنحنى هي صفر. فمثلًا: $P(X \leq x) = P(X < x)$.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	[illegible]	[illegible]	0.7088
[illegible]	[illegible]	0.7291	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



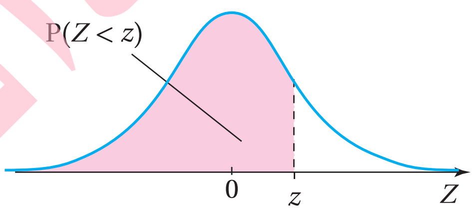
ملحوظة: توجد نسخة كاملة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في الملحق المُرفَق بنهاية الكتاب.

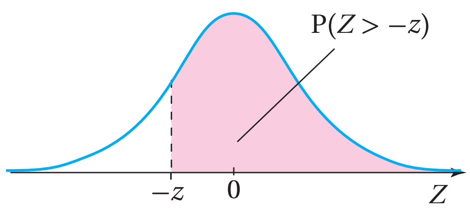
يُبيِّن الجدول السابق احتمال القِيَم التي تقلُّ عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z، ويُمكِن أيضًا إيجاد احتمال القيمة التي تزيد على (أو تساوي) القيمة المعيارية $(-z)$ من الجدول مباشرة؛ لأنَّ مساحة المنطقة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي التي تقع يمين القيمة المعيارية $(-z)$ مُساوِية لمساحة المنطقة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي التي تقع يسار القيمة المعيارية (z).

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$

أتعلَّم

تُعَدُّ القاعدة المجاورة نتيجةً لتماثل منحنى التوزيع الطبيعي حول الوسط الحسابي.





مثال 1

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(Z < 1.34)$

$P(Z < 1.34) = 0.9099$ باستعمال الجدول

2 $P(Z > -2.01)$

$P(Z > -2.01) = P(Z < 2.01)$ باستعمال الخصائص

$= 0.9778$ باستعمال الجدول

أتعلَّم

يحتوي جـدول التوزيع الطبيعي على احتمالات تُقابِـل قِيَـم z الموجبة فقط؛ لذا، يجب أنْ أُحوِّل جميع قِيَم z السـالبة إلى ما يُقابِلها من قِيَم موجبة.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 0.69)$

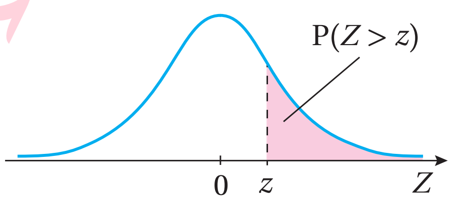
b) $P(Z < 3.05)$

c) $P(Z > -1.67)$

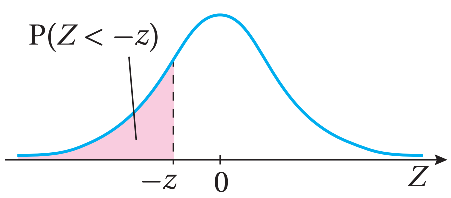
d) $P(Z > -2.88)$

يُمكِن استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، إضافةً إلى الجدول، لإيجاد احتمال القِيَم التي تزيد على (أو تساوي) القيمة المعيارية z، أو احتمال القِيَم التي تقلُّ عن (أو تساوي) القيمة المعيارية ($-z$)، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

- $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$



- $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$



أتعلَّم

تُعَدُّ القاعدتان المجاورتان صحيحتين؛ لأنَّ المساحة أسـفل المنحنى الطبيعي المعيـاري كاملـة هي 1، ولأنَّهـا تُمثِّـل احتمـال الحادث الأكيد.

مثال 2

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(Z > 1.25)$

$P(Z > 1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8944$ باستعمال الجدول

$= 0.1056$ بالتبسيط

2 $P(Z < -0.62)$

$P(Z < -0.62) = 1 - P(Z < 0.62)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.7324$ باستعمال الجدول

$= 0.2676$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z > 2.56)$

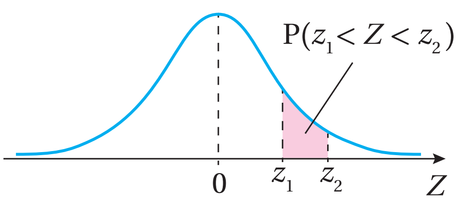
b) $P(Z > 1.01)$

c) $P(Z < -0.09)$

d) $P(Z < -1.52)$

يُمكِن أيضًا استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، لإيجاد احتمال القِيَم التي تقع بين قيمتين معياريتين، وذلك بطرح احتمال القيمة المعيارية الصغرى من احتمال القيمة المعيارية الكبرى:

- $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



مثال 3

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $\boldsymbol{P(0.47 < Z < 1.1)}$

$P(0.47 < Z < 1.1) = P(Z < 1.1) - P(Z < 0.47)$ باستعمال الخصائص

$= 0.8643 - 0.6808$ باستعمال الجدول

$= 0.1835$ بالتبسيط

2 $\boldsymbol{P(-1.5 < Z < 2.34)}$

$P(-1.5 < Z < 2.34) = P(Z < 2.34) - P(Z < -1.5)$ باستعمال الخصائص

$= P(Z < 2.34) - (1 - P(Z < 1.5))$ باستعمال الخصائص

$= 0.9904 - (1 - 0.9332)$ باستعمال الجدول

$= 0.9236$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(0 < Z < 0.33)$

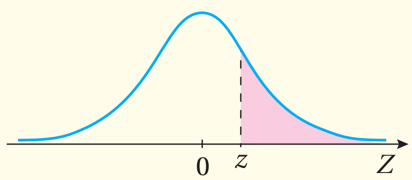
b) $P(-1 < Z < 1.25)$

في ما يأتي مُلخَّص للحالات المذكورة في الأمثلة السابقة:

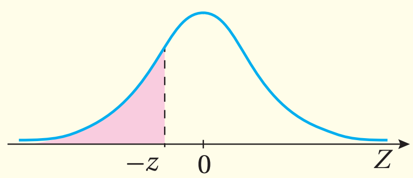
مُلخَّص المفهوم
إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

1 $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$



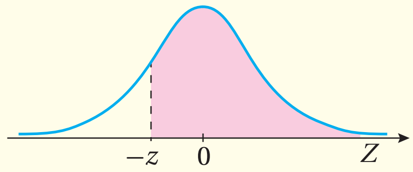
2 $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$



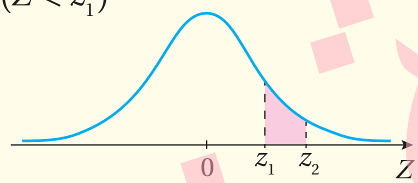
مُلخَّص المفهوم

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري (يتبع)

3 $P(Z > -z) = P(Z < z)$



4 $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي المعياري، لكنَّ الاحتمال قد يكون معلومًا في بعض الأحيان، وتكون قِيَم المُتغيِّر العشوائي Z هي المجهولة. وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

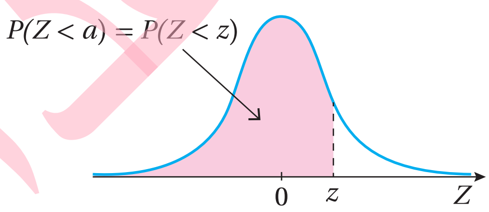
مثال 4

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\mathbf{P(Z < a) = 0.8212}$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المُعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a موجبة، وأنَّه يُمكِن استبدال القيمة z بها.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة z أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، وأَتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال 0.8212 هي 0.92 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8599

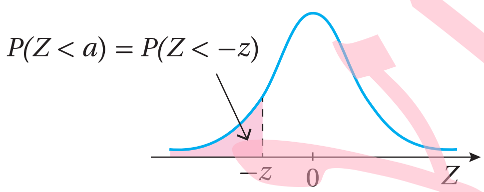
الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $z = a$، فإنَّ $a = 0.92$.

2 $P(Z < a) = 0.32$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المُعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقلُّ من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a سالبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنها بالقيمة $-z$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة $-z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، وأَتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z) \quad \text{باستعمال الخصائص}$$

$$0.32 = 1 - P(Z < z) \quad \text{بتعويض } P(Z < -z) = 0.32$$

$$P(Z < z) = 0.68 \quad \text{بحلِّ المعادلة لـ } P(Z < z)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ القيمة الدقيقة للاحتمال 0.6800 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقلَّ منها، وهي 0.6772

ومن ثَمَّ، فإنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال هي 0.46 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

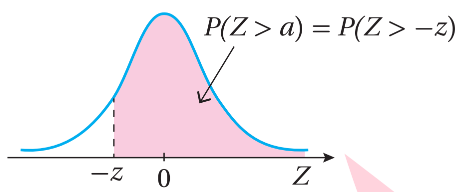
الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = -z$، فإنَّ قيمة a هي -0.46.

3 $P(Z > a) = 0.9406$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المُعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a سالبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنها بالقيمة $-z$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة $-z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، وأتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.9406 = P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z > -z) = 0.9406$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال 0.9406 هي 1.56 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	[illegible]	[illegible]	0.9573	0.9582	0.9591	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9633

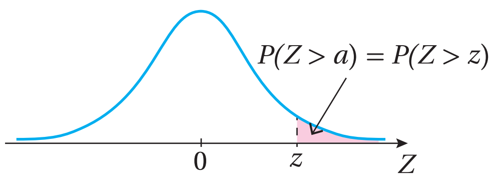
الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = -z$، فإنَّ قيمة a هي -1.56.

④ $P(Z > a) = 0.015$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المُعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقلُّ من 0.5، فهذا يعني أنَّ قيمة a موجبة، وأنَّه يُمكِن التعويض عنها بالقيمة z. ومن ثَمَّ، فإنَّ الاحتمال يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة z أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



لإيجاد قيمة a، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي، وأتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ باستعمال الخصائص

$0.015 = 1 - P(Z < z)$ بتعويض $P(Z > z) = 0.015$

$P(Z < z) = 0.985$ بحلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة z التي تُقابِل الاحتمال 0.9850 هي 2.17 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854

الخطوة 2: أجد قيمة a.

بما أنَّ $a = z$، فإنَّ $a = 2.17$.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(Z < a) = 0.9788$

b) $P(Z < a) = 0.25$

c) $P(Z > a) = 0.9738$

d) $P(Z > a) = 0.2$

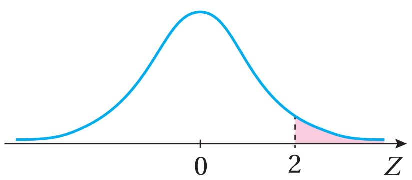
أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

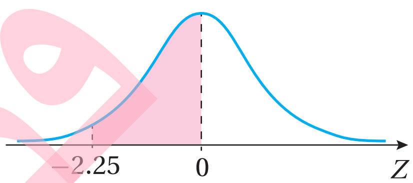
1) $P(Z < 0.68)$
2) $P(Z < 1.54)$
3) $P(Z > 0.27)$
4) $P(0.49 < Z < 2.9)$
5) $P(-0.08 < Z < 0.8)$
6) $P(0 < Z < 1.07)$
7) $P(Z < -1.25)$
8) $P(Z > -1.99)$
9) $P(-0.5 < Z < 0)$
10) $P(Z < 0.43)$
11) $P(Z > 3.08)$
12) $P(Z < -2.03)$
13) $P(Z > 2.2)$
14) $P(-0.72 < Z < 3.26)$
15) $P(1.5 < Z < 2.5)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

16)



17)



أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $P(Z < a) = 0.7642$
19) $P(Z < a) = 0.13$
20) $P(Z > a) = 0.8531$
21) $P(Z > a) = 0.372$

مهارات التفكير العليا

22) أكتشف الخطأ: عبَّرت روان عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري على النحو الآتي:

$N\text{~}Z(1, 0^2)$ ✗

أكتشف جميع الأخطاء التي وقعت فيها روان، ثمَّ أُصحِّحها.

23) تحدٍّ: إذا كان $a > 0$، فأُثبِت أنَّ: $P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$.

تبرير: أجد قيمة a الموجبة التي تُحقِّق الاحتمال المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي، وأُبرِّر إجابتي:

24) $P(0 < Z < a) = 0.45$
25) $P(-a < Z < a) = 0.1272$

الدرس 5

احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

Probability of Normal Random Variable Using the Table

فكرة الدرس إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مسألة اليوم تحرص إدارة أحد الفنادق الفاخرة على تدوين الزمن الذي يستغرقه الموظفون في إتمام إجراءات تسجيل النزلاء بعد وصولهم إلى الفندق. وقد تبيَّن أنَّ هذا الزمن يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 4.5 دقائق، وانحرافه المعياري 0.8 من الدقيقة. إذا اختير نزيل بشكل عشوائي، فما احتمال أنْ يستغرق تسجيل دخوله أكثر من 6 دقائق؟

تحويل قِيَم التوزيع الطبيعي إلى قِيَم معيارية

تعلَّمْتُ في الدرسين السابقين إيجاد احتمالات مُتغيِّرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقِيَم مُحدَّدة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$، باستعمال القاعدة التجريبية، وإيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول. والآن سأتعلَّم إيجاد احتمال أيِّ مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ لأيِّ قيمة، وذلك بتحويله إلى مُتغيِّر عشوائي طبيعي معياري.

يُمكِن استعمال الصيغة الآتية لتحويل قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي X إلى قِيَم معيارية Z:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

بطرح الوسط الحسابي من قيمة x، ثمَّ القسمة على الانحراف المعياري.

أتذكَّر

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X.

مثال 1

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 64، وانحرافه المعياري 5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $x = 70$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$ صيغة قِيَم z

$$z = \frac{70 - 64}{5}$$ بتعويض $\mu = 64, \sigma = 5, x = 70$

$$= 1.2$$ بالتبسيط

2 $\boldsymbol{x = 55}$

صيغة قِيَم z	$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$
بتعويض $\mu = 64, \sigma = 5, x = 55$	$z = \dfrac{55-64}{5}$
بالتبسيط	$= -1.8$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 15، وانحرافه المعياري 4، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $x = 24$

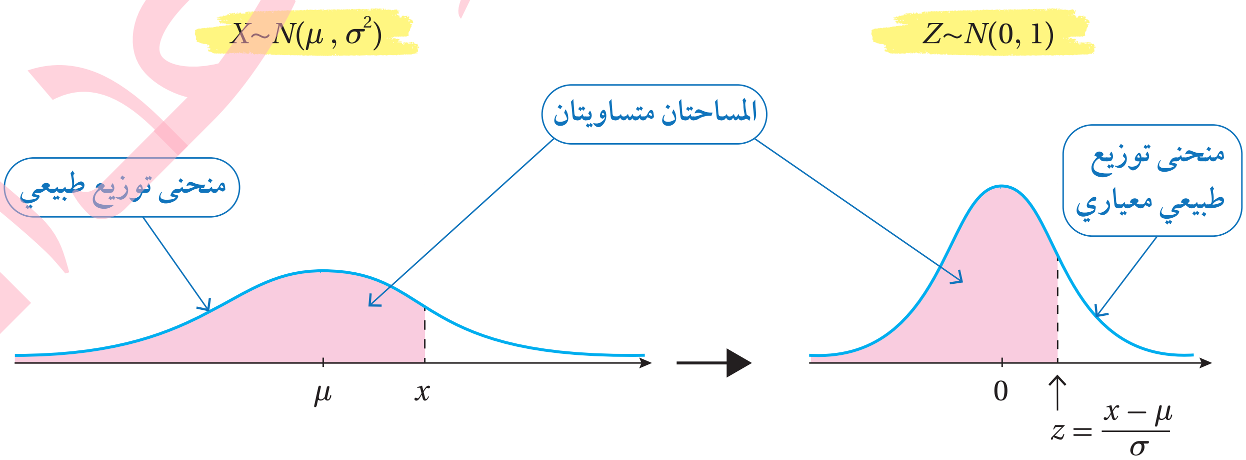
b) $x = 10$

أتذكَّر

يؤدّي التغيُّر في الوسط الحسابي إلى انسحاب أُفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي. أمّا التغيُّر في الانحراف المعياري فيُؤثِّر في انتشار المنحنى الطبيعي وتوسُّعه.

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

إنَّ طرح الوسط الحسابي من جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلًا من μ، وإنَّ قسمة هذه القِيَم جميعًا على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلًا من σ، وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معياريًّا، ويتحوَّل المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$، عندئذٍ يُمكِن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أيٍّ من قِيَمه.



مثال 2

إذا كان: $X \sim N(36, 8^2)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(X < 42)$

صيغة قِيَم z	$P(X < 42) = P\left(Z < \frac{42-\mu}{\sigma}\right)$
بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$	$= P\left(Z < \frac{42-36}{8}\right)$
بالتبسيط	$= P(Z < 0.75)$
باستعمال الجدول	$= 0.7734$

2 $P(X > 28)$

صيغة قِيَم z	$P(X > 28) = P\left(Z > \frac{28-\mu}{\sigma}\right)$
بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$	$= P\left(Z > \frac{28-36}{8}\right)$
بالتبسيط	$= P(Z > -1)$
باستعمال الخصائص	$= P(Z < 1)$
باستعمال الجدول	$= 0.8413$

3 $P(X > 46)$

صيغة قِيَم z	$P(X > 46) = P\left(Z > \frac{46-\mu}{\sigma}\right)$
بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$	$= P\left(Z > \frac{46-36}{8}\right)$
بالتبسيط	$= P(Z > 1.25)$
باستعمال الخصائص	$= 1 - P(Z < 1.25)$
باستعمال الجدول	$= 1 - 0.8944$
بالتبسيط	$= 0.1056$

أتذكَّر

القيمة المعيارية z التي تُقابِل $x = 42$ في هذه الحالة هي 0.75

4 $P(24 < X < 56)$

$$P(24 < X < 56) = P\left(\frac{24-\mu}{\sigma} < Z < \frac{56-\mu}{\sigma}\right)$$ صيغة قِيَم z

$$= P\left(\frac{24-36}{8} < Z < \frac{56-36}{8}\right)$$ بتعويض $\mu = 36, \sigma = 8$

$$= P(-1.5 < Z < 2.5)$$ بالتبسيط

$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -1.5)$$ باستعمال الخصائص

$$= P(Z < 2.5) - (1 - P(Z < 1.5))$$ باستعمال الخصائص

$$= 0.9938 - 1 + 0.9332$$ باستعمال الجدول

$$= 0.927$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $X \sim N(7, 0.25)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < 7.7)$

b) $P(X > 6.1)$

c) $P(X > 8.2)$

d) $P(6 < X < 7.1)$

أتعلَّم

عند إيجـاد $\frac{x-\mu}{\sigma}$، أُقرِّب الإجابة إلى أقرب منزلتين عشـريتين؛ لأتمكَّن من استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

للتوزيـع الطبيعي كثير من التطبيقات الحياتية التي نلجـأ فيها إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري لتسهيل إجراء الحسابات المطلوبة.

مثال 3 : من الحياة

زراعة: تتبـع كتل ثمار الجوّافة في إحـدى مَزارع غور الأردن توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 70 g، وانحرافه المعياري 4 g:

1 أجد نسبة ثمار الجوّافة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 80 g

أفترض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يدلُّ على كتلة حبَّة الجوّافة:

$$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-\mu}{\sigma}\right)$$ صيغة قِيَم z

معلومة

تُزرَع فاكهـة الجوّافة في مناطق عِدَّة من المملكة، أبرزهـا: منطقة سـحم الكفـارات، ومنطقة بني كنانة في محافظة إربد.

$= P\left(Z > \frac{80-70}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 70, \sigma = 4$

$= P(Z > 2.5)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 2.5)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.9938$ باستعمال الجدول

$= 0.0062$ بالتبسيط

إذن، نسبة ثمار الجوّافة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 80 g هي 0.0062

2 إذا وُضِع في شــاحنة 4500 ثمرة جوّافة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في هذه الشاحنة.

الخطوة 1: أجد نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g

$P(X < 65) = P\left(Z < \frac{65-\mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم z

$= P\left(Z < \frac{65-70}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 70, \sigma = 4$

$= P(Z < -1.25)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 1.25)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8944$ باستعمال الجدول

$= 0.1056$ بالتبسيط

إذن، نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g هي 0.1056

الخطوة 2: أجد عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في الشاحنة.

