National Center for Curriculum Development

المركز الوطني لتطوير المناهج

المملكة الأردنية الهاشمية وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات نور محمد حسان إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2020/7)، تاريخ 2020/12/1 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2020/175)، تاريـخ 2020/12/17 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2020 / 2021 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 382 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية:
(2022/4/2079)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف العاشـر: كتـاب الطالب (الفصل الدراسـي الثانـي)/ المركـز الوطني لتطويـر المناهـج.-ط2؛ مزيدة ومنقحـة.- عمّـان: المركز، 2022

(**150**) ص.

ر.إ.: 2022/4/2079

الواصفات: تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1441 هـ / 2020 م

أعيدت طباعته 2021 م – 2022 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدِّمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمِّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أولى المركز هــذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلســة، ضمن ســياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُســهِمَ في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المُقدَّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشــروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة للمفاهيــم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المســائل يُعَدُّ إحدى أهمِّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص المُعلِّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُســتخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيَّما على شبكة الإنترنــت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقــدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت أبناءنا الطلبة أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتســارع فــي عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحــن إذ نُقدِّم هذهِ الطبعةَ من الكتــابِ، نأملُ أنْ تنال إعجاب أبنائنا الطلبــة ومُعلِّميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وســهولةً، ونعدهم بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 5

الاقتراناتُ
Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ الاقتراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلًا، تُستعمَلُ بعضُ أنواعِ الاقتراناتِ لوصفِ العلاقةِ بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المبيعةِ منْها. سأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ أنواعًا عديدةً منَ الاقتراناتِ والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ الاقتراناتِ الخطِّيةَ، والتربيعيةَ، وتمثيلَها بيانيًّا.
✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أوِ القيمةِ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ.
✓ تكوينَ معادلاتٍ تربيعيةٍ، وحلَّها.
✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
✓ المتتالياتِ الخطِّيةَ، والتربيعيةَ، وكتابةَ حدودِها.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◂ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها بيانيًّا.
◂ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمتَها.
◂ الاقتراناتِ النسبيةَ، ومجالَها، ومداها.
◂ تركيبَ الاقتراناتِ، والاقترانَ العكسيَّ، والاقترانَ الجذريَّ.
◂ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ.

مشروعُ الوحدةِ

نمذجةُ علاقاتٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بيانـــاتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باســتعمالِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ.

الموادُّ والأدواتُ جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنت، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختـــارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّرَيْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ ســلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّرَيْنِ آخرَيْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ x، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ y (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.3
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

3. أستعملُ برمجيةَ إكســلِ لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانِ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أُدخِلُ البيانـــاتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكســلِ، وأُظلِّـلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّطَ الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
   - أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
   - إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
   - عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.
4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

الدرسُ 1

اقترانات كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

المصطلحاتُ وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعُ ثُريّاتٍ عددُها x ثُريّا أسبوعيًّا، حيثُ $0 \leq x \leq 350$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ x مِنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدُ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُريّا أسبوعيًّا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$ $\quad f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad f(x) = 2$

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ

مفهومٌ أساسيٌّ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ (n) هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى a_0 الحدَّ الثابتَ.

يكـونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياسـيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِ درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

مثال 1

أُحـدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـالِ كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبُـهُ بالصورةِ القياسـيةِ، ثـمَّ أُحـدِّدُ المعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملهُ الرئيسُ -2، وحدُّهُ الثابتُ -4

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$ ، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

وإذا كانَ a مرفوعًا للقوّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 + 2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3 - x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

مجالُ (domain) أيِّ اقتـرانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ x، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ y.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ x، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

أتعلَّمُ

مجالُ كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، **ومداهُ** هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ منْ دراسةِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

مثال 2

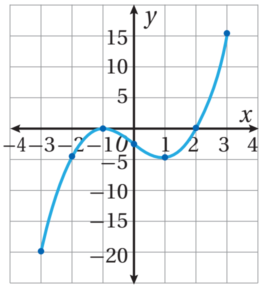
أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2, \ -3 \leq x \leq 3$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \leq x \leq 3$، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \leq y \leq 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

أتعلَّمُ

أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ مِنَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ مقاطعِهِ مِنْ محورِ x.