أفتــرض أنَّ n هو العدد المطلوب من ثمار الجوّافة، ثمَّ أجده بضرب عدد ثمار الجوّافة الكلي الموجود بالشاحنة N في نسبة ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g:

$n = N \times P$ مفهوم النسبة

$= 4500 \times 0.1056$ بتعويض $N = 4500, P = 0.1056$

≈ 475 بالتبسيط

إذن، عدد ثمار الجوّافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في الشاحنة هو 475 حبَّة جوّافة تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

زراعة: تتبع كتـــل ثمار البندورة في إحدى المَزارع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 90 g، وانحرافه المعياري 5 g:

a) أجد نسبة ثمار البندورة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 80 g

b) إذا احتوى صندوق على 200 حبَّة بندورة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 100 g في هذا الصندوق.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان X مُتغيِّرًا عشـــوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 224، وانحرافه المعياري 6، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $x = 239$

2) $x = 200$

3) $x = 224$

إذا كان: $X \sim N(30, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

4) $P(X < 35)$

5) $P(X > 38)$

6) $P(35 < X < 40)$

7) $P(X < 20)$

8) $P(15 < X < 32)$

9) $P(17 < X < 19)$

إذا كان: $X \sim N(154, 144)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

10) $P(X < 154)$

11) $P(X > 160)$

12) $P(140 < X < 155)$

13) يتبـع ضغط الدم الانقباضي (mmHg) للبالغين توزيعًا طبيعيًّا، وسـطه الحسـابي 105، وانحرافه المعياري 16. إذا اختير شـخص بالغ عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون ضغط دمه الانقباضي أقلَّ من 101 mmHg؟

بطّاريات: تُنتِج إحدى الشركات بطّارياتٍ من نوع AA، وتتبع مُدَّة عمل هذه البطّاريات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 25 ساعة، وانحرافه المعياري 1.5 ساعة. إذا اختيرت بطّارية عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

14 احتمال أنْ تكون مُدَّة عمل البطّارية أكثر من 28 ساعة.

15 احتمال أنْ تكون مُدَّة عمل البطّارية أكثر من 20 ساعة.

16 احتمال أنْ تتراوح مُدَّة عمل البطّارية بين 22 ساعة و25 ساعة.

17 في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي $90\ \text{km/h}$، وانحرافه المعياري $5\ \text{km/h}$. إذا كانت السرعة القصوى المُحدَّدة على هذا الطريق هي $100\ \text{km/h}$، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1000 سيّارة، فأجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدَّدة على الطريق في هذا اليوم.

مهارات التفكير العليا

18 تبرير: إذا كان: $X \sim N(\mu , \sigma^2)$، وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x = 14$ هي $z = 3.2$، والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X.

19 تحدٍّ: إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 73، وانحرافه المعياري 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقلُّ مُعدَّل يجعل الطلبة أهلًا للتكريم؟

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $X \sim B(4, 0.4)$، فإنَّ: $P(X = 3)$ يساوي:

a) 0.1536 b) 0.0384

c) 0.064 d) 0.3456

2 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معامله $n = 320$، وتوقُّعه 60، فإنَّ المعامل p هو:

a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{13}{16}$

c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{16}$

3 إذا كان: $X \sim B(8, 0.1)$، فإنَّ: $P(X < 2)$ إلى أقرب 4 منازل عشرية يساوي:

a) 0.3826 b) 0.8131

c) 0.4305 d) 0.1488

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان توقُّعه 8، وتباينه $\frac{20}{3}$، فإنَّ المعامل n هو:

a) 32 b) 64

c) 56 d) 48

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68% b) 95%

c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كانت علامات 2000 طالب في أحد الاختبارات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 83، وانحرافه المعياري 4، فإنَّ عدد الطلبة الذين تقلُّ علاماتهم عن 80 هو تقريبًا:

a) 453 b) 1547

c) 1567 d) 715

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 $P(X = 4)$ 8 $P(3 < X \leq 5)$

9 $P(X > 4)$ 10 $E(X)$

إذا كان: $X \sim B(6, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X = 2)$ 12 $P(X > 4)$

13 $P(2 < X \leq 4)$ 14 $E(X)$

أجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

15 $P(Z < 1.93)$ 16 $P(Z < 0.72)$

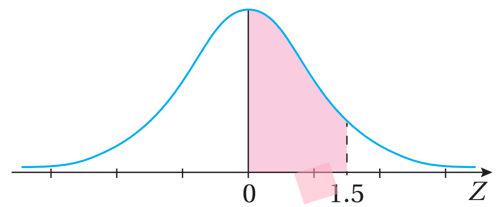
17 $P(Z > -1.04)$ 18 $P(-1.7 < Z < 3.3)$

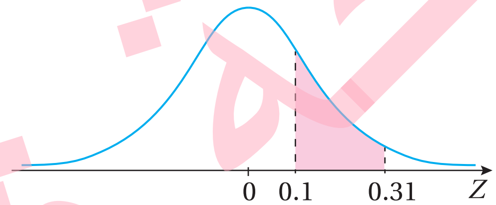
إذا كان: $X \sim N(55, 16)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

19 $P(X \leq 50)$ 20 $P(50 < X < 58)$

21 $P(56 < X < 59)$ 22 $P(X > 55)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

23 

24 

25 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشوائيًّا من إنتاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمام منزلها. إذا كان احتمال أنْ تمرَّ أيُّ سيّارة زرقاء من أمام منزلها هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 احتمال عدم مرور أيِّ سيّارة زرقاء من بين أوَّل 5 سيّارات مَرَّت أمام المنزل.

27 احتمال مرور أكثر من 3 سيّارات حتّى شاهدت نور أوَّل سيّارة زرقاء.

أجد القيمة a التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

28 $P(Z < a) = 0.638$

29 $P(Z > a) = 0.6$

تعبئة: **يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ الحِمَّص في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 250 g، وانحرافه المعياري 4 g:**

30 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 260 g

31 أجد نسبة أكياس الحِمَّص التي تتراوح كتلة كلٍّ منها بين 240 g و 250 g

في دراسة لإحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين يستعملون هواتفهم المحمولة لإجراء مكالمتين فقط يوميًّا. إذا اختير 20 شخصًا من المشتركين عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 احتمال أنْ يُجْري 4 منهم فقط مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

33 احتمال أنْ يُجْري اثنان منهم على الأقلِّ مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

34 تُنتِج إحدى الشركات قوارير زيت، ويُفترَض أنْ تحوي كل قارورة منها 500 mL من الزيت، وأنْ يتبع حجم الزيت في هذه القوارير توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 506 mL، وانحرافه المعياري 3 mL. إذا احتوى صندوق على 100 قارورة توضَع عشوائيًّا، فأجد عدد القوارير في هذا الصندوق التي تحوي كلٌّ منها أقلَّ من 500 mL من الزيت.

الوحدة 6

الإحصاء الاستدلالي
Inferential Statistics

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ الإحصاء الاستدلالي أداة محورية في عالَم الأعمال؛ إذ إنَّه يُمكِّن الشركات من اتِّخاذ قرارات دقيقة مبنية على تحليل بيانات العيِّنة بدلًا من التخمين. كذلك يُستعمَل الإحصاء الاستدلالي للتنبُّؤ باتجاهات السوق، وتقدير مستويات الطلب، وقياس فعّالية الحملات التسويقية، إلى جانب الإسهام في تحليل الأداء المالي، وتقدير العوائد المستقبلية؛ ما يُقلِّل من نسبة الخطأ في عمليات التخطيط واتِّخاذ القرار. وهو يُستعمَل أيضًا لاختبار الفرضيات وتفسير النتائج ضمن سياق أوسع. ومن ثَمَّ، فإنَّ استعمال الإحصاء الاستدلالي يُعزِّز كفاءة الأداء، ويُوفِّر مزايا تنافسية في بيئة الأعمال المُتغيِّرة.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ كيفية تمييز المجتمع والعيِّنة، والمقصود بكلٍّ منهما.
- ✓ إيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة تُمثِّل مجتمعًا إحصائيًّا.
- ✓ إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي غير المعياري.
- ✓ إيجاد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ كيفية توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، وإيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.
- ◄ استعمال نظرية النهاية المركزية لإيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي لعيِّنة حجمها أكبر من 30، وهي مأخوذة من مجتمع توزيعه غير معلوم لأيِّ قيمة.
- ◄ توظيف عامل تصحيح الاستمرارية في إيجاد احتمال أنْ يأخذ المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين المُقرَّب إلى توزيع طبيعي قِيَمًا بعينها.
- ◄ إيجاد فترات الثقة للوسط الحسابي للمجتمع إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع معلومًا.
- ◄ إجراء اختبارات الأهمية الثلاثة.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (30–27) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات
Distribution of Samples Means

فكرة الدرس

- تعرُّف المجتمع، والعيِّنة، وأنواع العيِّنات العشوائية.
- تعرُّف الإحصائي والمَعلَمة، وتحديد كلٍّ منهما.
- تعرُّف توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، وإيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

المصطلحات

المجتمع، التَّعداد، العيِّنة، المُعايَنة، التحيُّز، العيِّنة العشوائية، العيِّنة العشوائية البسيطة، العيِّنة العشوائية المُنتظَمة، العيِّنة العشوائية الطبقية، الإحصائي، المَعلَمة، الاستدلال الإحصائي، الوسط الحسابي للعيِّنة، تباين العيِّنة، توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، الخطأ المعياري للوسط الحسابي، خطأ المُعايَنة، نظرية النهاية المركزية.

مسألة اليوم

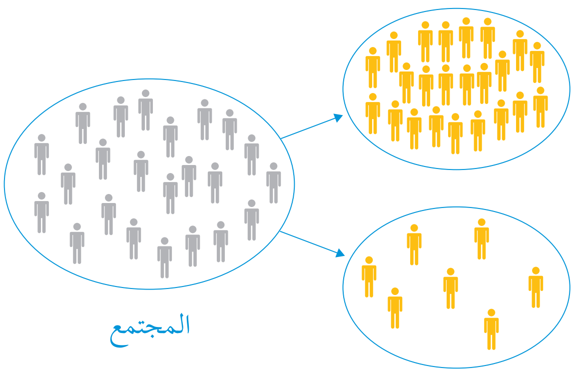
يريد خليل تحديد أكثر الرياضات تفضيلًا لدى سُكّان المدينة التي يقطن فيها، فسأل عن ذلك 100 شخص حضروا للتوِّ مباراة لكرة السَّلَّة. هل تُعَدُّ البيانات التي سيحصل عليها خليل مُمثِّلة لسُكّان المدينة؟

المجتمع، والعيِّنة، والمُعايَنة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ **المجتمع** (population) مجموعة من العناصر (مثل: الأشخاص، والحيوانات، والأشياء) تشترك في واحدة أو أكثر من الخصائص، وأنَّها تُستهدَف بالدراسة لغرض مُعيَّن، أو استقصاء أمر ما بخصوصها.

قد يكون من الضروري أحيانًا الحصول على معلومة ما أو أكثر عن كل عضو في المجتمع، وعندئذٍ يُستعمَل **التَّعداد** (census) طريقةً لجمع تلك المعلومات. أمّا إذا كان المجتمع كبيرًا، فإنَّ التَّعداد يكون مُستهلِكًا للوقت ومُكلِّفًا؛ لذا يكتفى في هذه الحالة باختيار مجموعة صغيرة من المجتمع لتُمثِّله عشوائيًّا، في ما يُسمّى **العيِّنة** (sample).

تُعرَف عملية أخذ العيِّنات من المجتمع **بالمُعايَنة** (sampling)، وهي عملية إحصائية مُهِمَّة تُستعمَل لاستخلاص استنتاجات عن المجتمع كاملًا؛ فإذا تمَّت عملية المُعايَنة بعناية، فإنَّها ستُمثِّل المجتمع تمثيلًا دقيقًا، وتُوفِّر نتائج موثوقة.



تُستعمَل غالبًا البيانات التي تنتج من العيِّنات لتقدير خاصية من خصائص المجتمع؛ لذا يجب اختيار العيِّنة بحيث تكون مُمثِّلة للمجتمع بأكمله، وإدراك أنَّه كلَّما زاد حجم العيِّنة أو زاد عدد العيِّنات المأخوذة، اقتربت العيِّنة من تمثيل المجتمع بدِقَّة أكبر.

أمّا **التحيُّز** (bias) فهو خطأ يؤدّي إلى تمثيل غير صحيح للمجتمع؛ فإذا كانت العيِّنة منحازة إلى فئة مُعيَّنة من المجتمع، فإنَّها ستقود إلى استنتاجات مُتحيِّزة.

أتذكَّر

يُطلَق على عدد أفراد المجتمع الذين تحويهم العيِّنة اسم حجم العيِّنة.

مثال 1 : من الحياة

أُحدِّد إذا كانت كل عيِّنة ممّا يأتي مُتحيِّزة أم لا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

1) صِحَّة: **سؤال كل خامس شخص يزور صالة رياضية عن عاداته الصِّحِّية.**

العيِّنة مُتحيِّزة؛ لأنَّ المشاركين فيها مختارون من صالة رياضية، ومن ثَمَّ يُحتمَل أنْ تكون لديهم عادات صِحِّية جيِّدة. وهذا لا يعكس واقع المجتمع.

2) صِحَّة: **سؤال كل خامس شخص يزور مركز تسوُّق عن عاداته الغذائية.**

العيِّنة غير مُتحيِّزة؛ لأنَّ المشاركين فيها اختيروا عشوائيًّا من مركز تسوُّق؛ ما يعني تمثيلًا أفضلَ لآراء المجتمع عن العادات الغذائية؛ لأنَّ معظم أفراد المجتمع يرتادون مراكز التسوُّق.

أتعلَّم

أُلاحِظ الفرق الدقيق بين الفرع 1 والفرع 2 من المثال 1؛ فبالرغم من أنَّ جوهر العمليتين مُتشابِه، فإنَّ عيِّنة الفرع 1 ستُفْضي إلى نتائج غير دقيقة؛ لأنَّ فئة مرتادي الأندية الرياضية يتبعون غالبًا عادات صِحِّية جيِّدة.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل عيِّنة ممّا يأتي مُتحيِّزة أم لا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

a) صِحَّة: استقصاء باحث آراء 30 شخصًا في مستشفى خاص عن جودة الرعاية الصِّحِّية في المدينة.

b) اقتصاد: إجراء شركة اتصالات دراسة لتعرُّف درجة رضا العملاء عن خدماتها، وذلك بمسح كل ثالث شخص يدخل أحد فروعها.

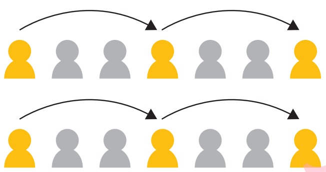
العيِّنات العشوائية

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّه يُمكِن استعمال المُعايَنة لاستنتاج معلومات عن المجتمع كلِّه؛ ما يُحتِّم اختيار العيِّنة بعناية لضمان تمثيل المجتمع من دون تحيُّز. من طرائق المُعايَنة الشائعة، أخذ **عيِّنة عشوائية** (random sample) من المجتمع، تكون مُمثِّلة لجميع أفراده من دون تفضيل فئة مُعيَّنة على أُخرى. وفي ما يأتي ثلاثة أنواع شائعة الاستعمال من العيِّنات العشوائية:

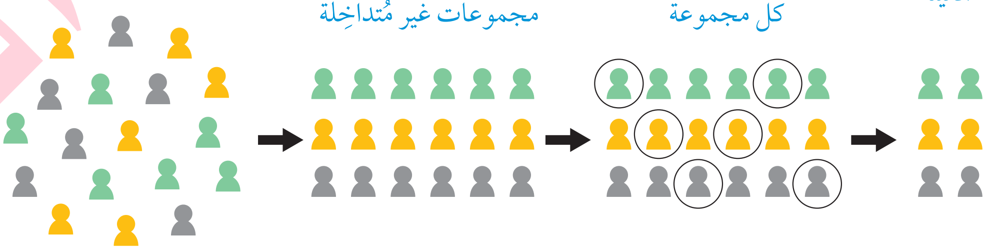
- **العيِّنة العشوائية البسيطة** (simple random sample): يتيح هذا النوع لكل فرد في المجتمع أنْ يحظى بفرصة مُتساوِية ليكون جزءًا من العيِّنة المختارة. فمثلًا، إذا رغب مدير حديقة للحيوان استقصاء درجة رضا الزُّوّار عن الحديقة، فقد يختار عيِّنة عشوائية بسيطة مِمَّنْ يزورون الحديقة للإجابة عن أسئلة الاستطلاع، وذلك بكتابة أرقام تذاكر الزُّوّار على بطاقات، ثمَّ وضعها في وعاء؛ ليتمَّ بعد ذلك سحب 5 أرقام عشوائيًّا.


عيِّنة عشوائية بسيطة
: العيِّنة

- **العيِّنة العشوائية المُنتظَمة** (systematic random sample): يُختار أفراد العيِّنة في هذا النوع وَفقًا لفترات مُحدَّدة من نقطة بداية عشوائية. فمثلًا، يُختار كل ثالث زائر للحديقة بَدْءًا من نقطة بداية عشوائية.


عيِّنة عشوائية مُنتظَمة
: العيِّنة

- **العيِّنة العشوائية الطبقية** (stratified random sample): يراعى في هذا النوع أوَّلًا تقسيم المجتمع إلى مجموعات غير مُتداخِلة، ثمَّ اختيار أفراد من كل مجموعة عشوائيًّا. فمثلًا، يُقسَّم زُوّار الحديقة إلى مجموعات بحسب الفئات العمرية (الأطفال، المُراهِقون، البالغون، كِبار السِّنِّ)، ثمَّ يُختار من كل فئة عددٌ مُعيَّن من الزُّوّار عشوائيًّا لضمان التمثيل الصحيح.



أتعلَّم

تمتاز العيِّنة المختارة عشوائيًّا بأنَّها غير مُتحيِّزة؛ لأنَّ لكل فرد في المجتمع الاحتمال نفسه في الاختيار.

أتعلَّم

لا يُشترَط في العيِّنة العشوائية الطبقية اختيارُ العدد نفسه من كل فئة؛ إذ يُمكِن اختيار عدد يتناسب مع حجم كل فئة، أو اختيار العدد نفسه من كل فئة.

مثال 2 : من الحياة

صِحَّة: اختير عشوائيًّا خمســة مرضى مقيمين من كل قسم طبي في أحد المستشفيات للإجابة عن أسئلة استبانة تتعلّق بجودة الرعاية الصِّحِّية المُقدَّمة في المستشفى:

1 أُحدِّد العيِّنة والمجتمع.

- العيِّنة: المرضى الخمسة الذين اختيروا عشوائيًّا من كل قسم.
- المجتمع: جميع المرضى في المستشفى.

2 هل العيِّنة العشوائية المختارة بسيطة، أم مُنتظَمة، أم طبقية؟ أُبرِّر إجابتي.

العيِّنة العشـوائية المختارة طبقيـة؛ لأنَّ المرضى وُزِّعوا إلى فئات (الأقسـام الطبية) قبل بَدْء الاختيار العشوائي.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد العيِّنة والمجتمع في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كانت العيِّنة العشوائية المختارة بسيطة، أم مُنتظَمة، أم طبقية، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

a) اسـتقصاء مدير أحد المراكز التجارية درجـة رضا العملاء عن الخدمـات التي يُقدِّمها المركز؛ بأنْ يختار أحد العملاء عشـوائيًّا كل ساعة، بَدْءًا بوقت غير مُحدَّد، ثمَّ يطرح عليه بعض الأسئلة.

b) وضع اسـتبانة عند مدخل مَعرِض فني، ثمَّ اختيار 50 زائرًا بصورة عشـوائية للإجابة عن أسئلتها.

الإحصائيات والمَعلَمات

الإحصائـي (statistic) هو مقيـاس (قيمة) يَصِف إحـدى خصائص العيِّنة. أمّـا **المَعلَمة** (parameter) فهي مقياس يَصِف إحدى خصائص المجتمع.

تُسـتعمَل قيمة الإحصائي لوضع اسـتنتاجات عن قيمة المَعلَمة في عملية تُسمّى **الاستدلال الإحصائي** (statistical inference)؛ ذلك أنَّ حسـاب المَعلَمة لا يكون سهلًا في كثير من الأحيان، وبخاصة إذا كان حجم المجتمع كبيرًا.

أتعلَّم

يُمكِن لقيمـة الإحصائي أنْ تتغيَّـر مـن عيِّنة إلى أُخرى، لكنَّ قيمة المَعلَمة لا تتغيَّـر؛ لأنَّهـا تُمثِّـل المجتمع كاملًا.

مثال 3

أُحدِّد العيِّنة والمجتمع في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَصِف الإحصائي والمَعلَمة:

1 **اختيرت عيِّنة عشوائية طبقية تضمُّ 15 موظفًا من أقسام مختلفة في شركة مُتخصِّصة في مجال الأسهم والسندات، ثمَّ حُسِب الوسيط لرواتب هؤلاء الموظفين:**

- **العيِّنة:** الموظفون الذين اختيروا عشوائيًّا من الأقسام المختلفة للشركة.
- **المجتمع:** جميع موظفي الشركة.
- **الإحصائي:** وسيط رواتب الموظفين في العيِّنة.
- **المَعلَمة:** وسيط رواتب جميع موظفي الشركة.

2 **اختيرت عيِّنة عشوائية بسيطة تضمُّ 1000 طالب من إحدى الجامعات، ثمَّ حُسِب تباين مُعدَّل ذكائهم بواسطة اختبار أُعِدَّ لهذا الغرض:**

- **العيِّنة:** الطلبة الذين اختيروا عشوائيًّا من الجامعة.
- **المجتمع:** جميع طلبة الجامعة.
- **الإحصائي:** تباين مُعدَّل ذكاء الطلبة في العيِّنة.
- **المَعلَمة:** تباين مُعدَّل ذكاء جميع طلبة الجامعة.

معلومة

تقيس اختبارات الذكاء (IQ) قدرات عقلية، مثل الاستدلال والفهم والذاكرة، ويُحدَّد المُتوسِّط فيها عند 100 درجة، وهي تُستعمَل للكشف عن القدرات الاستثنائية أو الصعوبات المعرفية، لكنَّها لا تعكس الإبداع أو الذكاء العاطفي.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد العيِّنة والمجتمع في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَصِف الإحصائي والمَعلَمة:

a) اختيرت عيِّنة عشوائية بسيطة تضمُّ 13 طالبًا من طلبة الصف الثاني عشر في محافظة المفرق، ثمَّ حُسِب الوسط الحسابي لعدد ساعات دراسة هؤلاء الطلبة.

b) اختيرت عيِّنة عشوائية مُنتظَمة من خطٍّ إنتاج نوع من الفطائر المُغلَّفة التي يُنتِجها مصنع في أحد الأيام، ثمَّ حُسِب مدى كتل العيِّنة.

الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعيِّنة

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّ القيمة التي تَصِف إحدى خصائص مجتمع ما (مثل الوسط الحسابي) تُسمّى المَعلَمة. ولكنْ، إذا حُسِبت هذه القيمة لعيِّنة من المجتمع، فإنَّها تُسمّى الإحصائي.

يُرمَز إلى **الوسط الحسابي للعيِّنة** (sample mean)، الذي يُستعمَل لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع، بالرمز $\bar{x}$، ويُقرَأ: x بار، ويُمكِن إيجاده باستعمال الصيغة التي يُبيِّنها صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

مفهوم أساسي — **الوسط الحسابي للعيِّنة**

إذا كانت البيانات: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثِّل عيِّنة عشوائية حجمها n، فإنَّه يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي للعيِّنة $\bar{x}$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

أمّا **تباين العيِّنة** (sample variance)، الذي يُستعمَل لتقدير تباين المجتمع، فيُرمَز إليه بالرمز s^2، ويُمكِن إيجاده باستعمال إحدى الصيغتين اللتين يُبيِّنهما صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

مفهوم أساسي — **التباين والانحراف المعياري للعيِّنة**

إذا كانت البيانات: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثِّل عيِّنة عشوائية، حجمها n، ووسطها الحسابي $\bar{x}$، فإنَّه يُمكِن إيجاد تباين العيِّنة s^2 باستعمال إحدى الصيغتين الآتيتين:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{or} \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

ويكون الانحراف المعياري للعيِّنة هو الجذر التربيعي لتباين العيِّنة.

أتذكَّر

يُستعمَل الرمز μ للدلالة على الوسط الحسابي للمجتمع، ويُقرَأ: ميو.

أتذكَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مقاييس التشتُّت تُستعمَل لوصف مقدار تشتُّت البيانات وتباعدها. ومن هذه المقاييس: التباين، والانحراف المعياري. وفي هذا السياق، يُستعمَل الرمز σ^2 للدلالة على التباين للمجتمع، ويُقرَأ: سيجما تربيع.

مثال 4 : من الحياة

تسوُّق: يرغب مركز تسوُّق في تحديد مُدَّة بقاء الزبائن في المقهى. وتحقيقًا لهذا الغرض؛ أخذ في يوم مُعيَّن عيِّنة عشوائية تضمُّ 10 زبائن، ثمَّ دوَّن الزمن (إلى أقرب دقيقة) الذي قضاه كلٌّ منهم في المركز. وكانت الأوقات التي دوَّنها مالك المقهى كما يأتي:

31, 20, 52, 46, 28, 39, 37, 43, 17, 48

رموز رياضية

عند كتابة $\sum x_i$، فإنَّ المقصود بذلك هو $\sum_{i=1}^{n} x_i$، حيث n عدد البيانات.

1 أجد الوسط الحسابي للعيِّنة.

صيغة الوسط الحسابي للعيِّنة $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

بالتعويض $= \frac{31+20+52+46+28+39+37+43+17+48}{10}$

بالتبسيط $= 36.1$

2 أجد تباين العيِّنة.

الخطوة 1: أحسُب مُربَّع كل مُشاهَدة، ثمَّ أُنشِئ جدولًا أُنظِّم فيه القِيَم.

x	x^2
31	961
20	400
52	2704
46	2116
28	784
39	1521
37	1369
43	1849
17	289
48	2304
المجموع	14297

الخطوة 2: أُعوِّض القِيَم الناتجة في صيغة التباين.

صيغة التباين $s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$

بتعويض $\Sigma x_i^2 = 14297, \bar{x} = 36.1$ $= \frac{14297 - 10(36.1)^2}{9}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 140.54

إذن، تباين العيِّنة هو: 140.54

3 أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

بما أنَّ الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، فإنَّ: $s = \sqrt{140.54} \approx 11.85$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الوسط الحسابي للعيِّنة عدد غير صحيح؛ لذا يُفضَّل إيجاد تباين العيِّنة باستعمال الصيغة الآتية:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

أتذكَّر

عند إيجاد تباين المجتمع، فإنَّني أستعمل المعادلة نفسها لتباين العيِّنة، لكنَّني أَقسِم على n بدلًا من $n-1$؛ أيْ إنَّ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}$$

أتحقَّق من فهمي

رياضة: ترغب مُدرِّبة في صالة رياضية أنْ تتعرَّف الوقت (بالدقائق) الذي تقضيه المُتدرِّبات في أداء التمارين اليومية. وتحقيقًا لهذا الغرض؛ أخذت في يوم مُعيَّن عيِّنة عشوائية تضمُّ 8 مُتدرِّبات، ثمَّ دوَّنت الزمن (إلى أقرب دقيقة) الذي استغرقته كلٌّ منهن في أداء التمارين. وكانت الأوقات التي دوَّنتها المُدرِّبة كما يأتي:

68, 72, 78, 85, 90, 75, 80, 70

a) أجد الوسط الحسابي للعيِّنة.

b) أجد تباين العيِّنة.

c) أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

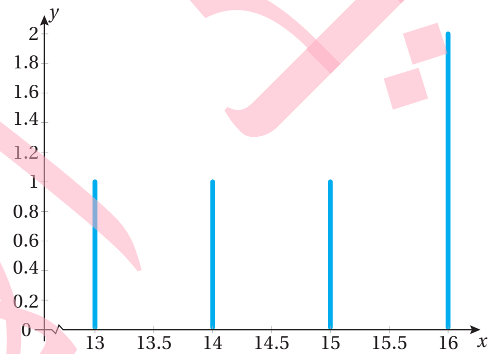
توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد الوسط الحسابي لعيِّنة مأخوذة من المجتمع، وقد لاحظْتُ أنَّ الوسط الحسابي يختلف تبعًا لاختلاف العيِّنة.

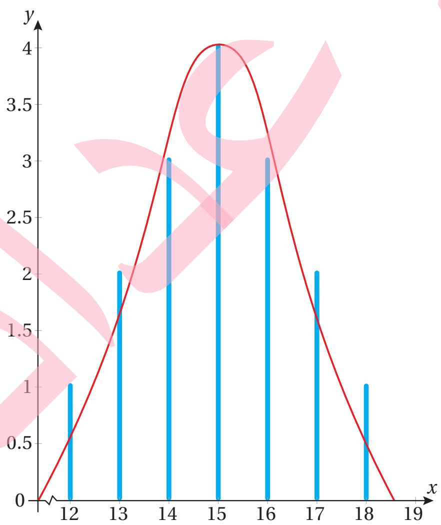
يُمكِن تقدير قيمة الوسط الحسابي للمجتمع باستعمال ما يُسمّى **توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات** (distribution of samples means)؛ وهو توزيعٌ قِيَمُهُ الأوساط الحسابية لعيِّنات عشوائية مُتساوِية في الحجم، ومأخوذة من المجتمع. تشير كلمة (توزيع) إلى كيفية تَوزُّع (أو تنظيم) قِيَم الأوساط الحسابية للعيِّنات، وعدد مَرّات تكرار كل قيمة؛ فإذا افترضنا أنَّ قِيَم الأوساط الحسابية تُمثِّل مُتغيِّرًا عشوائيًّا، فإنَّه يُمكِن أنْ يُرمَز إلى هذا المُتغيِّر بالرمز ($\overline{X}$).

يُبيِّن الجدول الآتي الأوساط الحسابية لخمس عيِّنات عشوائية، حجم كلٍّ منها 2، وقد أُخِذت مع الإرجاع من مجتمع، وسطه الحسابي 15، وانحرافه المعياري 2.24، وهو يتكوَّن (أي المجتمع) من القِيَم الآتية: 18 ,16 ,14 ,12، في حين يُبيِّن التمثيل البياني المُعطى شكل التوزيع لهذه الأوساط الحسابية.

$\bar{x}$	العيِّنة
13	12, 14
14	12, 16
16	16, 16
16	14, 18
15	18, 12



أُلاحِظ من التمثيل البياني أعلاه أنَّ شكل توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات العشوائية الخمس غير قريب من شكل التوزيع الطبيعي. ولكنْ، إذا استُخرِجت جميع العيِّنات العشوائية من المجتمع، التي يبلغ عددها 16 عيِّنة، وحجم كلٍّ منها 2، فإنَّ شكل توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات العشوائية سيقترب من شكل التوزيع الطبيعي كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور.



أتذكَّر

المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر يأخذ قِيَمًا عددية تعتمد على نواتج تجربة عشوائية.

أتعلَّم

يُمثِّل المحور y في التمثيل البياني عدد العيِّنات التي لديها وسط حسابي مُعيَّن على المحور x.

أتذكَّر

للتوزيع الطبيعي شكل الجرس المُتماثِل حول الوسط الحسابي.

أُفكِّر

لماذا كان عدد هذه العيِّنات 16؟

في مُقابِل ذلك، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي للأوساط الحسابية لجميع العيِّنات المُحتمَلة من المجتمع، التي حجم كلٍّ منها 2، كما يأتي:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{12 + 13 + \cdots + 18}{16} = \frac{240}{16} = 15$$

أُلاحِظ من هذه النتيجة أنَّ قيمة الوسط الحسابي للمجتمع مُساوِية لقيمة الوسط الحسابي للأوساط الحسابية لجميع العيِّنات المُحتمَلة من المجتمع. وبعبارة أُخرى، فإنَّ الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات $\mu_{\bar{x}} = \mu$.

كذلك يُمكِن إيجاد الانحراف المعياري للأوساط الحسابية لجميع العيِّنات المُحتمَلة من المجتمع، التي حجم كلٍّ منها 2، بإيجاد قيمة الانحراف المعياري (2.24) للمجتمع مقسومةً على الجذر التربيعي لحجم العيِّنة (2):

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(12-15)^2 + (13-15)^2 + \cdots + (18-15)^2}{16}} \approx 1.58 \quad , \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.24}{\sqrt{2}} \approx 1.58$$

أُلاحِظ من هاتين النتيجتين أنَّ قيمة الانحراف المعياري للأوساط الحسابية لجميع العيِّنات المُحتمَلة (التي لها حجم مُعيَّن) من المجتمع مُساوِية لقيمة الانحراف المعياري للمجتمع، ومقسومة على الجذر التربيعي لحجم العيِّنة. وبما أنَّ هاتين القيمتين مُتساوِيتان، فإنَّه يُمكِن إيجاد الانحراف المعياري لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، الذي يُعرَف أيضًا باسم **الخطأ المعياري للوسط الحسابي** (standard error of the mean)، وذلك باستعمال الصيغة الآتية: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

تأسيسًا على ما سبق، فإنَّ العيِّنات المختارة عشوائيًّا سيكون لها أوساط حسابية مختلفة عن الوسط الحسابي للمجتمع. ويُعْزى هذا الاختلاف إلى **خطأ المُعايَنة** (sampling error) الذي يحدث بسبب عدم تمثيل العيِّنة للمجتمع بصورة كاملة. ولكنْ، إذا أُخِذت جميع العيِّنات المُحتمَلة ذات الحجم n من مجتمع، وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ، فإنَّ الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات $\mu_{\bar{x}}$ سيكون مُساوِيًا للوسط الحسابي للمجتمع μ، وانحرافه المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ سيكون مُساوِيًا لـ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

في ما يختصُّ بشكل توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، فإنَّ **نظرية النهاية المركزية** (the central limit theorem) تنصُّ على أنَّه كلَّما كان حجم العيِّنة n كبيرًا، اقترب شكل توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات من شكل التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن شكل التوزيع الأصلي.

أتعلَّم

لإيجاد $\mu_{\bar{x}}$، فإنَّني أجد كل العيِّنات بحجم ثابت، ثمَّ أجد الوسط الحسابي لكل عيِّنة، ثمَّ أجد الوسط الحسابي لهذه الأوساط الحسابية.

أتعلَّم

لإيجاد $\sigma^2_{\bar{x}}$، فإنَّني أَقسِم على 16؛ وهو حجم المجتمع بأكمله في هذه الحالة.

أتعلَّم

يشير مصطلح حجم العيِّنة إلى الحجم الثابت لكلٍّ من العيِّنات التي أُخِذت من المجتمع.

مفهوم أساسي **نظرية النهاية المركزية**

إذا أُخِـذت عيِّنات عشـوائية كبيرة، حجم كلٍّ منهـا 30 أو أكثر، من مجتمع، وسـطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ، فإنَّ شـكل توزيع الأوساط الحسابية لهذه العيِّنات سـيكون قريبًا من شكل التوزيع الطبيعي، وسيكون الوسط الحسابي لهذا التوزيع هو μ، والانحراف المعياري له $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$؛ أيْ إنَّ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$، حيث $\bar{X}$ المُتغيِّر العشوائي لتوزيع الأوساط الحسابية لهذه العيِّنات.

مثال 5 : من الحياة

معلومة

عنـد تعـرُّض أوراق شـجر البلّوط لهجوم من الحشرات مثل اليرقات، فـإنَّ هـذه الأوراق لا تكتفي فقـط بالدفاع عن نفسها، وإنَّما تُفرِز روائح مُميَّزة تجذب الحشرات المُفترِسـة التـي تتغذّى باليرقات.

أشـجار: **أشـارت بعض الدراسـات إلى أنَّ الوسط الحسـابي لأطوال أوراق شجرة البلّوط 86.2 mm، وأنَّ الانحـراف المعياري لها 27.6 mm. إذا أُخِذت عيِّنات عشـوائية من أوراق شـجر البلّوط، حجم كلٍّ منها 40، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

1 الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات.

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ صيغة الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنة

$= 86.2$ بتعويض $\mu = 86.2$

2 الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ صيغة الخطأ المعياري للوسط الحسابي

$= \frac{27.6}{\sqrt{40}}$ بتعويض $\sigma = 27.6, n = 40$

≈ 4.36 باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقَّق من فهمي

زراعة: أشارت دراســة إلى أنَّ الوسط الحسابي لكتل حبّات التفّاح في إحدى المَزارع 96.3 g، وأنَّ الانحراف المعياري لها 5.2 g. إذا أُخِذت عيِّنات عشــوائية من حبّات التفّاح في هذه المزرعة، حجم كلٍّ منها 30، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات.

b) الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل عيِّنة ممّا يأتي مُتحيِّزة أم لا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

1 مُقابَلة إدارة بلدية المدينة كل عاشــر شخص يخرج من مَحطَّة الحافلات الرئيسة لتعرُّف درجة وعي السُّكّان بأهمية الحفاظ على النظافة العامة.

2 إعداد إدارة مدرســة أساسية استبانة عن مدى فعّالية التعليم الإلكتروني في المدرسة، ثمَّ الطلب إلى 20 طالبًا مُتفوِّقًا الإجابة عن أسئلة الاستبانة.

3 اختيار باحث عيِّنة عشوائية تضمُّ 100 شخص من قائمة السُّكّان المُسجَّلين في المدينة، ثمَّ الاتصال بهم لتعرُّف مدى اعتمادهم على الوجبات الجاهزة في نظامهم الغذائي.

4 إعداد دائرة النقل في إحدى المدن اســتبانة تهــدف إلى تعرُّف درجة رضا المواطنين عــن خدمات الحافلات، ثمَّ الطلب إلى أفراد عيِّنة اختيروا عشوائيًّا من سجلّات سُكّان المدينة الإجابة عن أسئلة هذه الاستبانة.

5 ســعي باحث إلى تقييم درجة رضا السُّيّاح عن الخدمات المُقدَّمة أثناء رحلتهم السياحية إلى موقع أثري، بسؤاله عن ذلك 25 زائرًا من المقيمين في الفندق القريب من الموقع الأثري.

أُحدِّد العيِّنة والمجتمع في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كانت العيِّنة العشــوائية المختارة بسيطة، أم مُنتظَمة، أم طبقية، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

6 قرَّر مدير مصنع اســتقصاء درجة التزام العُمّال بتعليمات السلامة العامة، فبدأ بمراقبة أوَّل عامل يدخل المصنع عند الساعة الثامنة صباحًا، ثمَّ كل عاشر عامل يدخل بعده.

7 اختار باحث 100 طالب من إحدى الجامعات عشوائيًّا من قائمة أرقامهم الجامعية لدراسة عادات القراءة لديهم.

8 أرادت وزارة الصِّحَّة دراســة العادات الغذائية لطلبة المدارس في إحدى المدن، فصنَّفت المراحل التي يَدْرس فيها الطلبة إلى ثلاث مراحل دراســية (ابتدائية، أساسية، ثانوية)، ثمَّ اختارت عيِّنة عشوائية من كل مرحلة بما يتناسب مع عدد الطلبة فيها.

أُحدِّد العيِّنة والمجتمع في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَصِف الإحصائي والمَعلَمة:

9 أُجرِي مســح شمل عيِّنة عشوائية طبقية من العاملين في مستشفى حكومي، وتضمَّن تقسيم العاملين إلى مجموعات بحسب مهنهم (أطبّاء، مُمرِّضون، إداريون)، ثمَّ حُسِب الانحراف المعياري لعدد ساعات العمل الأسبوعية.

10 اختيرت عيِّنة عشوائية مُنتظَمة تضمُّ المَركَبات الخارجة من مَحطَّة لصيانة السيّارات، وقد دُوِّنت أعمار المَركَبات في العيِّنة، ثمَّ حُسِب الوسيط.

11 اختيرت عيِّنة عشوائية بسيطة تضمُّ زُوّار أحد المراكز التجارية في عطلة نهاية الأسبوع، وقد دُوِّنت المبالغ التي أنفقها أفراد العيِّنة، ثمَّ حُسِب المدى.

مبيعات: أراد مدير المبيعات في شــركة تجزئة تقدير عدد الوحدات التي يبيعهــا كل موظف مبيعات يوميًّا. وتحقيقًا لهذا الغرض؛ جمع بيانات من عيِّنة عشوائية تضمُّ 8 موظفين. وكانت الأعداد التي دوَّنها مدير المبيعات كما يأتي:

41, 36, 39, 42, 45, 38, 40, 34

12 أجد الوسط الحسابي للعيِّنة.

13 أجد تباين العيِّنة.

14 أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

إنتاج: أرادت شــركة تعمل في مجال صناعة زجاجات العصير أنْ تُحلِّــل مدى التفاوت في كمية العصير (بالملّيلتــر) التــي تُعبَّأ بالزجاجــة الواحدة. وتحقيقًــا لهذا الغرض؛ أُخِــذت عيِّنة عشــوائية مُكوَّنة من 10 زجاجات، ثمَّ دُوِّنت الكميات التي تحويها هذه الزجاجات، وكانت على النحو الآتي:

504, 499, 493, 507, 500, 495, 502, 498, 505, 490

15 أجد الوسط الحسابي للعيِّنة.

16 أجد تباين العيِّنة.

17 أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

أُخِذت عيِّنة عشوائية حجمها 20 مُشاهَدة من أحد المجتمعات، وقد أمكن الحصول منها على المعلومات الإحصائية الآتية:

$$\sum x_i = 110, \sum x_i^2 = 900$$

18 أجد الوسط الحسابي للعيِّنة.

19 أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

بلغ الوسط الحسابي لأحد المجتمعات 6، والانحراف المعياري له 2. إذا أُخِذت عيِّنات عشوائية من هذا المجتمع، حجم كلٍّ منها 50، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

20 الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات.