2 $f(x) = x^2 - 4x, , -1 \leq x \leq 4$

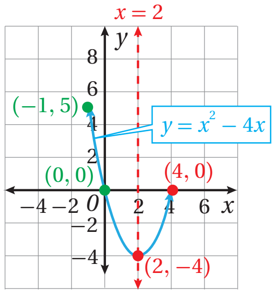
هذا اقترانٌ تربيعيٌّ على الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيثُ $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطعٌ مكافئٌ يمكنُ تمثيلُه بيانيًا كما يأتي:

- بما أنَّ $a > 0$، فمنحنى القطعِ المُكافِئِ مفتوحٌ للأعلى، ويُمَثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ الصُّغرى.

- مُعادلةُ محورِ تَّماثُلِ القطعِ المُكافِئِ هي:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيّا الرأسِ هُما: $(2, -4)$
- نقطةُ تقاطعِ منحنى الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, 0)$
- النقطةُ $(-1, 5)$ هيَ نقطةُ بدايةِ منحنى الاقترانِ، وتقعُ في الجانبِ نفسِهِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y منْ محورِ التماثُلِ (يسارَ محورِ التماثلِ)، أمّا النقطةُ $(4, 0)$ فهيَ نقطةُ نهايةِ منحنى الاقترانِ وتقعُ يمينَ محورِ التماثلِ.
- أُمثِّلُ الرأسَ والنقاطَ الثلاثَ في المستوى الإحداثيِّ، وأصلُ بينَها بمنحنًى متّصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةُ حيثُ: $-1 \leq x \leq 4$؛ أيِ الفترةُ $[-1, 4]$، ومداهُ $-4 \leq x \leq 5$، أيِ الفترةُ $[-4, 5]$.

يظهرُ في الشكلِ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $0, 4$

أتحقق من فهمي **أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:**

a) $f(x) = 2x^3 - 16 \, , -3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5 \, , -3 \leq x \leq 9$

أتذكَّرُ

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هي:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

وإحداثيّا رأسِهِ هما:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

أُفكِّرُ

ما الفرقُ بينَ الفترةِ $[-4, 5]$ والفترةِ $(-4, 5)$؟

جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

مثال 3

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9, g(x) = 7x^3 + 6x + 4$، فأَجِدُ $f(x) + g(x)$.

$f(x)+g(x)=(2x^2-5x^3+4x-9)+(7x^3+6x+4)$ — بتعويضِ $f(x)$ ، وَ $g(x)$

$= 2x^2 + (-5x^3+7x^3) + (4x+6x) + (-9+4)$ — بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5$ — بجمعِ المعاملاتِ

$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$ — بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13, g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$، فأَجِدُ $f(x) + g(x)$.

أتعلَّمُ

النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ مِنْ عكسِ إشاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُني أنْ أَجِدَ ناتجَ جمعِ اقترانيْنِ باستعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 , g(x) = 6x - 7x^2 - 8$، فأَجِدُ $f(x) - g(x)$.

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (+6x - 7x^2 - 8)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 2x^2 - 5x - 3 + (-6x + 7x^2 + 8)$ بتغييرِ الطرحِ إلى جمعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x - 3 \\ + \; 7x^2 - 6x + 8 \\ \hline 9x^2 - 11x + 5 \end{array}$$

بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ

بجمعِ المعاملاتِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20, g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$، فأَجِدُ $g(x) - f(x)$.

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ.

مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$f(x).g(x) = 3x^3 (2x^2 - 5x - 4)$$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$$= 3x^3(2x^2) + 3x^3(-5x) + 3x^3(-4)$$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ

$$= (3 \times 2)(x^3 . x^2) + (3 \times -5)(x^3 . x) + (3 \times -4)x^3$$ خاصيةُ التجميعِ

$$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا

$$\begin{array}{lccccc}
 & 3x^4 & - 5x^2 & + x & - 5 & \\
(\times) & & 4x^2 & - 7 & & \\
\hline
 & 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 & & & & \\
(+) & -21x^4 & + 35x^2 & - 7x & + 35 & \\
\hline
 & 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 & - 7x & + 35 & &
\end{array}$$