21 الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

مصابيح: يبلغ الوسط الحسابي لمُدَّة عمل المصابيح الكهربائية التي تُنتِجها إحدى الشركات 450 ساعة، في حين يبلغ الانحراف المعياري لها 20 ساعة. إذا أُخِذت عيِّنات عشوائية من هذه المصابيح، حجم كلٍّ منها 35، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

22 الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات.

23 الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

24 إذا كان لدينا مجموعة عيِّنات من مجتمع مُعيَّن، حجم كلٍّ منها 40، وبلغ الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية لها 82.5، وكان التباين لهذا التوزيع 6.25، فأجد الوسط الحسابي والتباين للمجتمع الأصلي الذي أُخِذت منه هذه العيِّنات.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أجرت إحدى شركات الاتصالات استطلاعًا للرأي شمل عملاءها، وهدف إلى تحسين مستوى الخدمات التي تُقدِّمها:

25 أُبيِّن السبب الذي يجعل العيِّنة أكثر مُلاءَمة من التَّعداد في هذه الحالة.

26 أُحدِّد الأسباب التي قد تدفع الشركة إلى عدم استعمال عيِّنة عشوائية بسيطة لاستطلاع آراء عملائها.

تبرير: ترغب شركة مُتخصِّصة في إنتاج أغذية الحيوانات الأليفة أنْ تعرف عدد الأشخاص الذين لديهم قِطَط تُفضِّل الطعام الجاف على الطعام الرطب. وتحقيقًا لهذا الغرض؛ أرفقت الشركة 100 استبانة مع مُنتَجات غذائية من الطعام الجاف اختيرت عشوائيًّا، ثمَّ طُلِب إلى الزبائن مِلْء هذه الاستبانات وإعادتها إلى الشركة:

27 أذكر سببين لعدم الحصول على بيانات حقيقية من طريقة الاستطلاع التي استعملتها الشركة.

28 أُبيِّن كيف يُمكِن تحسين الطريقة التي اعتمدتها الشركة بحيث تصبح نتائج الاستطلاع أكثر تمثيلًا.

تبرير: أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا، أم غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

29 العيِّنتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما الوسط الحسابي والانحراف المعياري نفساهما.

30 تُستعمَل مَعلَمات المجتمع لتقدير إحصائيات العيِّنة.

31 استعمال العيِّنات العشوائية البسيطة يضمن عدم وجود أيِّ تحيُّز.

32 تحدٍّ: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $\overline{X}$ على توزيع الأوساط الحسابية لعيِّنات أُخِذت من مجتمع ما، وبلغ حجم كلٍّ منها 30، وحُوِّلت الأوساط الحسابية للعيِّنات وَفقًا للعلاقة: $\overline{Y} = 12\overline{X}$، حيث: $\mu_{\bar{y}} = 48, \sigma_{\bar{y}} = 4.2$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع الأصلي الذي أُخِذت منه هذه العيِّنات.

الدرس 2

التقريب الاحتمالي باستعمال التوزيع الطبيعي

Probability Approximation Using Normal Distribution

فكرة الدرس

- إيجاد احتمال أنْ يأخذ المُتغيِّر العشوائي لتوزيع الأوساط الحسابية لعيِّنات عشوائية مأخوذة من مجتمع طبيعي قِيَمًا بعينها.
- إيجاد احتمال أنْ يأخذ المُتغيِّر العشوائي لتوزيع الأوساط الحسابية لعيِّنات عشوائية أُخِذت من مجتمع وسطه الحسابي معلوم، وبلغ حجم كلٍّ منها 30 أو أكثر، قِيَمًا بعينها.
- تعرُّف شروط تقريب توزيع ذي الحدَّين إلى توزيع طبيعي.
- توظيف عامل الاستمرارية في إيجاد احتمال أنْ يأخذ المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين المُقرَّب إلى توزيع طبيعي قِيَمًا بعينها.

المصطلحات

عامل تصحيح الاستمرارية.

مسألة اليوم

تُنتِج شركةٌ بطّارياتٍ قابلة للشحن، وتتبع مُدَّة العمل المُتوقَّعة لهذه البطّاريات قبل نفاد شحنها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 15.5 ساعة، وانحرافه المعياري 2.1 من الساعة. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية تشمل 25 بطّارية، فما احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لمُدَّة عمل بطّاريات العيِّنة بين 15 ساعة و16 ساعة؟

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي للأوساط الحسابية لعيِّنات مأخوذة من مجتمع طبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية، وأنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها في التجربة.

عند إيجاد الأوساط الحسابية لعيِّنات مُتماثِلة الحجم ومأخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، فإنَّ توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات سيكون قريبًا من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن حجم العيِّنة n.

مفهوم أساسي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي للأوساط الحسابية لعيِّنات مأخوذة من مجتمع طبيعي

إذا كان $\overline{X}$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا لتوزيع الأوساط الحسابية لعيِّنات عشوائية مُتماثِلة الحجم ومأخوذة من مجتمع طبيعي، وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ، فإنَّ شكل توزيع الأوساط الحسابية لهذه العيِّنات سيكون قريبًا من شكل التوزيع الطبيعي. ومنه، فإنَّ:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

أتذكَّر

$$\mu_{\overline{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ومن ثَمَّ يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ $\overline{X}$ قِيَمًا بعينها بنفس الطريقة التي يُمكِن بها إيجاد احتمال أنْ يأخذ أيُّ مُتغيِّر عشوائي طبيعي قِيَمًا بعينها كما تعلَّمْتُ سابقًا؛ إذ يُمكِن إيجاد احتمال أيِّ مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري، وذلك بتحويله إلى مُتغيِّر عشوائي طبيعي معياري. وبالطريقة نفسها، يُمكِن إيجاد احتمال $\overline{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$، وذلك بتحويله إلى $Z \sim N(0, 1)$ كما تعلَّمْتُ في الوحدة السابقة، وعندئذٍ يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمال.

أتذكَّر

يُستعمَل الحرف Z للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري.

مفهوم أساسي إيجاد قيمة z للوسط الحسابي للعيِّنة

يُمكِن إيجاد قيمة z للوسط الحسابي لعيِّنة من مجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا بالصيغة الآتية:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}}$$

حيث:

$\overline{x}$: الوسط الحسابي للعيِّنة.

μ : الوسط الحسابي للمجتمع.

$\sigma_{\overline{x}}$: الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

مثال 1 : من الحياة

إنتاج: يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ القهوة في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 500 g، وانحرافه المعياري 8 g. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 20 كيسًا، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لكتل الأكياس في العيِّنة بين 498 g و 504 g.

بما أنَّ المُتغيِّر العشوائي لكتل أكياس القهوة يتبع توزيعًا طبيعيًّا، فإنَّ توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنة يقترب من التوزيع الطبيعي.

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات، والخطأ المعياري للوسط الحسابي.

صيغة الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات: $\mu_{\bar{x}} = \mu$

بتعويض $\mu = 500$: $= 500$

صيغة الخطأ المعياري للوسط الحسابي: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بتعويض $\sigma = 9.5,\ n = 125$: $= \dfrac{8}{\sqrt{20}}$

باستعمال الآلة الحاسبة: ≈ 1.79

إذن، الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنة يساوي 500، والخطأ المعياري للوسط الحسابي يساوي 1.79 تقريبًا.

الخطوة 2: أجد الاحتمال المطلوب.

أفترض أنَّ المُتغيِّر العشوائي $\bar{X}$ يدلُّ على الوسط الحسابي للعيِّنة. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

صيغة قيمة z للوسط الحسابي للعيِّنة:
$$P(498 < \bar{X} < 504) = P\left(\frac{498-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} < Z < \frac{504-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

بتعويض $\mu = 500,\ \sigma_{\bar{x}} = 1.79$:
$$= P\left(\frac{498-500}{1.79} < Z < \frac{504-500}{1.79}\right)$$

بالتبسيط:
$$= P(-1.12 < Z < 2.23)$$

باستعمال الخصائص:
$$= P(Z < 2.23) - P(Z < -1.12)$$

باستعمال الخصائص:
$$= P(Z < 2.23) - \big(1 - P(Z < 1.12)\big)$$

باستعمال الجدول:
$$= 0.9871 - 1 + 0.8686$$

بالتبسيط:
$$= 0.8557$$

أتذكَّر

عند إيجاد احتمالات التوزيع الطبيعي، لا توجد أهمية للمساواة. فمثلًا: $P(X<a) = P(X \le a)$.

أتحقَّق من فهمي

كتل: تتبع كتل الرجال في أحد المجتمعات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 70 kg، وانحرافه المعياري 15 kg. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية تضمُّ 20 رجلًا، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لكتل الرجال في العيِّنة بين 65 kg و74 kg

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي للأوساط الحسابية لعيِّنات مأخوذة من مجتمع توزيعه غير معلوم

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّه كلَّما كان حجم العيِّنة n كبيرًا، اقترب شكل توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات من شكل التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن توزيع المجتمع، استنادًا إلى نظرية النهاية المركزية.

مفهوم أساسي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي للأوساط الحسابية لعيِّنات كبيرة

إذا كان $\overline{X}$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا لتوزيع الأوساط الحسابية لعيِّنات عشوائية، حجم كلٍّ منها 30 أو أكثر، وهي مأخوذة من مجتمع، وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ، فإنَّ شكل توزيع الأوساط الحسابية لهذه العيِّنات سيكون قريبًا من شكل التوزيع الطبيعي. ومنه، فإنَّ: $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

أتعلَّم

إذا كان المجتمع الأصلي طبيعيًّا، فإنَّنا لا نحتاج إلى شرط $n \geq 30$. وهذا ما اعتُمِد في الجزء الأوَّل من الدرس.

ومن ثَمَّ يُمكِن إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي للأوساط الحسابية للعيِّنات بنفس الطريقة التي يُمكِن بها إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

مثال 2 : من الحياة

أعمار: استنادًا إلى بيانات دولة في أحد الأعوام، فإنَّ الوسط الحسابي لأعمار طلبة الجامعات في تلك الدولة 25 سنة، والانحراف المعياري 9.5 سنوات. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية شملت 125 طالبًا، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الطلبة أكبر من 26

بما أنَّ حجم العيِّنة يبلغ 125، وهو أكبر من 30، فإنَّ توزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات يقترب من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن توزيع المجتمع الأصلي.

الخطـوة 1: أجد الوســط الحسابي لتوزيع الأوســاط الحســابية للعيِّنات، والخطأ المعياري للوسط الحسابي.

صيغة الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات: $\mu_{\bar{x}} = \mu$

بتعويض $\mu = 25$: $= 25$

صيغة الخطأ المعياري للوسط الحسابي: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بتعويض $\sigma = 9.5,\ n = 125$: $= \frac{9.5}{\sqrt{125}}$

باستعمال الآلة الحاسبة: ≈ 0.85

إذن، الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنة يساوي 25، والخطأ المعياري للوسط الحسابي يساوي 0.85 تقريبًا.

الخطوة 2: أجد الاحتمال المطلوب.

أفترض أنَّ المُتغيِّر العشوائي $\bar{X}$ يدلُّ على الوسط الحسابي للعيِّنة. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

صيغة قيمة z للوسط الحسابي للعيِّنة: $P(\bar{X} > 26) = P\left(Z > \frac{26-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$

بتعويض $\mu = 25,\ \sigma_{\bar{x}} = 0.85$: $= P\left(Z > \frac{26-25}{0.85}\right)$

بالتبسيط: $= P(Z > 1.18)$

باستعمال الخصائص: $= 1 - P(Z < 1.18)$

باستعمال الجدول: $= 1 - 0.8810$

بالتبسيط: $= 0.119$

أتحقَّق من فهمي

شاشات: بناءً على بيانات مسح أُجرِي في إحدى المدن، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لعدد ساعات استعمال الشباب للشاشات أسبوعيًّا في المدينة هو 21 ساعة، وأنَّ الانحراف المعياري هو 6 ساعات. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية بسيطة تضمُّ 100 شاب، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لاستعمال الشاشات من هؤلاء الشباب أكبر من 22.5 ساعة.

استعمال التوزيع الطبيعي في تقريب توزيع ذي الحدَّين

تعلَّمْتُ في الوحدة السابقة أنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين X يعطى بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

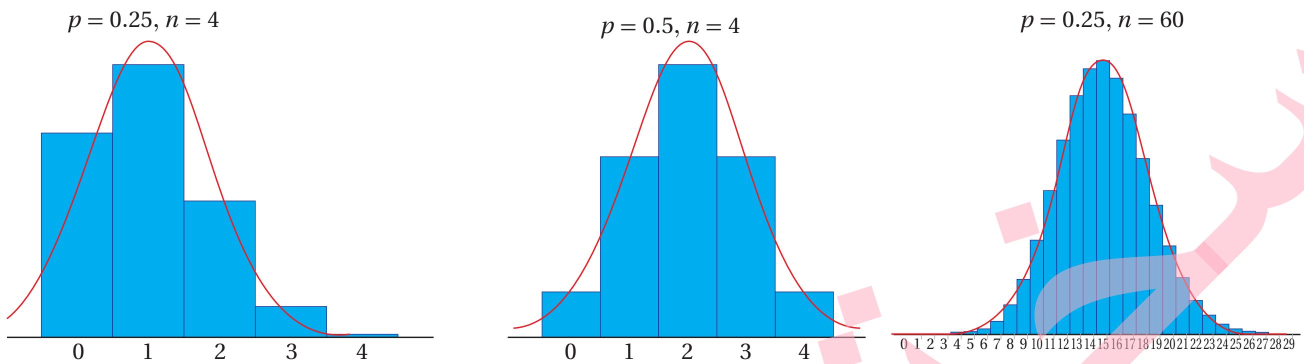
p: احتمال النجاح في كل محاولة.

r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

وَفقًا لنظرية النهاية المركزية، فإنَّ أيَّ توزيع لعيِّنات عشوائية مأخوذة من مجتمع توزيعه غير معلوم يُمكِن أنْ يقترب من التوزيع الطبيعي، إلى جانب زيادة حجم العيِّنة n بشكل كبير. نتيجةً لذلك؛ إذا كان توزيع عيِّنات عشوائية مأخوذة من مجتمع توزيعه ذو الحدَّين، فإنَّ شكل هذا التوزيع سيقترب من شكل التوزيع الطبيعي.

في مُقابِل ذلك، إذا زاد عدد المحاولات، أو اقترب احتمال النجاح من 0.5، فإنَّ شكل توزيع ذي الحدَّين سيبدأ بالتشابه مع شكل التوزيع الطبيعي. فمثلًا، في الشكل (a) التالي، يُمكِن ملاحظة أنَّ شكل توزيع ذي الحدَّين عندما $n = 4$ و $p = 0.25$ ليس قريبًا من شكل التوزيع الطبيعي، ولكنْ عندما $n = 4$ و $p = 0.5$ ، أو عندما $n = 60$ و $p = 0.25$، فإنَّ شكل توزيع ذي الحدَّين سيكون قريبًا من شكل التوزيع الطبيعي كما يظهر في الشكلين (b) و (c) على الترتيب.

وبوصف ذلك قاعدة عامة، يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي في تقريب توزيع ذي الحدَّين إذا كان حجم العيِّنة n كبيرًا بما يكفي لجعل $np \geq 5$ و $n(1-p) \geq 5$.



(a) (b) (c)

مفهوم أساسي

قاعدة تقريب توزيع ذي الحدَّين باستعمال التوزيع الطبيعي

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، وكان: $np \geq 5$، وكان: $n(1-p) \geq 5$، فإنَّه يُمكِن تقريب المُتغيِّر العشوائي X باستعمال المُتغيِّر العشوائي $Y \sim N\big(np, np(1-p)\big)$، حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتعلَّم

معاملا المُتغيِّر العشوائي الطبيعي Y هما: np، و $np(1-p)$، حيث:

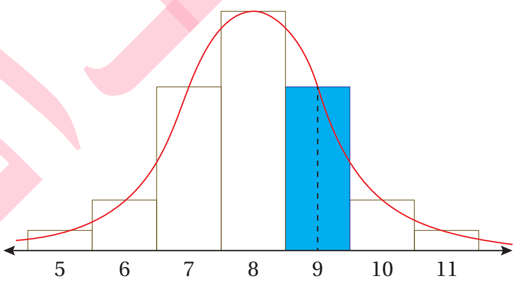
$\mu = np$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

بما أنَّ توزيع ذي الحدَّين مُنفصِل، والتوزيع الطبيعي متصل، فإنَّه يَلزم استعمال ما يُسمّى **عامل تصحيح الاستمرارية** (continuity correction factor) عند استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب قيمة احتمالية في توزيع ذي الحدَّين.

يعني هذا العامل أنَّنا سنضيف (أو نطرح) نصف وحدة (0.5) من القيمة التي نريد حساب احتمالها في التوزيع المُنفصِل، حتّى ننتقل من القِيَم المُنفصِلة إلى القِيَم المتصلة المناسبة.

فمثلًا، إذا أردنا تقريب $P(X = 9)$ باستعمال التوزيع الطبيعي، فإنَّ استعمال عامل تصحيح الاستمرارية يُحتِّم حساب $P(8.5 < X < 9.5)$ كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور.



$8.5 < x < 9.5$

أتذكَّر

إذا كان Y مُتغيِّرًا عشوائيًّا متصلًا، فإنَّ $P(Y = a) = 0$ لأيِّ قيمة a؛ لذا يجب استعمال فترات مناسبة عند التعامل مع التوزيع الطبيعي Y.

يُبيِّن صندوق (مفهوم أساسي) الآتي كيفية استعمال عامل تصحيح الاستمرارية في بعض الحالات.

مفهوم أساسي **عامل تصحيح الاستمرارية**

عند استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب قيمة احتمالية لتوزيع ذي الحدَّين، فإنَّه يُمكِن استعمال عامل تصحيح الاستمرارية على النحو الآتي، حيث c قيمة مُعيَّنة في توزيع ذي الحدَّين:

التوزيع الطبيعي	توزيع ذي الحدَّين
$P(c-0.5 < Y < c+0.5)$	$P(X=c)$
$P(Y > c+0.5)$	$P(X > c)$
$P(Y > c-0.5)$	$P(X \geq c)$
$P(Y < c-0.5)$	$P(X < c)$
$P(Y < c+0.5)$	$P(X \leq c)$

يُمكِن تقريب توزيع ذي الحدَّين باستعمال التوزيع الطبيعي كما هو مُبيَّن في صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

مفهوم أساسي **التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، وكان: $np \geq 5$، وكان: $n(1-p) \geq 5$، حيث n عدد المحاولات في التجربة، وp احتمال النجاح في كل محاولة، فإنَّه يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لتقريب توزيع ذي الحدَّين باستعمال التوزيع الطبيعي:

الخطوة 1: إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدَّين.

الخطوة 2: التعبير عن المسألة باستعمال رموز احتمال المُتغيِّر العشوائي X.

الخطوة 3: إيجاد عامل تصحيح الاستمرارية، ثمَّ إعادة كتابة المسألة باستعمال رموز احتمال المُتغيِّر العشوائي Y؛ لإظهار المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

الخطوة 4: إيجاد قِيَم z المُقابِلة لقِيَم المُتغيِّر العشوائي Y، ثمَّ استعمال جدول التوزيع الطبيعي وخصائص التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمال المطلوب.

مثال 3 : من الحياة

مطاعم: في دراســة أَعَدَّها أحد المطاعم عن طلبات زبائنه، تبيَّن أنَّ 30% منها نباتية. إذا اختير 80 طلبًا بشــكل عشوائي في أحد الأيام، فأســتعمل التوزيع الطبيعي لتقريب احتمال أنْ يزيد عدد الطلبات النباتية منها على 30 طلبًا.

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X في هذه التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين على عدد الطلبات النباتية فــي المطعم، فإنَّ $X \sim B(80, 0.3)$. وبما أنَّ كُلًّا من $np = 24$، و $n(1-p) = 56$ أكبر من 5، فإنَّه يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي $Y \sim N(np, np(1-p))$ في تقريب توزيع ذي الحدَّين.

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدَّين.

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$	الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدَّين	$\mu = np$
$= \sqrt{80 \times 0.3 \times 0.7}$	بتعويض $n = 80, p = 0.3$	$= 80 \times 0.3$
≈ 4.1	بالتبسيط	$= 24$

الخطوة 2: أُعبِّر عن المسألة باستعمال رموز احتمال المُتغيِّر العشوائي X.

بمــا أنَّ الاحتمال المطلوب هو احتمال زيادة عدد الطلبــات النباتية على 30 طلبًا، فإنَّ التعبير بالرموز عن هذا الاحتمال هو: $P(X > 30)$.

الخطوة 3: أجد عامل تصحيح الاســتمرارية، ثمَّ أُعيد كتابة المســألة لإظهار المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.