بضربِ $4x^2$ في حدودِ f

بضربِ -7 في حدودِ f

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

أتذكّرُ

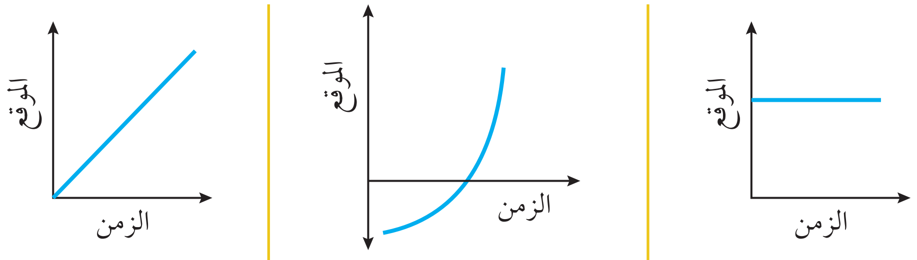
أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

تطبيقٌ فيزيائيٌّ: اقترانُ الموقعِ

إذا تحرّكَ جسمٌ في مسارٍ مستقيمٍ وعبّرْنا عنْ موقعِهِ المتغيّرِ على ذلكَ المسارِ بالإحداثيِّ (s) للنقطةِ التي يكونُ عندَها الجسمُ، فإنّنا نحصلُ على اقترانٍ يربطُ موقعَ الجسمِ $s(t)$ بالزمنِ (t) يُسمّى **اقترانَ الموقعِ** (position function).

إذا كانتْ سـرعةُ الجسـمِ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ يكونُ خطيًّا (منحناهُ مستقيمٌ)، أمّا إذا كانتْ سـرعتُهُ ليسـتْ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ لا يكونُ خطيًّا، فقدْ يكونُ كثيرَ حـدودٍ مثلًا أو اقترانًا دائريًّا. ويعني وجودُ قيمةٍ سـالبةٍ لاقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما أنَّ الجسمَ يقعُ في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ عندَ تلكَ اللّحظةِ.



جسمٌ لا يتحرّكُ | جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ غيرِ ثابتةٍ | جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ ثابتةٍ

أتعلَّمُ

إذا كانَ منحنـى اقترانِ الموقعِ-الزمـنِ ليـس مسـتقيمًا فـإنَّ ذلكَ لا ينفي أنَّ الجسـمَ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، ذلكَ أنّ المنحنـى لا يمثـلُ المسـارَ الـذي يتحرّكُ عليهِ الجسمُ، بلْ إزاحتَهُ عنْ نقطةِ الأصـلِ التي تتغيّرُ بمرورِ الزمنِ.

مثال 6

يمثـلُ الاقتـرانُ $s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ موقعَ جسـمٍ يتحرّكُ في مسـارٍ مسـتقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسـمِ بالأمتارِ بعـدَ t ثانيةً.

1 أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

بدأَ الجسـمُ الحركـةَ عندَ $t = 0$، ولتحديدِ موقعِهِ عندَ تلكَ اللحظـةِ أعوّضُ $t = 0$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(0) = 3(0)^2 - 24(0) + 36$ بتعويضِ $t = 0$

$= 36$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ يساوي 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

2 أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

لتحديدِ موقعِ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ أعوّضُ $t = 5$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(5) = 3(5)^2 - 24(5) + 36$ بتعويضِ $t = 5$

$= -9$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ يساوي 9 m في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

3 **متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟**

يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ عندَما تكونُ قيمةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا. أحلُّ المعادلةَ $s(t) = 0$ لأحدّدَ قيمةَ t

$3t^2 - 24t + 36 = 0$	أكتبُ المعادلةَ
$t^2 - 8t + 12 = 0$	بقسمةِ طرَفيِ المعادلةِ على 3
$(t-2)(t-6) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$t-2 = 0 \quad \text{or} \quad t-6 = 0$	خاصيّةُ الضربِ الصفريِّ
$t = 2 \quad \text{or} \quad t = 6$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ في لحظتيْنِ زمنيّتَيْنِ هُما: بَعدَ ثانيتينِ وبعدَ 6 ثوانٍ منْ بدْءِ حركتِهِ.

4 **هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟**

حتّى يعودَ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها وهيَ 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ (كما أوجدْنا في الفرعِ الأوّلِ) يجبُ أنْ يكونَ للمعادلةِ $s(t) = 36$ حلٌّ واحدٌ (أوْ أكثرُ).