بمــا أنَّ الاحتمال المطلوب هو $P(X > 30)$، فإنَّني أُضيف 0.5 وحدة إلى 30، وبذلك يُمكِن إعادة كتابة الاحتمال على النحو الآتي: $P(Y > 30.5)$.

الخطوة 4: أجد الاحتمال المطلوب.

$$P(Y > 30.5) = P\left(Z > \frac{30.5 - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{صيغة قِيَم } z$$

$$= P\left(Z > \frac{30.5 - 24}{4.1}\right) \quad \text{بتعويض } \mu = 24, \sigma = 4.1$$

$$\approx P(Z > 1.59) \quad \text{بالتبسيط}$$

أتذكَّر

في التجربــة الاحتمالية ذات الحدَّيــن، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عــدد مَــرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التــي عددهــا n، وكان احتمال النجــاح في كل محاولــة هو p، فــإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين، ويُمكِن التعبير عنه بالرمــوز على النحو الآتــي: $X \sim B(n, p)$، حيــث n و p معامــلا المُتغيِّر العشوائي.

باستعمال الخصائص $= 1 - P(Z < 1.59)$

باستعمال الجدول $= 1 - 0.9441$

بالتبسيط $= 0.0559$

إذن، احتمال أنْ يزيد عدد الطلبات النباتية على 30 طلبًا هو: 0.0559

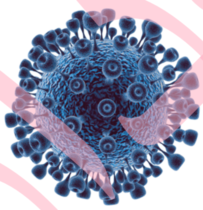
أتحقَّق من فهمي

نباتات: في دراسة لعالِمة أحياء، تبيَّن أنَّ احتمال أنْ يتجاوز طول نوع مُعيَّن من شُـجَيْرات الورد أكثر من 2 m هو 25%. إذا اختيرت 60 شُـجَيْرة ورد عشوائيًّا من النوع نفسه، فأستعمل التوزيع الطبيعي لتقريب احتمال ألّا يقلَّ عدد الشُّجَيْرات التي يزيد طولها على 2 m في العيِّنة عن 18 شُجَيْرة.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

1 **سرعة:** في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السـيّارات التي تمرُّ عن إحدى كاميرات المراقبة تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسـابي 60 km/h، وانحرافه المعياري 5 km/h. إذا اختيرت عيِّنة عشـوائية شملت سرعة 40 سيّارة، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي للسرعات في العيِّنة أقلَّ من 62 km/h

2 **أطـوال:** تتبع أطوال أقطار البراغي التـي تُنتِجها آلة في أحد المصانـع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسـابي 8.2 mm، وانحرافه المعياري 0.3 mm. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 25 برغيًّا، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لأطوال أقطار البراغي في العيِّنة بين 8 mm و 8.3 mm



أمراض: أشارت بعض البحوث إلى أنَّ الزمن اللازم لتعافي المصابين من أحد أنواع الفيروسات يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 4.5 أيام، وانحرافه المعياري يومان. أجد كُلًّا ممّا يأتي:

3 احتمال أنْ يكون الوسـط الحسـابي لزمن التعافي أقلَّ من 4 أيام لعيِّنة عشـوائية تضمُّ 75 شخصًا.

4 احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لزمن التعافي بين 4.4 أيام و 4.8 أيام لعيِّنة عشوائية تضمُّ 80 شخصًا.

5 **تصليح:** إذا كان الوسط الحسابي للزمن الذي تستغرقه ورشة تصليح سيّارات في خدمة السيّارة الواحدة 80 دقيقة، والانحراف المعياري 20 دقيقة، فأجد احتمال أنْ يزيد الوسط الحسابي لخدمة عيِّنة مُكوَّنة من 80 سيّارة على 83 دقيقة.

6 **صناعة:** استنادًا إلى دراسة أَعَدَّها قسم الجودة في أحد مصانع أعواد تنظيف الأذن، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لعدد الأعواد في العُلْبة الواحدة هو 52 عودًا، وأنَّ الانحراف المعياري هو 4. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية شملت 120 عُلْبة، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لعدد الأعواد في العيِّنة أقلَّ من 51 عودًا.

تُبيِّن كل حالة ممّا يأتي استطلاع رأي، طُلِب فيه إلى الطلبة الإجابة بـ (نعم) أو (لا). أُحدِّد إذا كان مُمكِنًا استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب المُتغيِّر X الذي يُمثِّل عدد الطلبة الذين أجابوا بـ (نعم)، ثمَّ أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري (إنْ أمكن)، وإلّا أُبيِّن السبب.

7 أظهرت دراسة أنَّ 34% من طلبة المرحلة الثانوية يستعملون هواتفهم أكثر من 3 ساعات يوميًّا لأغراض غير دراسية. اختيرت عيِّنة عشوائية تضمُّ 15 طالبًا، سُئِل كلٌّ منهم عمّا إذا كان يستعمل هاتفه أكثر من 3 ساعات في اليوم لأغراض غير دراسية.

8 أظهرت دراسة أنَّ 40% من طلبة المرحلة الثانوية الذين يدرسون بانتظام يوميًّا يستعينون بالإنترنت. اختيرت عيِّنة عشوائية تضمُّ 12 طالبًا مِمَّنْ يدرسون بانتظام كل يوم، وقد سُئِل كلٌّ منهم عمّا إذا كان يستعين بمجموعات دراسية عبر الإنترنت.

9 **طب:** أشارت دراسة أُعِدَّت في أحد المستشفيات إلى أنَّ 10% من المرضى يتجاهلون تعليمات استعمال الأدوية، ويُعدِّلون الجرعة بأنفسهم من دون استشارة الطبيب. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية تضمُّ 200 مريض مِمَّنْ يُراجِعون المستشفى، فأستعمل التوزيع الطبيعي لتقريب احتمال ألّا يزيد عدد المرضى الذين يتجاهلون تعليمات الطبيب على 25 مريضًا.

10 إذا كان: $X \sim N\,(40, \sigma^2)$، وكان احتمال أنْ يزيد الوسط الحسابي لعيِّنة، حجمها 10 مُشاهَدات، على 42 هو 0.1، فأجد قيمة σ.

11 **زراعة:** يُمكِن نمذجة كمية الحليب (باللتر) الذي تُنتِجه إحدى مزارع الأبقار يوميًّا بتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري 6. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 20 يومًا، وكان احتمال أنْ يزيد الوسط الحسابي لكمية إنتاج الحليب يوميًّا في العيِّنة على L 30 هو 0.25، فأجد قيمة μ.

12 **بحوث اجتماعية:** أشارت التقديرات إلى أنَّ 7% من سُكّان إحدى المدن يستعملون أيديهم اليسرى. إذا أُخِذت عيِّنة عشوائية من المجتمع، حجمها n شخصًا، وكان العدد المُتوقَّع للأشخاص الذين يستعملون أيديهم اليسرى في العيِّنة 2، فأجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

مهارات التفكير العليا

13 **تبرير:** إذا كان الوسط الحسابي لعلامات المُتقدِّمين لاختبار القدرات هو 74.5، وكان الانحراف المعياري لها هو 6، واختيرت عيِّنة عشوائية شملت 36 علامة اختبار، فأجد احتمال ألّا يزيد البُعْد بين الوسط الحسابي للعلامات في العيِّنة والوسط الحسابي للمجتمع على علامة واحدة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

14 **تحدٍّ:** إذا كان الانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X هو 8.2، وأُخِذت عيِّنة عشوائية من المجتمع، حجمها 100 مُشاهَدة، فأجد احتمال أنْ يقلَّ الفرق بين الوسط الحسابي للمجتمع والوسط الحسابي للعيِّنة عن 0.2

الدرس 3

فترات الثقة
Confidence Intervals

فكرة الدرس

- إيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.
- إيجاد فترات الثقة للوسط الحسابي للمجتمع.
- إيجاد الحدِّ الأدنى لحجم العيِّنة اللازم لإجراء تقدير دقيق.

المصطلحات مستوى الثقة، القيمة الحرجة، الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير، فترة الثقة.

مسألة اليوم ترغب شركة شحن في تقدير الوسط الحسابي للزمن الذي تستغرقه الطرود للوصول إلى العميل، فأجرت دراسة على 200 طرد عشوائيًّا، لتجد أنَّ الوسط الحسابي للزمن اللازم لوصول الطرد إلى العميل هو 3.8 أيام، ومن ثَمَّ قدَّرت أنَّ الوسط الحسابي يتراوح بين 3.5 أيام و4.1 أيام. ماذا يعني التقدير الذي توصَّلت إليه الشركة؟

أتعلَّم

لا يوجد أيُّ ضمان لأنْ تكون معلومات العيِّنة المُمثِّلة للمجتمع دقيقة.

مستوى الثقة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الإحصاء الاستدلالي هو أحد فرعي علم الإحصاء (الفرع الآخر هو الإحصاء الوصفي)، وأنَّه يُستعمَل لاستخلاص استنتاجات عن المجتمع كلِّه باستعمال عيِّنة عشوائية مختارة منه.

فإذا كان لدينا مجتمع ما، وأردنا تقريب الوسط الحسابي للمجتمع (المَعلَمة)، فإنَّنا سنختار عيِّنة عشوائية من المجتمع، ثمَّ نجد الوسط الحسابي لهذه العيِّنة (الإحصائي).

بوجه عام، لا توجد أيُّ معلومات دقيقة عن مدى قرب هذا الإحصائي من المَعلَمة؛ لذا سنعمل على إيجاد فترة من الأعداد الحقيقية باستعمال الوسط الحسابي للعيِّنة، وسيكون لدينا مستوى مُعيَّن من الثقة بأنَّ هذه الفترة ستحتوي على المَعلَمة التي نبحث عنها، ولكنْ لا يوجد أيُّ ضمان لأنْ تكون المَعلَمة واقعة ضمن هذه الفترة.

يُعرَّف **مستوى الثقة** (confidence level) بأنَّه نسبة تُوضِّح مدى التأكُّد من أنَّ فترة التقدير (وهي فترة من الأعداد الحقيقية) تحتوي على القيمة الحقيقية لمَعلَمة مُعيَّنة للمجتمع. وهي تُكتَب غالبًا بوصفها نسبة مئوية، مثل: 90%، و95%، و99%، ويُرمَز إليها بالحرف c.

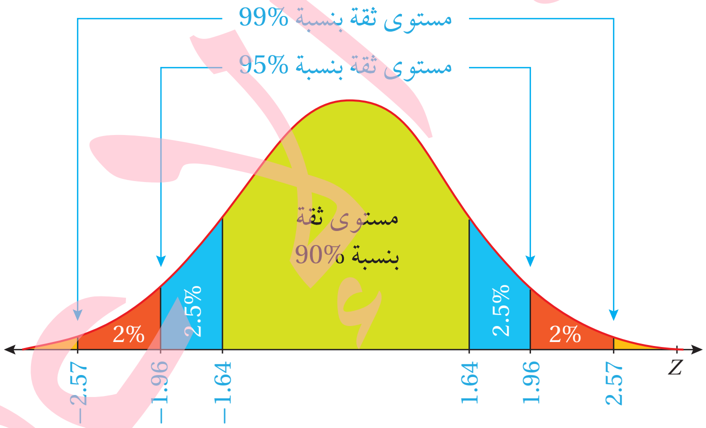
يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي المعياري لتمثيل مستوى الثقة إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع (σ) معروفًا، وكان للمجتمع توزيع طبيعي، أو إذا كان حجم العيِّنة كبيرًا (أيْ $n \geq 30$) لتحقيق التقريب الطبيعي كما تعلَّمْتُ في الدرس السابق.

كما يشير الاسم؛ فإنَّ مستوى الثقة c يعني أنَّنا واثقون بنسبة c أنَّ الوسط الحسابي للمجتمع سيكون واقعًا ضمن فترة مُعيَّنة. وهذا يعني أنَّنا لو أعدنا تجربة اختيار عيِّنة من الحجم نفسه، وأوجدنا فترات التقدير لكل عيِّنة، وكرَّرنا هذه العملية عددًا كبيرًا من المَرّات؛ فإنَّ c (بوصفها نسبة) من هذه الفترات تقريبًا ستحتوي على القيمة الحقيقية للوسط الحسابي للمجتمع.

لإيجاد فترات التقدير، فإنَّنا نبدأ بإيجاد ما يُسمّى **القيمة الحرجة** (critical value)؛ وهي قيمة معيارية z (موجبة) مُرتبِطة بمستوى الثقة المنشود بصرف النظر عن المجتمع أو العيِّنة.

لإيجاد هذه القيمة الحرجة، فإنَّنا نجد z، حيث: $P(-z < Z < z) = c$، علمًا بأنَّ Z هو المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري.

على سبيل المثال، إيجاد القيمة الحرجة المُرتبِطة بمستوى الثقة 95% ($c = 0.95$) يتطلَّب البحث عن قيمة z الموجبة، حيث: $P(-z < Z < z) = 2P(Z<z) - 1 = 0.95$. وبالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، يتبيَّن أنَّ $z = 1.96$.



أتعلَّم

المساحة المُتبقِّية خارج نطاق $-z$ و z (في الطرفين) هي: $1-c$؛ أيْ إنَّ كل طرف يحتوي على مساحة نسبتها $\frac{1-c}{2}$.

يُبيِّن الجدول الآتي أكثر مستويات الثقة استعمالًا والقِيَم الحرجة المُقابِلة لها:

مستوى الثقة	قيمة z الحرجة
90%	1.64
95%	1.96
99%	2.57

الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم

يُعرَّف **الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير** (maximum error of estimate) بأنَّه أكبر فرق مُمكِن بين المَعلَمة والإحصائي المُستعمَل في التقدير بمستوى ثقة مُعيَّن، ويُرمَز إليه بالحرف E. عند تقدير الوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم، يُمكِن حساب الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير باستعمال القاعدة التي يُبيِّنها صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

مفهوم أساسي

الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم

يُمكِن إيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير E عند تقدير الوسط الحسابي μ لمجتمع ما بمستوى ثقة مُعيَّن باستعمال القاعدة الآتية:

$$E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث:

z: القيمة الحرجة التي تُقابِل مستوى ثقة مُعيَّنًا.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: حجم العيِّنة؛ شرط أنْ يكون $n \geq 30$ إذا لم يكن المجتمع طبيعيًّا؛ لضمان إمكانية استعمال التوزيع الطبيعي المعياري أساسًا لتقدير الخطأ.

أتعلَّم

لاستعمال القاعدة المجاورة، يجب أنْ يكون الانحراف المعياري للمجتمع معلومًا، وأنْ يكون توزيع المجتمع طبيعيًّا، أو أنْ يكون $n \geq 30$.

مثال 1 : من الحياة

فواتير كهرباء: **في استطلاع أُجرِي في إحدى المدن، وشمل عيِّنة عشوائية قِوامها 75 أُسْرة، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لقيمة فاتورة الكهرباء الشهرية هو JD 62. ووَفقًا لبيانات شركة الكهرباء، فإنَّ الانحراف المعياري لقيمة الفاتورة في هذا المجتمع هو JD 14. أستعمل مستوى ثقة 99% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لقِيَم فواتير الكهرباء الشهرية لأُسَر المدينة، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.**

بما أنَّ مستوى الثقة 99%، فإنَّ قيمة z الحرجة المُقابِلة لهذا المستوى هي: 2.57

$$E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ صيغة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي

$$= 2.57 \times \frac{14}{\sqrt{75}}$$ بتعويض $z = 2.57, \sigma = 14, n = 75$

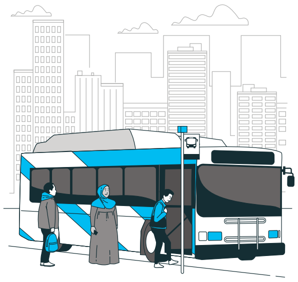
$$\approx 4.15$$ بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال القاعدة: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

وهذا يعني أنَّني أكون واثقًا بما نسبته 99% (لكنَّني لسْتُ مُتأكِّدًا) أنَّ الوسط الحسابي μ لقِيَم فواتير الكهرباء الشهرية في المجتمع كاملًا لن يبتعد أكثر من JD 4.15 عن الوسط الحسابي للعيِّنة البالغ JD 62.

أتحقَّق من فهمي



مواصلات عامة: في دراسة أُجريت في إحدى المدن، وشملت عيِّنة عشوائية قِوامها 60 شخصًا، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لِما يُنفِقه الفرد شهريًّا على المواصلات العامة هو JD 48. ووَفقًا للبيانات الرسمية في المدينة، فإنَّ الانحراف المعياري لِما يُنفِقه الفرد شهريًّا على المواصلات العامة في هذه المدينة هو JD 12. أستعمل مستوى ثقة 90% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لإنفاق الفرد (في المدينة) على المواصلات العامة شهريًّا، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري غير معلوم

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير E للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم. ولكنْ، إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، فإنَّه يُمكِن استعمال الانحراف المعياري للعيِّنة s بدلًا من الانحراف المعياري للمجتمع σ لإيجاد قيمة E؛ شرط أنْ يكون حجم العيِّنة $n \geq 30$.

مفهوم أساسي

الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري غير معلوم

يُمكِن إيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير E للوسط الحسابي μ لمجتمع ما باستعمال القاعدة الآتية:

$$E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

حيث:

z: القيمة الحرجة التي تُقابِل مستوى ثقة مُعيَّنًا.

s: الانحراف المعياري للعيِّنة.

n: حجم العيِّنة؛ شرط أنْ يكون $n \geq 30$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه تمَّ استعمال القاعدة السابقة نفسها، باستثناء استعمال s بدلًا من σ؛ لأنَّها غير معلومة؛ شرط أنْ يكون $n \geq 30$.

مثال 2 : من الحياة

ساعات نوم: في دراسة أُجرِيت في إحدى الدول، وشملت عيِّنة عشوائية قِوامها 40 شخصًا بالغًا، سُئِل هؤلاء الأشخاص عن مُدَّة نومهم ليلًا، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لذلك هو 7.1 ساعات، وأنَّ الانحراف المعياري هو 0.78 من الساعة. أستعمل مستوى ثقة 95% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لمُدَّة نوم الأشخاص البالغين في تلك الدولة، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

بما أنَّ مستوى الثقة 95%، فإنَّ قيمة z الحرجة المُقابِلة لهذا المستوى هي: 1.96

صيغة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي
$$E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

بتعويض $z = 1.96, s = 0.78, n = 40$
$$= 1.96 \times \frac{0.78}{\sqrt{40}}$$

بالتبسيط
$$\approx 0.24$$

وهذا يعني أنَّني أكون واثقًا بما نسبته 95% (لكنَّني لسْتُ مُتأكِّدًا) أنَّ الوسط الحسابي μ لعدد ساعات نوم المجتمع لن يبتعد أكثر من 0.24 من الساعة عن الوسط الحسابي للعيِّنة البالغ 7.1 ساعات.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال القاعدة: $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$ لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

أتحقَّق من فهمي

إنترنت: في دراسة أُجرِيت في إحدى الدول، وشملت عيِّنة عشوائية قِوامها 50 شخصًا بالغًا، سُئِل هؤلاء الأشخاص عن عدد ساعات تصفُّحهم وسائل التواصل الاجتماعي يوميًّا، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لذلك هو 3.8 ساعات، وأنَّ الانحراف المعياري هو 0.65 من الساعة. أستعمل مستوى ثقة 95% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لعدد الساعات التي يتصفَّح فيها الأشخاص البالغون في تلك الدولة وسائل التواصل الاجتماعي يوميًّا، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

فترة الثقة للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم

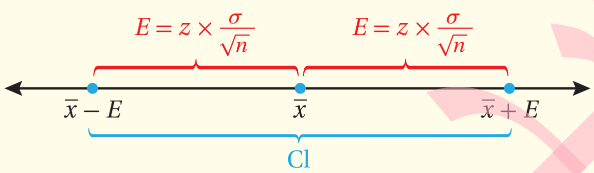
تُعـرَّف **فترة الثقــة** (confidence interval) بأنّهــا المدى الذي يُحتمَــل أنْ يحتوي على المَعلَمة الحقيقية اســتنادًا إلى بيانــات العيِّنة، ويُرمَز إليها بالرمــز CI. يُمكِن إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي بإضافة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير E وطرحه من الإحصائي $\bar{x}$.

يُمكِن إيجاد فترة الثقة للوســط الحســابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم كما هو مُبيَّن في صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

مفهوم أساسي فترة الثقة للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري معلوم

يُمكِن إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي μ لمجتمع ما باستعمال القاعدة الآتية:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E \qquad \text{or} \qquad \bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



حيث:

z: القيمة الحرجة التي تُقابِل مستوى ثقة مُعيَّنًا.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

$\bar{x}$: الوسط الحسابي للعيِّنة.

n: حجم العيِّنة؛ شرط أنْ يكون $n \geq 30$ إذا لم يكن المجتمع طبيعيًّا.

أتذكَّر

إذا كان المجتمع الأصلي طبيعيًّــا، فلا يُشــترَط أنْ يكــون حجــم العيِّنــة $n \geq 30$.

مثال 3 : من الحياة

مبيعات: في استطلاع شمل 20 موظف مبيعات اختيروا عشوائيًّا من موظفي إحدى الشركات، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لمُدَّة المكالمة الهاتفية الواحدة مع العميل هو 15 دقيقة. إذا افترضْتُ أنَّ التوزيع طبيعي، وأنَّ انحرافه المعياري 3 دقائق، فأجد فترة الثقة بمســتوى 90% للوســط الحسابي لمُدَّة مكالمات موظفي المبيعات، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

بما أنَّ مستوى الثقة 90%، فإنَّ قيمة z الحرجة المُقابِلة لهذا المستوى هي: 1.64

صيغة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي $\quad E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بتعويض $z = 1.64, \sigma = 3, n = 20$ $\quad = 1.64 \times \frac{3}{\sqrt{20}}$

بالتبسيط $\quad \approx 1.1$

الخطوة 2: أجد فترة الثقة.

صيغة فترة الثقة للوسط الحسابي $\quad \bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$

بتعويض $E = 1.1, \bar{x} = 15$ $\quad 15 - 1.1 < \mu < 15 + 1.1$

بالتبسيط $\quad 13.9 < \mu < 16.1$

إذن، فترة الثقة بمستوى 90% هي: $13.9 < \mu < 16.1$

وهذا يعني أنَّني أكون واثقًا بما نسبته 90% (لكنَّني لسْتُ مُتأكِّدًا) أنَّ الوسط الحسابي لمُدَّة المكالمة الهاتفية الواحدة للمجتمع μ يقع بين 13.9 دقيقة و16.1 دقيقة.

أتحقَّق من فهمي

تسوُّق: في دراسة أُجرِيت على عيِّنة تضمُّ 25 شخصًا اختيروا عشوائيًّا من زبائن أحد المراكز التجارية، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لِما أنفقه الزبون في ذلك اليوم هو JD 70. إذا افترضْتُ أنَّ التوزيع طبيعي، وأنَّ انحرافه المعياري JD 12، فأجد فترة الثقة بمستوى 95% للوسط الحسابي لِما أنفقه زبائن المركز التجاري في ذلك اليوم، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

فترة الثقة للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري غير معلوم

يُمكِن إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري غير معلوم كما هو مُبيَّن في صندوق (مفهوم أساسي) الآتي.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وأنَّ توزيع المجتمع طبيعي؛ لذا يُمكِن استعمال القاعدة: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

رموز رياضية

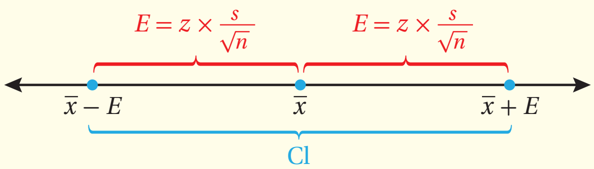
يُمكِنني كتابة فترة الثقة في المثال المجاور في صورة (13.9, 16.1)، وكذلك كتابة هذه الفترة بوصفها فترة مفتوحة أو فترة مُغلَقة.

مفهوم أساسي

فترة الثقة للوسط الحسابي لمجتمع انحرافه المعياري غير معلوم

يُمكِن إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي μ لمجتمع ما باستعمال القاعدة الآتية:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E \qquad \text{or} \qquad \bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$



حيث:

z: القيمة الحرجة التي تُقابِل مستوى ثقة مُعيَّنًا.

s: الانحراف المعياري للعيِّنة.

$\bar{x}$: الوسط الحسابي للعيِّنة.

n: حجم العيِّنة؛ شرط أنْ يكون $n \geq 30$.

مثال 4 : من الحياة

إنتاج: في دراسة أجراها قسم الجودة في أحد مصانع تعبئة أكياس الطحين، وشملت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 200 كيس، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لكتل العيِّنة هو 248 g، وأنَّ الانحراف المعياري لتلك العيِّنة هو 17 g. أجد فترة الثقة بمستوى 99% للوسط الحسابي لكتل أكياس الطحين التي تُعبِّئها الشركة، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

بما أنَّ مستوى الثقة 99%، فإنَّ قيمة z الحرجة المُقابِلة لهذا المستوى هي: 2.57

$E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$ صيغة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي

$= 2.57 \times \frac{17}{\sqrt{200}}$ بتعويض $z = 2.57,\ s = 17,\ n = 200$

≈ 3.1 بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال القاعدة: $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$ لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي للمجتمع.

الخطوة 2: أجد فترة الثقة.

صيغة فترة الثقة للوسط الحسابي	$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$
بتعويض $E = 3.1, \overline{x} = 248$	$248 - 3.1 < \mu < 248 + 3.1$
بالتبسيط	$244.9 < \mu < 251.1$

إذن، فترة الثقة بمستوى 99% هي: $244.9 < \mu < 251.1$

وهذا يعني أنَّني أكون واثقًا بما نسبته 99% (لكنَّني لسْتُ مُتأكِّدًا) أنَّ الوسط الحسابي لكتل أكياس الطحين للمجتمع μ يقع بين 244.9 g و 251.1 g

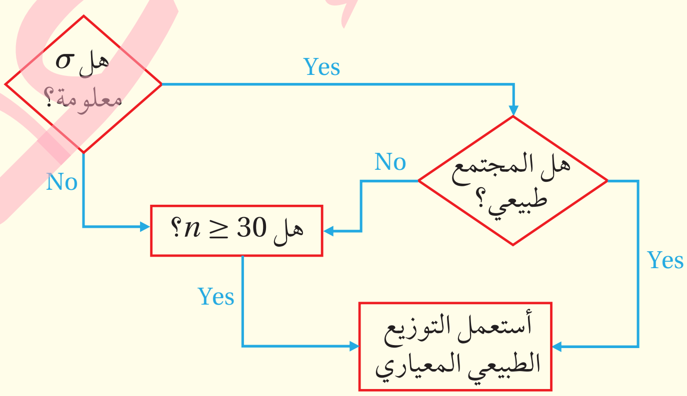
أتحقَّق من فهمي

إنتاج: في دراسة أجراها قسم الجودة في أحد مصانع إنتاج العصير، وشملت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 150 عُلْبة، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لكمية العصير في عُلَب العيِّنة هو 330 mL، وأنَّ الانحراف المعياري لها هو 15 mL. أجد فترة الثقة بمستوى 99% للوسط الحسابي لكمية العصير في العُلَب التي يُنتِجها المصنع، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

يُبيِّن صندوق (مُلخَّص المفهوم) الآتي مُلخَّص عملية إيجاد فترات الثقة.

مُلخَّص المفهوم — إيجاد فترات الثقة

يُبيِّن الرسم التوضيحي الآتي مُلخَّص عملية إيجاد فترات الثقة:



الحدُّ الأدنى لحجم العيِّنة اللازم لإجراء تقدير دقيق

يرتبط تحديد حجم العيِّنة (n) ارتباطًا وثيقًا بالتقدير الإحصائي؛ إذ يُطرَح غالبًا سؤال يتعلَّق بتحديد الحدِّ الأدنى لحجم العيِّنة المطلوب للحصول على تقدير يمتاز بدرجة كافية من الدِّقَّة. للإجابة عن هذا السؤال، تُستعمَل علاقة رياضية تتطلَّب معرفة ثلاث معلومات أساسية، هي: الحدُّ الأقصى المسموح به لخطأ التقدير (E)، والانحراف المعياري للمجتمع (σ)، ومستوى الثقة المرغوب (c) الذي تُستخلَص منه القيمة الحرجة (z)، وذلك على النحو الآتي:

صيغة الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي
$$E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بضرب طرفي المعادلة في $\sqrt{n}$
$$E \times \sqrt{n} = z \times \sigma$$

بقسمة طرفي المعادلة على E
$$\sqrt{n} = \frac{z \times \sigma}{E}$$

بتربيع طرفي المعادلة
$$n = \left(\frac{z\,\sigma}{E}\right)^2$$

مفهوم أساسي

الحدُّ الأدنى لحجم العيِّنة

يُمكِن إيجاد الحدِّ الأدنى لحجم العيِّنة المطلوب عند إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع باستعمال القاعدة الآتية:

$$n = \left(\frac{z\,\sigma}{E}\right)^2$$

حيث:

n: حجم العيِّنة.

z: القيمة الحرجة التي تُقابِل مستوى ثقة مُعيَّنًا.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

E: الحدُّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي.

أتعلَّم

لا يُمكِن لحجم العيِّنة أنْ يكون كسرًا؛ لذا عند إيجاد الحدِّ الأدنى لحجم العيِّنة، أُقرِّب الناتج إلى الأعلى.

مثال 5 : من الحياة

صيانة سيّارات: يرغب مالك مركز لصيانة السيّارات في تحديد الوسط الحسابي لأسعار تغيير زيت السيّارة للمحالّ المُنافِسة في منطقته. أجد الحدَّ الأدنى لحجم العيِّنة التي يتعيَّن على مالك المركز اختيارها ليكون تقديره دقيقًا بنسبة 90%، وبحدٍّ أقصى للخطأ مقداره JD 1.5 (بافتراض أنَّ الانحراف المعياري لتكلفة تغيير الزيت بين مراكز الصيانة في المنطقة هو JD 5).

$$n = \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2$$ صيغة الحدِّ الأدنى لحجم العيِّنة

$$= \left(\frac{1.64 \times 5}{1.5}\right)^2 = 29.88$$ بتعويض $z = 1.64, E = 1.5, \sigma = 5$

$$\approx 30$$ بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، يجب أنْ تشمل العيِّنة العشوائية المختارة 30 مركزًا على الأقلِّ؛ لضمان مستوى ثقة 90%، وهامش خطأ لا يتجاوز JD 1.5.

أتحقَّق من فهمي

مطاعم: ترغب إدارة أحد المطاعم في تقدير الوسط الحسابي للزمن الذي يقضيه الزبائن في إنهاء وجبة الغداء. أجد الحدَّ الأدنى لحجم العيِّنة التي يتعيَّن على إدارة المطعم اختيارها ليكون تقديرها دقيقًا بنسبة 99%، وبحدٍّ أقصى للخطأ مقداره 4 دقائق (بافتراض أنَّ الانحراف المعياري لمُدَّة تناول الوجبة هو 11.3 دقيقة).

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

1 خدمة عملاء: في دراسة شملت 10 موظفين من قسم خدمة العملاء في شركة تعمل في مجال الاتصالات، تمَّ تسجيل عدد المكالمات الهاتفية التي يَرُدُّ فيها كل موظف يوميًّا على استفسارات العملاء أو يتولّى فيها حلَّ مشكلاتهم. وقد تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لعدد المكالمات التي يستقبلها الموظف هو 30 مكالمة يوميًّا. إذا افترضْتُ أنَّ التوزيع طبيعي، وأنَّ انحرافه المعياري 5 مكالمات، فأستعمل مستوى ثقة 95% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لعدد المكالمات اليومية لموظفي قسم خدمة العملاء، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

2 **صيدليات:** في دراسة شملت عيِّنة عشوائية قِوامها 35 شخصًا من مراجعي إحدى الصيدليات، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لِما يُنفِقه الفرد شهريًّا على الأدوية هو JD 38، وأنَّ الانحراف المعياري هو JD 10. أستعمل مستوى ثقة 90% لإيجاد الحدِّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لإنفاق الفرد (من مراجعي الصيدلية) على الأدوية شهريًّا، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

3 **حِبال:** في دراسة لعيِّنة عشوائية شملت 50 حبلًا من إنتاج أحد المصانع، تبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لأطوالها هو 501 cm. إذا افترضْتُ أنَّ الانحراف المعياري لأطوال الحِبال التي يُنتِجها المصنع هو 0.3 cm، فأجد فترة الثقة بمستوى 94% للوسط الحسابي لأطوال الحِبال التي يُنتِجها المصنع، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

4 **حلويات:** تتبع كتل كعكات الجوز التي يَصْنعها أحد محالِّ الحلويات توزيعًا طبيعيًّا انحرافه المعياري 20 g. أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 12 كعكة، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لكتلها هو 460 g. أجد فترة الثقة بمستوى 96% للوسط الحسابي لكتل كعكات الجوز التي يَصْنعها المحل، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

5 **بيض:** أُخِذت عيِّنة عشوائية شملت 125 بيضة من إنتاج إحدى المَزارع، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لكتل العيِّنة هو 58 g، وأنَّ الانحراف المعياري لها هو 5 g. أجد فترة الثقة بمستوى 98% للوسط الحسابي لكتل البيض الذي تُنتِجه المزرعة، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

6 **هواتف ذكية:** يرغب مسؤول التسويق بإحدى شركات الهواتف الذكية في تقدير الوسط الحسابي لعدد التطبيقات التي يستعملها العميل يوميًّا قبل إطلاق حملة إعلانية مُوجَّهة. إذا كان هدف المسؤول هو الحصول على مستوى ثقة 90%، وأنْ يكون الوسط الحسابي لعدد التطبيقات التي يستعملها العملاء يوميًّا ضمن ± 1.5 تطبيق من الوسط الحسابي للعيِّنة، فأجد حجم العيِّنة اللازم لتحقيق هذا الهدف (بافتراض أنَّ الانحراف المعياري لعدد التطبيقات المُستعمَلة يوميًّا هو 9 تطبيقات).

7 **صِحَّة:** تتبع مستويات الكوليسترول في دم المرضى الذين يُراجِعون أحد الأطبّاء توزيعًا طبيعيًّا انحرافه المعياري 0.6 mmol/L. يرغب الطبيب أنْ يكون تقديره للوسط الحسابي لمستوى الكوليسترول في دم مرضى عيادته دقيقًا بنسبة 95%، وبحدٍّ أقصى للخطأ مقداره 0.8. أجد الحدَّ الأدنى لحجم العيِّنة التي يتعيَّن على الطبيب اختيارها من مرضاه.

8 **تعليم:** ترغب مُعلِّمة في التحقُّق من المُدَّة التي تقضيها طالباتها في أداء واجباتهن المدرسية في مبحث الرياضيات أسبوعيًّا، فاختارت عيِّنة عشوائية تضمُّ 50 طالبة، ثمَّ دوَّنت عدد الدقائق x التي تؤدّي فيها كل طالبة واجبها المدرسي خلال أيام الأسبوع، وقد أمكن للمُعلِّمة الحصول على المعلومات الإحصائية الآتية:

$$\sum x_i = 3012 \;,\; \sum x_i^{\,2} = 189354$$

أجد فترة الثقة بمستوى 99% للوسط الحسابي لعدد الدقائق التي تقضيها جميع الطالبات (اللاتي يَدْرسن عند هذه المُعلِّمة) في أداء واجباتهن المدرسية على مدار الأسبوع، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

مهارات التفكير العليا

تبرير: تتبع أطوال الرجال (بالسنتيمتر) في أحد المجتمعات توزيعًا طبيعيًّا. أُخِذت عيِّنة عشوائية تضمُّ 200 رجل، وحُسِبت فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع بمستوى 98%، فكانت: $179.2 \le \mu \le 182.6$. أجد كُلًّا ممّا يأتي، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

9 الوسط الحسابي للعيِّنة.

10 الانحراف المعياري للمجتمع.

11 فترة الثقة بمستوى 95% للوسط الحسابي للمجتمع.

تحدٍّ: أُخِذت عيِّنة عشوائية قِوامها 50 عُلْبة بسكويت من إنتاج أحد المصانع، وقيست الكتلة m (بالغرام) لكل حبَّة بسكويت، وقد أمكن للمصنع الحصول على المعلومات الإحصائية الآتية:

$$\sum m_i = 15924, \;\; \sum m_i^{\,2} = 5085213$$

12 أجد فترة الثقة بمستوى 92% للوسط الحسابي للمجتمع.

13 إذا كان طول فترة الثقة بمستوى x% للوسط الحسابي للمجتمع هو 10، فأجد قيمة x.

الدرس 4

اختبار الفرضيات
Hypotheses Testing

فكرة الدرس

- تعرُّف الفرضية الصفرية والفرضية البديلة، وكتابتهما لادِّعاء ما.
- تعرُّف النوع I (النوع الأوَّل) والنوع II (النوع الثاني) من الأخطاء التي يُمكِن الوقوع بها عند اتِّخاذ قرارات بخصوص الفرضية الصفرية.
- تعرُّف اختبارات الأهمية الثلاثة: اختبار أُحادي الطرف يمينًا، واختبار ثنائي الطرف، واختبار أُحادي الطرف يسارًا.
- إجراء اختبارات الأهمية الثلاثة.

المصطلحات

اختبار الفرضية، الفرضية الصفرية، الفرضية البديلة، الخطأ من النوع I، الخطأ من النوع II، مستوى الدلالة، المنطقة الحرجة، اختبار أُحادي الطرف يمينًا، اختبار ثنائي الطرف، اختبار أُحادي الطرف يسارًا.

مسألة اليوم

تَدَّعي إحدى الشركات أنَّ الوسط الحسابي لكتلة قطعة الشوكولاتة في عُلَبِها هو 100 g على الأقلِّ. ولهذا قرَّرت هيئة رقابة الجودة التحقُّق من صِحَّة ادِّعاء الشركة، بعدما وردت إليها شكاوى من بعض المُستهلِكين تفيد بأنَّ قطع الشوكولاتة التي تُنتِجها الشركة أخفُّ ممّا هو مُعلَن. كيف يُمكِن لهيئة رقابة الجودة التحقُّق من صِحَّة ادِّعاء الشركة؟

الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

تعرَّفْتُ في الدرس السابق فترة الثقة وأهميتها في إيجاد تقدير للوسط الحسابي للمجتمع عن طريق الوسط الحسابي للعيِّنة، وسأتعرَّف في هذا الدرس **اختبار الفرضية** (hypothesis testing)؛ وهو أسلوب إحصائي يُستعمَل لتقييم مدى صِحَّة ادِّعاء مُعيَّن عن مَعلَمة في المجتمع الإحصائي، مثل الوسط الحسابي.

لإجراء اختبار الفرضية، نبدأ أوَّلًا بصياغة الادِّعاء في صورة عبارة رياضية، ثمَّ نُشكِّل زوجًا من الفرضيات، هما:

- **الفرضية الصفرية** (null hypothesis) H_0: عبارة رياضية تحتوي على رمز المساواة، مثل: $\geq$، أو $=$، أو $\leq$، وتُمثِّل الادِّعاء الأساسي الذي نرغب في اختباره، وهي تفترض غالبًا عدم وجود فرق، مثل عدم وجود فرق كبير بين الإحصائي والمَعلَمة.

- **الفرضية البديلة** (alternative hypothesis) H_1: عبارة رياضية تحتوي على رمز عدم المساواة، مثل: <، أو ≠، أو >، وتُمثِّل نقيض H_0، وتُعبِّر عن وجود فرق يتطلَّب رفض الفرضية الصفرية، مثل وجود فرق كبير بين الإحصائي والمَعلَمة.

قد يكون الادِّعاء جزءًا من الفرضية الصفرية، أو جزءًا من الفرضية البديلة. يُبيِّن صندوق (مفهوم أساسي) الآتي التركيبات المُحتمَلة للفرضيات.

مفهوم أساسي **فرضيات الادِّعاء**

إذا كان k ادِّعاءً عن قيمة الوسط الحسابي μ للمجتمع، فإنَّ التركيبات المُحتمَلة للفرضيات هي:

1. $H_0: \mu = k$ and $H_1: \mu \neq k$
2. $H_0: \mu \geq k$ and $H_1: \mu < k$
3. $H_0: \mu \leq k$ and $H_1: \mu > k$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ H_1 يُعبِّر عن مُتمِّمة H_0.

مثال 1

أكتب الفرضية البديلة والفرضية الصفرية لكل عبارة ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد أيُّهما تُمثِّل الادِّعاء:

1 **تَدَّعي إحدى شركات الغذاء أنَّ لوح البروتين الجديد الذي تُنتِجه يحوي ما لا يزيد على 20 g (بالمُتوسِّط) من البروتين في اللوح الواحد.**

العبارة الرياضية التي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu \leq 20$. بما أنَّ هذه العبارة تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية الصفرية، أمّا نقيضها فهو: $\mu > 20$. ومنه، فإنَّ:

$H_0: \mu \leq 20$ (الادِّعاء) and $H_1: \mu > 20$

2 **تَدَّعي إحدى شركات التوصيل أنَّها تستطيع إيصال الطرود إلى الزبائن في أقلَّ من يومين.**

العبارة الرياضية التي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu < 2$. بما أنَّ هذه العبارة لا تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية البديلة، أمّا نقيضها فهو: $\mu \geq 2$. ومنه، فإنَّ:

$H_0: \mu \geq 2$ and $H_1: \mu < 2$ (الادِّعاء)

أتذكَّر

يجب أنْ تحتوي H_0 على رمز المساواة.

3 يَدَّعي مدير متحف أنَّ الوسط الحسابي لعدد الزُّوّار يوميًّا في فصل الصيف هو **1200** زائر.

العبارة الرياضية التـي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu = 1200$. بما أنَّ هذه العبارة تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية الصفرية، أمّا نقيضها فهو: $\mu \neq 1200$. ومنه، فإنَّ:

$$H_0: \mu = 1200 \text{ (الادِّعاء)} \qquad \text{and} \qquad H_1: \mu \neq 1200$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب الفرضية البديلة والفرضية الصفرية لكل عبارة ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد أيُّهما تُمثِّل الادِّعاء:

a) تَدَّعي إدارة أحد الفنادق أنَّ الوسط الحسابي لتقييم الزبائن الخدمة المُقدَّمة لا يقلُّ عن 4.5 من 5

b) تَدَّعي إحدى شركات تعبئة المياه أنَّ درجة حموضة المياه (pH) التي تُنتِجها تساوي 7

c) تَدَّعي إحدى شركات الصيانة أنَّ مُتوسِّط الفترة التي تحتاج إليها لإصلاح الأجهزة الإلكترونية أقلُّ من 3 أيام بعد تسلُّمها.

اختبار الفرضية

عند اختبار صِحَّة ادِّعاءٍ حيال مَعلَمة في المجتمع، يُبدَأ دائمًا بالفرضية الصفرية H_0، ويُستعمَل الوسط الحسابي للعيِّنة، الذي يُستخرَج من البيانات المُتوافِرة (العيِّنة)؛ لمقارنة الادِّعاء بالوسط الحسابي المُفترَض للمجتمع، ثمَّ تُحلَّل الفروق بينهما. أمّا قرار رفض H_0 أو عدم رفضها فيعتمد على تحليل الفرق وَفقًا لمستوى دلالة مُحدَّد مُسبَّقًا؛ فإذا كان الفرق بين الوسط الحسابي للعيِّنة والوسط الحسابي المُفترَض للمجتمع كبيرًا بما يكفي ليكون ذا دلالة إحصائية، فإنَّ الفرضية الصفرية تُرفَض. أمّا إذا لم يكن الفرق ذا دلالة إحصائية فلا تُرفَض هذه الفرضية.

عند اختبار الفرضية الإحصائية، يُتوقَّع وجود أربع نتائج مُمكِنة ناتجة من احتمالين لحالة الفرضية الصفرية (أنْ تكون صحيحة أو غير صحيحة)، واحتمالين للقرار الإحصائي (أنْ تُرفَض أو ألّا تُرفَض) بناءً على بيانات العيِّنة. ينتج من ذلك حالتان يكون فيهما القرار صحيحًا: رفض الفرضية إذا كانت غير صحيحة، وعدم رفضها إذا كانت صحيحة. في مُقابِل ذلك، توجد حالتان يكون فيهما القرار غير صحيح: رفض الفرضية وهي في الواقع صحيحة، في ما يُسمّى

الخطأ من النوع I (Type I error)، وعدم رفض الفرضية وهي في الواقع غير صحيحة، في ما يُسمّى **الخطأ من النوع II** (Type II error).

تحدث هذه الأخطاء؛ لأنَّ الحكم يعتمد على بيانات مأخوذة من عيِّنة جزئية، لا من المجتمع كلِّه؛ ما يجعل احتمال الوقوع في خطأ إحصائي أمرًا واردًا.

	H_0 غير صحيحة	H_0 صحيحة
رفض H_0	قرار صحيح رفض الفرضية الصفرية وهي غير صحيحة حقًّا.	قرار غير صحيح (خطأ من النوع I) رفض الفرضية الصفرية بالرغم من أنَّها صحيحة.
عدم رفض H_0	قرار غير صحيح (خطأ من النوع II) عدم رفض الفرضية الصفرية بالرغم من أنَّها غير صحيحة.	قرار صحيح عدم رفض الفرضية الصفرية وهي صحيحة حقًّا.

على سبيل المثال، إذا ادَّعت إحدى شركات الأدوية أنَّ الدواء الجديد الذي تُنتِجه آمن، وأنَّه لا يُسبِّب آثارًا جانبيةً خطيرةً، فإنَّ الفرضية الصفرية H_0 لهذا الادِّعاء هي: الدواء الجديد آمن (لا يُسبِّب آثارًا جانبيةً خطيرةً). أمّا الفرضية البديلة H_1 لهذا الادِّعاء فهي: الدواء الجديد غير آمن (يُسبِّب آثارًا جانبية خطيرةً).

عند تحليل نتائج تجربة سريرية، يوجد احتمالان للخطأ، هما:

- **الخطأ من النوع I:** يحدث هذا الخطأ عند رفض الفرضية الصفرية وهي في الحقيقة صحيحة؛ أيْ إنَّ الباحث يعتقد – مثلًا – أنَّ الدواء غير آمن، في حين أنَّه آمن حقًّا. ويؤدّي هذا القرار إلى منع دواء مفيد من الوصول إلى المرضى.
- **الخطأ من النوع II:** يحدث هذا الخطأ عند قبول الفرضية الصفرية وهي في الحقيقة غير صحيحة؛ أيْ إنَّ الباحث يعتقد – مثلًا – أنَّ الدواء آمن، في حين أنَّه يُسبِّب آثارًا جانبيةً خطيرةً حقًّا. وهذا النوع من الخطأ يُعَدُّ أكثر خطورة؛ لأنَّه يُعرِّض المرضى للخطر باستعمال دواء ضارٍّ.

لغة الرياضيات

يشار إلى الخطأ من النوع I بالخطأ من النوع الأوَّل، ويشار إلى الخطأ من النوع II بالخطأ من النوع الثاني.

أتعلَّم

يُعَدُّ اختبار المجتمع بأكمله الطريقة الوحيدة لضمان الدِّقَّة الكاملة، لكنَّنا في الواقع لا نستطيع التعامل مع المجتمع كلِّه في معظم الحالات.

أتعلَّم

في المجالات الحسّاسة مثل الصِّحَّة، لا بُدَّ من فهم نوعي الخطأ بدِقَّة؛ لأنَّ الخطأ من النوع الثاني قد يُفْضي إلى عواقب وخيمة تُهدِّد حياة الناس، خلافًا للخطأ من النوع الأوَّل؛ إذ إنَّه أقلُّ خطرًا نسبيًّا.

مثال 2 : من الحياة

رقائق بطاطا: تَدَّعي شركة تعمل في إنتاج رقائق البطاطا أنَّ الوسط الحسابي لمقدار الصوديوم في كل كيس يحوي أحد أنواع رقائق البطاطا التي تُنتِجها لا يتجاوز الحدَّ المسموح به، وهو 200 mg. ولهذا ارتأت هيئة رقابية التحقُّق من التزام الشركة بادِّعائها، فقرَّرت إجراء اختبار للفرضيتين الآتيتين:

$H_0: \mu \leq 200, H_1: \mu > 200$:

1 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع I في هذا السياق.

يحدث هذا النوع من الخطأ عند رفض الفرضية الصفرية بالرغم من أنَّها صحيحة، وذلك في حال قرَّرت الهيئة الرقابية أنَّ الوسط الحسابي للصوديوم في المُنتَج أكثر من 200 mg، في حين أنَّه حقيقةً ضمن الحدِّ المسموح به.

2 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع II في هذا السياق.

يحدث هذا النوع من الخطأ عند قبول الفرضية الصفرية بالرغم من أنَّها غير صحيحة، وذلك في حال قرَّرت الهيئة الرقابية أنَّ الوسط الحسابي للصوديوم في المُنتَج أقلُّ من 200 mg، في حين أنَّه حقيقةً أعلى من الحدِّ المسموح به.

أتعلَّم

إذا وقعت الهيئة الرقابية في خطأ من النوع I، فقد تتعرَّض الشركة لعقوبات من دون وجود مخالفة حقيقية، لكنَّ وقوعها في خطأ من النوع II يُعَدُّ مخالفة خطيرة جدًّا؛ لأنَّ المُنتَج في هذه الحالة يحتوي على كمية زائدة من الصوديوم؛ ما قد يُؤثِّر سلبًا في صِحَّة المُستهلِك.

أتحقَّق من فهمي

وجبات غذائية: تَدَّعي إحدى الشركات المُنتِجة للوجبات الغذائية أنَّ مُتوسِّط السعرات الحرارية في وجباتها الجاهزة لا يقلُّ عن 400 سعرة حرارية لكل وجبة، بما يضمن أنْ تكون الوجبة مُغذِّية وكافية بحسب المعايير الصِّحِّية المعتمدة. ولهذا عَزَم أحد مراكز التغذية على التحقُّق من التزام الشركة بهذا الادِّعاء، فقرَّر إجراء اختبار للفرضيتين الآتيتين: $H_0: \mu \geq 400, H_1: \mu < 400$:

a) أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع I في هذا السياق.

b) أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع II في هذا السياق.

مستوى الدلالة

يُعـرَف أقصـى احتمـال مسـموح بـه لارتـكاب خطـأ مـن النـوع I **بمسـتوى الدلالة** (level of significance)، ويُرمَز إليه بالرمز α.

على سـبيل المثال، إذا كان $\alpha = 0.10$، فهذا يعني وجود احتمال بنسبة 10% لرفض الفرضية الصفرية بالرغم من أنّها صحيحة؛ أيْ إنَّ القرار يتضمَّن خطأً في الحكم على الفرضية. وبذلك، فإنَّ نسبة احتمال اتِّخاذ قرار صحيح ستكون 90%

يُذكَر أنَّ قيمة α تُختار وَفقًا لطبيعة الدراسـة، ومدى حساسـية النتائج، لكنَّ أكثر القِيَم شيوعًا واستعمالًا في التطبيقات الإحصائية هي: $\alpha = 0.10$، و$\alpha = 0.05$، و$\alpha = 0.01$.

أتعلَّم

يعتمـد موضـع المنطقة الحرجة على H_1، لا على H_0.

يسـاعد اختيار مسـتوى الدلالة α على تحديد **المنطقة الحرجـة** (critical region)؛ وهي النطـاق الإحصائي الذي يؤدّي وقـوع قيمة الإحصائي ضمنه إلى رفـض الفرضية الصفرية؛ ما يدلُّ على وجود فرق جوهري. تُحدَّد هـذه المنطقة بالاعتماد على قيمة α وَفقًا لخصائص الدراسـة، في ما يُشـبِه طريقة إيجاد فترات الثقـة. أمّا موضع المنطقـة الحرجة فيعتمد على صيغة الفرضية البديلة؛ إذ تشـير علامة عدم المساواة إلى نوع الاختبار الإحصائي المطلوب؛ فإنْ أشـارت الفرضية البديلة إلـى أنَّ القيمة أقلُّ من حدٍّ مُعيَّـن، كان **الاختبار أُحادي الطرف يسـارًا** (left–tailed test)، ووُضِعـت المنطقة الحرجة في الطرف الأيسـر للتوزيع. وإنْ أشـارت هذه الفرضية إلى أنَّ القيمة أكبر مـن حدٍّ مُعيَّن، كان **الاختبار أُحـادي الطرف يمينًا** (right–tailed test)، ووُضِعـت المنطقـة الحرجة في الطرف الأيمـن للتوزيع. أمّا إذا أشارت هذه الفرضية إلى وجود فرق من دون تحديد اتجاهه، فإنَّه يُستعمَل **اختبار ثنائي الطرف** (two–tailed test)، وتُوزَّع المنطقة الحرجة على طرفي التوزيع.

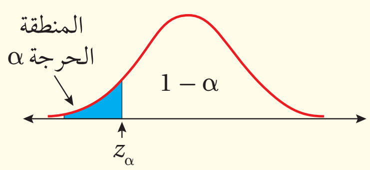
أتعلَّم

تكـون مسـاحة المنطقة الحرجة مُساوِية لمستوى الدلالة α دائمًا.

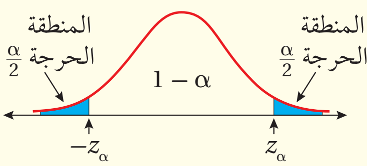
مفهوم أساسي

اختبارات الدلالة

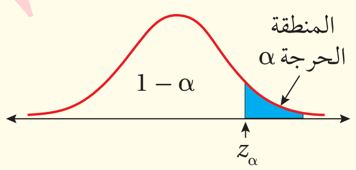
إذا كانـت: $H_1: \mu < k$، فـإنَّ الاختبـار يكون أُحـادي الطرف يسارًا.



إذا كانـت: $H_1: \mu \neq k$، فـإنَّ الاختبار يكون ثنائي الطرف.



إذا كانـت: $H_1: \mu > k$، فـإنَّ الاختبـار يكون أُحـادي الطرف يمينًا.



ما إنْ تُحدَّد المساحة المُرتبِطة بمستوى الدلالة α، حتّى يتمَّ حساب إحصائي الاختبار للوسط الحسابي للعيِّنة، الذي يُعبَّر عنه بقيمة z الخاصة بتلك العيِّنة. وبناءً على موقع هذه القيمة ضمن التوزيع الإحصائي، يُتَّخَذ القرار المناسب كما يأتي:

- إذا وقعت قيمة z ضمن المنطقة الحرجة، فإنَّ الفرضية الصفرية H_0 تُرفَض؛ لوجود دليل إحصائي على الفرق.
- إذا لم تقع قيمة z ضمن المنطقة الحرجة، فإنَّ الفرضية الصفرية H_0 لا تُرفَض؛ لعدم وجود دليل كافٍ لإثبات الفرق.

يُبيِّن صندوق (مفهوم أساسي) الآتي مُلخَّص الخطوات التي تُتَّبَع عادةً عند اختبار الفرضية.

أتعلَّم

يُعبَّر عن القيمة الحرجة z بالرمز z_α. فإذا كان الاختبار أُحادي الطرف يسارًا، كانت z_α سالبة. وإذا كان الاختبار أُحادي الطرف يمينًا، كانت z_α موجبة. أمّا إذا كان الاختبار ثنائي الطرف، فإنَّ z_α تأخذ قيمتين.

مفهوم أساسي — **خطوات اختبار الفرضية**

الخطوة 1: تحديد الفرضيتين والادِّعاء.

الخطوة 2: تحديد القيمة (القِيَم) الحرجة z_α والمنطقة الحرجة.

الخطوة 3: إيجاد قيمة z.

الخطوة 4: رفض الفرضية الصفرية أو عدم رفضها بناءً على قيمة الإحصائي z من حيث وقوعه في المنطقة الحرجة، ثمَّ التوصُّل إلى استنتاج بخصوص الادِّعاء.

لغة الرياضيات

نُعبِّر عن استنتاجات اختبار الفرضية بقولنا: "نرفض" أو: "لا نرفض"، لكنَّنا لا نستعمل كلمة (نَقْبل). وهذا مُرتبِط بالدلالات الإحصائية وعدم إمكانية قبول الفرضية؛ لعدم وجود دليل كافٍ لرفضها.

مثال 3 : من الحياة

تغذية: تَدَّعي إحدى شركات مُنتَجات الألبان أنَّ مقدار البروتين في عُلْبة اللبن الصغيرة التي تُنتِجها هو 6.5 g على الأكثر. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 36 عُلْبة لبن صغيرة، فكان الوسط الحسابي لمقدار البروتين في العيِّنة 6.7 g. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع 0.8 g، فأستعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء الشركة أم لا.

الخطوة 1: أُحدِّد الفرضيتين والادِّعاء.

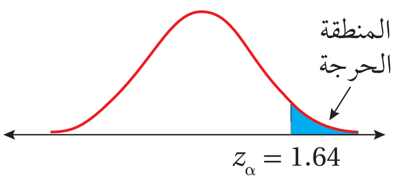
العبارة الرياضية التي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu \leq 6.5$. بما أنَّ هذه العبارة تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية الصفرية، أمّا نقيضها فهو: $\mu > 6.5$. ومنه، فإنَّ:

$H_0: \mu \leq 6.5$ (الادِّعاء) and $H_1: \mu > 6.5$

الخطوة 2: أُحدِّد القيمة (القِيَم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

بما أنَّ $H_1: \mu > 6.5$، فإنَّ الاختبار أُحادي الطرف يمينًا. ونظرًا إلى أنَّ مستوى الدلالة المطلوب يبلغ 5%؛ فإنَّ $\alpha = 0.05$.

ومنه، فإنَّ قيمة z_α (باستعمال جدول التوزيع الطبيعي) هي: $z_\alpha = 1.64$.



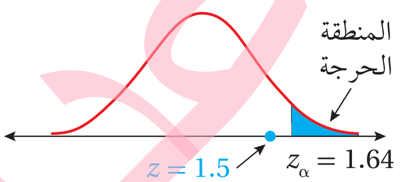
الخطوة 3: أجد قيمة الإحصائي z.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ صيغة الإحصائي z

$$= \frac{6.7 - 6.5}{\frac{0.8}{\sqrt{36}}}$$ بتعويض $\overline{x} = 6.7, \mu = 6.5, \sigma = 0.8, n = 36$

$$= 1.5$$ بالتبسيط

الخطوة 4: أرفض الفرضية الصفرية أو لا أرفضها، ثمَّ أتوصَّل إلى استنتاج بخصوص الادِّعاء.



بما أنَّ قيمة الإحصائي z لا تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإنَّني لا أرفض الفرضية الصفرية H_0.

وهذا يعني أنَّه لا توجد أدلَّة كافية لرفض الادِّعاء بأنَّ مقدار البروتين في عُلْبة اللبن الصغيرة التي تُنتِجها الشركة هو 6.5 g على الأكثر.

أتعلَّم

تُمثِّل المساحة المُظلَّلة بالأزرق، أسفل منحنى التوزيع الطبيعي في الشكل المجاور، القيمة: $\alpha = 0.05$. ولإيجاد القيمة الحرجة z_α التي تُقابِلها، فإنَّني أستعمل خصائص التوزيع الطبيعي لإيجاد قيمة z_α التي تُحقِّق الاحتمال: $P(Z > z_\alpha) = 0.05$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال الصيغة: $\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ لإيجاد قيمة الإحصائي z.

أتعلَّم

يوجد فرق بين z_α والإحصائي z؛ فبينما يدلُّ z_α على قيمة z التي تَحدُّ المنطقة الحرجة، فإنَّ قيمة الإحصائي z مُرتبطة بالعيِّنة، ولا علاقة لها بمستوى الدلالة.

أتحقَّق من فهمي

أدوية: تَدَّعي شركة تعمل في مجال تصنيع الأدوية أنَّ مقدار المادة الفعّالة في أحد أنواع حبوب الدواء التي تُنتِجها هو 100 mg على الأكثر. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 36 حبَّة دواء، فكان الوسط الحسابي لمقدار المادة الفعّالة في العيِّنة 103 mg. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع 4.5 mg، فأستعمل مستوى دلالة 10% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء الشركة أم لا.

مثال 4 : من الحياة

بيتزا: تَدَّعي سلسلة من مطاعم البيتزا أنَّ الطلب يصل إلى الزبون في أقلَّ من 30 دقيقة. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 60 عملية توصيل للطلبات، فكان الوسط الحسابي لوقت توصيل الطلبات 29.1 دقيقة، والانحراف المعياري 2.9 من الدقيقة. أستعمل مستوى دلالة 1% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء سلسلة المطاعم أم لا.

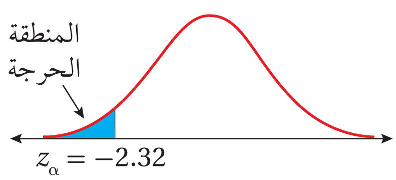
الخطوة 1: أُحدِّد الفرضيتين والادِّعاء.

العبارة الرياضية التي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu < 30$. بما أنَّ هذه العبارة لا تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية البديلة، أمّا نقيضها فهو: $\mu \geq 30$. ومنه، فإنَّ:

$$H_0: \mu \geq 30 \qquad \text{and} \qquad H_1: \mu < 30 \ (\text{الادِّعاء})$$

الخطوة 2: أُحدِّد القيمة (القِيَم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

بما أنَّ $H_1: \mu < 30$، فإنَّ الاختبار أُحادي الطرف يسارًا. ونظرًا إلى أنَّ مستوى الدلالة المطلوب يبلغ 1%؛ فإنَّ $\alpha = 0.01$. ومنه، فإنَّ قيمة z_α (باستعمال جدول التوزيع الطبيعي) هي: -2.32



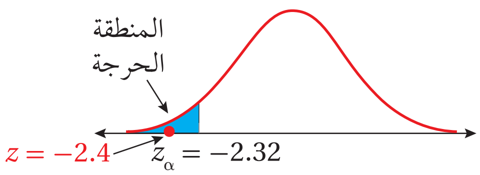
الخطوة 3: أجد قيمة الإحصائي z.

صيغة الإحصائي z
$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

بتعويض $\overline{x} = 29.1, \mu = 30, s = 2.9, n = 60$
$$= \frac{29.1 - 30}{\frac{2.9}{\sqrt{60}}}$$

بالتبسيط
$$\approx -2.4$$

الخطوة 4: أرفض الفرضية الصفرية أو لا أرفضها، ثمَّ أتوصَّل إلى استنتاج بخصوص الادِّعاء.



بما أنَّ قيمة الإحصائي z تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإنَّني أرفض الفرضية الصفرية H_0.

وهذا يعني أنَّه توجد أدلَّة كافية لدعم الادِّعاء بأنَّ الطلب يصل إلى العميل في أقلَّ من 30 دقيقة.

أتحقَّق من فهمي

سيّارات: تَدَّعي إدارة أحد مصانع السيّارات أنَّ الوسط الحسابي للزمن اللازم لتجميع سيّارة واحدة باستعمال خطِّ الإنتاج الآلي الجديد هو أقلُّ من 18 ساعة. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 35 سيّارة، فكان الوسط الحسابي لزمن التجميع 17.3 ساعة، والانحراف المعياري 2.6 من الساعة. أستعمل مستوى دلالة 1% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء إدارة المصنع أم لا.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال الصيغة: $\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ لإيجاد قيمة الإحصائي z.

بالنسبة إلى الاختبار الثنائي الطرف، تُقسَّم قيمة مستوى الدلالة α على 2؛ لتحديد موقع كلٍّ من المنطقتين الحرجتين عند طرفي التوزيع؛ ذلك أنَّ الفرضية البديلة في هذا النوع من الاختبارات تشير إلى وجود فرق من دون تحديد اتجاهه؛ ما يوجِب توزيع احتمال الخطأ من النوع الأوَّل على طرفي المنحنى بالتساوي، ومن ثَمَّ تُستعمَل القيمة $\frac{\alpha}{2}$ لتحديد القيمة الحرجة z_α في كل طرف.

مثال 5 : من الحياة

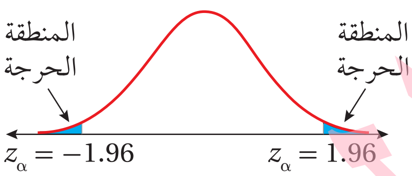
مسامير: يَدَّعي مصنع للحديد والصُّلب أنَّ كل عُلْبَة من عُلَب المسامير التي يُنتِجها تحتوي على 100 مسمار تحديدًا من دون نقص، كما هو مطبوع على الغلاف. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 40 عُلْبَة مسامير، فكان الوسط الحسابي لعدد المسامير في العُلْبَة 100.9 مسمار، والانحراف المعياري 2.1 من المسمار. أستعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء المصنع أم لا.

الخطوة 1: أُحدِّد الفرضيتين والادِّعاء.

العبارة الرياضية التي تُعبِّر عن الادِّعاء هي: $\mu = 100$. بما أنَّ هذه العبارة تحتوي على رمز المساواة، فإنَّها تُمثِّل الفرضية الصفرية، أمّا نقيضها فهو: $\mu \neq 100$. ومنه، فإنَّ:

$H_0: \mu = 100$ (الادِّعاء) and $H_1: \mu \neq 100$

الخطوة 2: أُحدِّد القيمة (القِيَم) الحرجة والمنطقة الحرجة.



بما أنَّ $H_1: \mu \neq 100$، فإنَّ الاختبار ثنائي الطرف. ونظرًا إلى أنَّ مستوى الدلالة المطلوب يبلغ 5%؛ فإنَّ $\alpha = 0.025$.

ومنه، فإنَّ قيمتي z_α (باستعمال جدول التوزيع الطبيعي) اللتين تتوافقان مع 0.025 من الأعلى ومن الأسفل، هما: $-1.96, 1.96$؛ أيْ إنَّ $z_\alpha = \pm 1.96$

الخطوة 3: أجد قيمة الإحصائي z.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ صيغة الإحصائي z

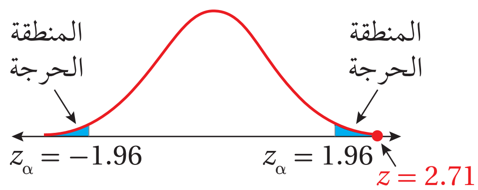
$$= \frac{100.9 - 100}{\frac{2.1}{\sqrt{40}}}$$ بتعويض $\overline{x} = 100.9, \mu = 100, s = 2.1, n = 40$

$$\approx 2.71$$ بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، وأنَّ حجم العيِّنة $n \geq 30$؛ لذا يُمكِن استعمال الصيغة: $\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ لإيجاد قيمة الإحصائي z.

الخطـوة 4: أرفض الفرضيـــة الصفرية أو لا أرفضها، ثمَّ أتوصَّل إلى اســتنتاج بخصوص الادِّعاء.



بما أنَّ قيمة z تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإنَّني أرفض الفرضية الصفرية H_0.

وهذا يعني أنَّه لا توجد أدلَّة كافية لدعم الادِّعاء بأنَّ عدد المسامير في العُلْبة هو 100 مسمار.

أتحقَّق من فهمي

جُبْـن: تَدَّعي إحدى شـركات تصنيع الأجبـان أنَّ كل عُلْبة جُبْـن تُنتِجها تحتوي على 24 شـريحة كاملة من دون نقص. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشـوائية مُكوَّنة من 93 عُلْبة جُبْن، فكان الوسـط الحسابي لعدد الشرائح في العُلْبة 24.1 شـريحة، والانحراف المعياري 0.5 شريحة. أستعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء الشركة أم لا.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أكتب الفرضية البديلة والفرضية الصفرية لكل عبارة ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد أيُّهما تُمثِّل الادِّعاء:

1. تَدَّعي شركة لتصنيع بطّاريات الهواتف المحمولة أنَّ بطّارية الهاتف المحمول الذي تُنتِجه يدوم عملها مُدَّة 36 ساعة تحديدًا في وضع الاستعمال المُتوسِّط.

2. تَدَّعي وزارة الصِّحَّة في إحدى الدول أنَّ مُتوسِّط أعمار الأفراد فيها لا يقلُّ عن 74 عامًا.

3. تَدَّعي شركة نقل في إحدى المدن أنَّ زمن انتظار الرُّكّاب في مَحطَّة الحافلات هو أقلُّ من 10 دقائق.

أدوية: تَدَّعي شركة تعمل في مجال تصنيع الأدوية أنَّ عقارها الجديد لا يُحدِث تغييرًا في الوسط الحسابي لمُعدَّل نبضات القلب (75 نبضة في الدقيقة). للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُجرِيت دراسة باستعمال الفرضيتين الآتيتين: $H_0: \mu = 75, H_1: \mu \neq 75$:

4 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع I في هذا السياق.

5 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع II في هذا السياق.

سيّارات: يَدَّعي وكيل لإحدى شركات تصنيع السيّارات أنَّ الوسط الحسابي لاستهلاك سيّارة جديدة للوقود لا يزيد على 7 L لكل 100 كيلومتر. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُجرِيت دراسة باستعمال الفرضيتين الآتيتين: $H_0: \mu \leq 7, H_1: \mu > 7$:

6 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع I في هذا السياق.

7 أشرح ما يعنيه وقوع خطأ من النوع II في هذا السياق.

8 **عصائر:** يَدَّعي مصنع لإنتاج العصائر أنَّ مقدار فيتامين C في عُلْبة عصير البرتقال الصغيرة التي يُنتِجها لا يتجاوز 60 mg. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 49 عُلْبة عصير، فكان الوسط الحسابي لمقدار فيتامين C في العيِّنة 63.2 mg. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع 5.6 mg، فأستعمل مستوى دلالة 10% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء المصنع أم لا.

9 **أطوال:** يَدَّعي أحد المُحاضِرين أنَّ أطوال الطلبة الذكور في إحدى كليات الجامعة التي يُدرِّس فيها يزيد على 170 cm. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية تضمُّ 25 طالبًا، فكان الوسط الحسابي لأطوال الطلبة في العيِّنة 174 cm. إذا كان توزيع المجتمع طبيعيًّا، وانحرافه المعياري 7 cm، فأستعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء المُحاضِر أم لا.

10 **أعمار:** يَدَّعي مدير التسويق في أحد المتاجر أنَّ الوسط الحسابي لأعمار زبائن المتجر هو 33 عامًا. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية تضمُّ 64 زبونًا، فكان الوسط الحسابي لأعمار الزبائن في العيِّنة 35.6 عامًا، والانحراف المعياري 8.2 أعوام. أستعمل مستوى دلالة 1% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء مدير التسويق أم لا.

11 **فول ســوداني:** تَدَّعي إحدى الشركات أنَّ الوسط الحســابي لكتل أكياس الفول الســوداني التي تُنتِجها يزيد على 130 g. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشــوائية مُكوَّنة من 70 كيسًا، فكان الوسط الحسابي لكتل الأكياس 138 g، والانحراف المعياري 12 g. أســتعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء الشركة أم لا.

أســتعمل المعلومات المُعطاة لإيجاد قيمة الإحصائي z للادِّعاء k في كلٍّ ممّا يأتي، ثــمَّ أُحدِّد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض الفرضية الصفرية H_0، ثمَّ أكتب استنتاجًا عن الادِّعاء k:

12 k: $\mu < 500, \alpha = 0.01, \bar{x} = 490, s = 27, n = 35$

13 k: $\mu \neq 5500, \alpha = 0.01, \bar{x} = 5430, s = 236, n = 200$

14 k: $\mu > 88, \alpha = 0.05, \bar{x} = 91.2, s = 3.9, n = 32$

مهارات التفكير العليا

15 **تبريــر:** قالت هديل: "عنــد اختبار فرضية ما، فإنَّ من الأفضل وقوع خطأ من النــوع I، لا من النوع II". لكنَّ لانا لا تُوافِقها الرأي، وقالت عكس ذلك. أيُّهما على صواب؟ أُبرِّر إجابتي.

تبرير: أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا، أم غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

16 إذا رُفِضت الفرضية الصفرية، فإنَّ الادِّعاء يُرفَض دائمًا.

17 قد تتضمَّن الفرضية البديلة رمز المساواة إذا كانت تُمثِّل الادِّعاء.

18 **تحدٍّ:** تتبع كمية السُّكَّر في عُلَب مُنتَج غذائي توزيعًا غير معروف، انحرافه المعياري 3 g. وقد ادَّعت الشركة المُنتِجة أنَّ الوسط الحسابي لكمية السُّكَّر في العُلْبة الواحدة لا يزيد على 50 g. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشــوائية مُكوَّنة من 100 عُلْبة، فكان الوســط الحسابي لكمية السُّــكَّر في العيِّنة 50.6 g، وتبيَّن للشركة عند إجراء اختبار الفرضيات أنَّ الوســط الحسابي لكمية السُّكَّر أكبر من 50 g. أجد القِيَم المُحتمَلة لمستوى الدلالة (α) لهذا الاختبار.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قرَّرت وزارة التربية والتعليم دراسة أداء الطلبة في اختبار وطني، فعملت على تصنيف المراحل التي يَدْرس فيها الطلبة إلى ثلاث مراحل دراسية (ابتدائية، أساسية، ثانوية)، ثمَّ أخذت عيِّنة عشوائية من كل مرحلة تتناسب مع عدد الطلبة فيها. العيِّنة العشوائية المُستعمَلة في هذه الدراسة هي:

a) بسيطة. b) طبقية.

c) مُنتظَمة. d) عنقودية.

2 أجرى باحث في مجال التسويق دراسة شملت عيِّنة عشوائية من 6 مُتسوِّقين في متجر، ودوَّن فيها عدد المُنتَجات التي اشتراها كلٌّ من هؤلاء المُتسوِّقين خلال زيارة واحدة إلى المتجر، فكان العدد كما يأتي:

5, 7, 4, 6, 8, 5

الانحراف المعياري للعيِّنة هو:

a) 1.29 b) 1.63

c) 1.47 d) 2.45

3 يبلغ الوسط الحسابي للزمن اللازم لإعداد الطلبات في أحد المطاعم 18 دقيقة، والانحراف المعياري 4 دقائق. إذا أُخِذت عيِّنات عشوائية، حجم كلٍّ منها 35 طلبًا، فإنَّ الخطأ المعياري للوسط الحسابي لوقت إعداد الطلبات (بالدقائق) هو:

a) 0.68 b) 1.2

c) 1.5 d) 2

4 توزيع ذي الحدَّين الذي يُمكِن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريبه من بين التوزيعات الآتية هو:

a) $X\sim B(60, 0.11)$ b) $X\sim B(45, 0.1)$

c) $X\sim B(30, 0.15)$ d) $X\sim B(40, 0.12)$

5 تعمل شركة في مجال تعبئة أكياس السُّكَّر، حيث تتبع كتل الأكياس فيها توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 1000 g، وانحرافه المعياري 10 g. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 25 كيسًا، فإنَّ احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لكتل الأكياس في العيِّنة بين 995 g و 1005 g هو:

a) 0.6826 b) 0.9545

c) 0.9876 d) 0.9976

6 أُجريت دراسة على عيِّنة عشوائية تضمُّ 75 شخصًا مِمَّنْ يستعملون بطاقات الهاتف المدفوعة مُسبَّقًا، وتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لِما يدفعه الشخص الواحد منهم هو 12 JD شهريًّا، وأنَّ الانحراف المعياري لقيمة الإنفاق في مجتمع الدراسة هو 3 JD. إذا كان مستوى الثقة 99%، فإنَّ الحدَّ الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي لإنفاق الشخص على بطاقات الهاتف شهريًّا (بالدينار) هو:

a) 0.57 b) 0.89

c) 0.01 d) 1.46

7 إذا كان: $X \sim N(55, \sigma^2)$، وكان احتمال أنْ يزيد الوسط الحسابي لعيِّنة حجمها 16 مُشاهَدة على 57 هو 0.05، فإنَّ قيمة σ التقريبية هي:

a) 2.5 b) 4.0

c) 8.0 d) 5.0

8 أرادت باحثة في مجال التغذية تقدير الوسط الحسابي لعدد الوجبات التي يتناولها الطالب الجامعي خارج المنزل أسبوعيًّا؛ شرط أنْ يكون مستوى الثقة 95%، والوسط الحسابي لعدد الوجبات لا يختلف عن الوسط الحسابي للعيِّنة بأكثر من 1.2± وجبة. إذا كان الانحراف المعياري لعدد الوجبات هو 4.8 وجبات، فإنَّ حجم العيِّنة اللازم لتحقيق هذا المستوى من الثقة هو:

a) 63 b) 62

c) 61 d) 64

9 تَدَّعي إحدى الهيئات التي تُعنى بحماية البيئة أنَّ الوسط الحسابي لتركيز ثاني أكسيد النيتروجين (NO_2) في الهواء لا يتجاوز $40\ \mu g/m^3$. العبارة التي تُمثِّل الفرضية الصفرية H_0 والفرضية البديلة H_1 هي:

a) $H_0: \mu \geq 40$ and $H_1: \mu < 40$

b) $H_0: \mu \leq 40$ and $H_1: \mu > 40$

c) $H_0: \mu = 40$ and $H_1: \mu \neq 40$

d) $H_0: \mu \geq 40$ and $H_1: \mu > 40$

يرغب مُدرِّب لياقة بدنية في تعرُّف عدد الخطوات التي يخطوها الأفراد المُتدرِّبون خلال حصَّة المشي اليومية. وتحقيقًا لهذا الغرض؛ اختار عيِّنة عشوائية تضمُّ 10 مشاركين، ودوَّن عدد خطواتهم، فكان العدد كما يأتي:

5850, 6100, 5700, 5950, 6000,

6200, 5800, 5900, 6100, 5600

10 أجد الوسط الحسابي لعدد الخطوات.

11 أجد تباين العيِّنة.

12 أجد الانحراف المعياري للعيِّنة.

أظهرت دراسة أنَّ الوسط الحسابي لضغط الدم الانقباضي لدى البالغين في إحدى المدن هو 120 mmHg، وأنَّ الانحراف المعياري له هو 15 mmHg. إذا اختيرت عيِّنات عشوائية من البالغين في هذه المدينة، حجم كلٍّ منها 50 شخصًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسط الحسابي لتوزيع الأوساط الحسابية للعيِّنات.

14 الخطأ المعياري للوسط الحسابي.

15 إذا كان عدد الدقائق التي يقضيها طلبة إحدى المدارس يوميًّا في حلِّ الواجبات المنزلية يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمُتوسِّط 90 دقيقة، وانحرافًا معياريًّا قَدْره 12 دقيقة، واختيرت عيِّنة عشوائية تضمُّ 36 طالبًا، فأجد احتمال أنْ يكون الوسط الحسابي لعدد الدقائق التي يقضيها طلبة العيِّنة في حلِّ الواجبات أكثر من 95 دقيقة.

16 اختير 108 أشخاص عشوائيًّا لتقديم اختبار، احتمال النجاح فيه 0.88. أستعمل التوزيع الطبيعي لتقريب احتمال ألّا يقلّ عدد الناجحين منهم عن 100 شخص.

17 **حيوانات:** تتبع كتل القِطَط المنزلية توزيعًا طبيعيًّا انحرافه المعياري 1.8 kg. أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 20 قِطًّا منزليًّا، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لكتلها 4.2 kg. أجد فترة الثقة بمستوى 99% للوسط الحسابي لكتل القِطَط المنزلية، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

18 أُخِذت عيِّنة عشوائية تضمُّ 50 مصباحًا من إنتاج أحد المصانع، فتبيَّن أنَّ الوسط الحسابي لمُدَّة عمل المصابيح هو 870 ساعة. إذا كان الانحراف المعياري لمُدَّة عمل المصابيح التي يُنتِجها المصنع هو 100 ساعة، فأجد فترة الثقة بمستوى 80% للوسط الحسابي لمُدَّة عمل المصابيح التي يُنتِجها المصنع، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

تتبع أطوال الأشجار (بالمتر) في إحدى الغابات توزيعًا طبيعيًّا. أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 50 شجرة، وحُسِب لها فترة الثقة بمستوى 98% فكانت: $35.2 \leq \mu \leq 39.6$. أجد كُلًّا ممّا يأتي:

19 الوسط الحسابي للعيِّنة.

20 قيمة الانحراف المعياري للمجتمع.

21 فترة الثقة بمستوى 99% للوسط الحسابي للمجتمع.

22 **صِحَّة:** يَدَّعي مُراقِب الجودة في أحد المستشفيات أنَّ الوسط الحسابي لزمن الانتظار في قسم الطوارئ لا يزيد على 20 دقيقة. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية تضمُّ 70 مُراجِعًا، فكان الوسط الحسابي لزمن الانتظار 23.4 دقيقة، والانحراف المعياري 9.5 دقائق. أستعمل مستوى دلالة 5% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء مُراقِب الجودة أم لا.

23 **أقلام:** تَدَّعي شركة لإنتاج أقلام الحبر أنَّ الوسط الحسابي لعدد الصفحات التي يُمكِن للقلم الواحد كتابتها هو 200 صفحة تحديدًا من دون نقص. للتحقُّق من صِحَّة هذا الادِّعاء، أُخِذت عيِّنة عشوائية مُكوَّنة من 93 قلمًا، فكان الوسط الحسابي لعدد الصفحات المكتوبة بالقلم 197.8 صفحة، والانحراف المعياري له 5.4 صفحات. أستعمل مستوى دلالة 10% لتحديد إذا كانت توجد أدلَّة كافية لرفض ادِّعاء الشركة أم لا.

ملحقات

رموز رياضية

دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
لتر	L
مليّلتر	mL
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
توافيق n من العناصر أُخِذ منها r كل مَرَّة.	$\binom{n}{r}$ ${}_nC_r$
احتمال الحادث A	$P(A)$
احتمال مُتمِّمة الحادث A	$P(\bar{A})$
الوسط الحسابي	μ
الانحراف المعياري	σ
التباين	σ^2

الجبر

العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

الأُسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \qquad x^m x^n=x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (x^m)^n=x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \qquad (xy)^n=x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m \qquad x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

(إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة، حيث: $n>1$) $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

(إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة، حيث: $n>1$) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},\ y\neq 0$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

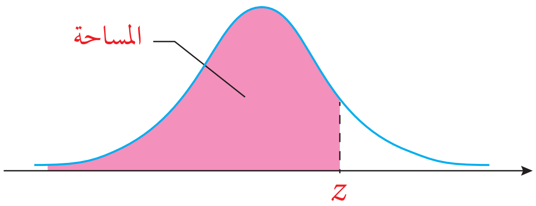
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، حيث: $a\neq 0$، فإنَّ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998