$3t^2 - 24t + 36 = 36$	أكتبُ المعادلةَ
$3t^2 - 24t = 0$	بطرحِ 36 منْ كلا الطرفينِ
$t^2 - 8t = 0$	بقسمةِ الطرفينِ على 3
$t(t-8) = 0$	بإخراجِ t عاملًا مشتركًا
$t = 0 \quad \text{or} \quad t - 8 = 0$	خاصيّةُ الضّربِ الصّفريِّ
$t = 0 \quad \text{or} \quad t = 8$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

الزمنُ $t = 0$ يعني لحظةَ بدءِ حركةِ الجسمِ، لذلكَ فإنَّ الجسمَ يعودُ إلى النقطةِ التي بدأَ منها الحركةَ مرّةً واحدةً فقطْ، وذلكَ بعدَ 8 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِهِ.

أتحقق من فهمي

يمثّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 7t^2 + 10t$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

a) أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

b) أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

c) متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

d) هل يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟

أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = 4 - x$

2) $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3) $h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$

4) $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5) $j(t) = \sqrt{7}\, t - 16t^2$

6) $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7) $f(x) = 13(2)^x + 6$

8) $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

9) $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ -1 \le x \le 5$

10) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3,\ 0 \le x \le 3$

11) $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \le x \le 3$

12) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \le x \le 4$

إذا كانَ $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4,\ h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13) $h(x) + g(x)$

14) $g(x) - h(x)$

15) $f(x) \cdot h(x)$

16) $x(f(x)) + h(x)$

17) $(f(x))^2 - g(x)$

18) $h(x) - x(g(x))$

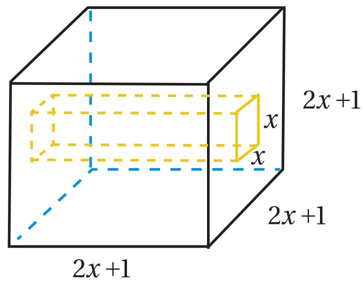
يُمثّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 6$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

19) أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

20) أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 4 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

21) متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

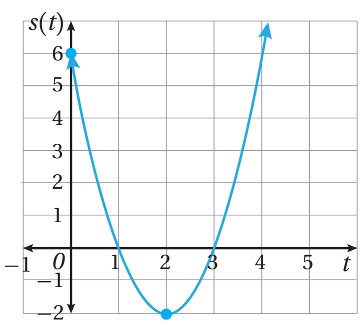
22) هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟



23 **هندســةٌ:** مكعبٌ منَ الخشــبِ، طولُ ضلعِــهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا



تبريرٌ: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مســتقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالأمتارِ و t الزمنُ بالثواني. أستعملُ الشكلَ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ مبرِّرًا إجابتي:

25 ما الفترةُ (الفتراتُ) الزمنيّةُ التي يكونُ فيها الجسمُ في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ؟

26 أحدّدُ الموقعَ الابتدائيَّ للجسمِ.

27 ما أبعدُ موقعٍ للجسمِ عن نقطةِ الأصلِ وهو في الجهة السالبة منها؟

28 **مســألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ كثيرَيْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

29 **تحدٍّ:** أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

30 **تبريــرٌ:** إذا كانَ f, g كثيرَيْ حــدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحــدودِ h الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرسُ 2

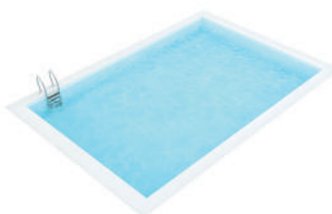
قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتُ النسبيةُ

Dividing Polynomials and Rational Functions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

مسألةُ اليومِ بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4-3x^3-33x^2+54x$ وحدةً مكعبةً، ومساحةُ قاعدتِها $3x^2-6x$؛ أجدُ ارتفاعَها.



إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$. لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقسومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياسيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 1

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيَها.

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - 10x + 74 \\
x+5 \,\big) & 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 \\
 & \underline{(-)\ 2x^3 + 10x^2} \\
 & -10x^2 + 24x \\
 & \underline{(-)\ -10x^2 - 50x} \\
 & 74x - 15 \\
 & \underline{(-)\ 74x + 370} \\
 & -385
\end{array}
$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ $(24x)$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ (-15)

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

إرشادٌ

تتوقفُ عمليةُ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ عندما تصبحُ درجةُ باقي القسمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5}, \; x \neq -5$$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

$$(x+5)(2x^2-10x+74)+(-385) = 2x^3-10x^2 + 74x +10x^2 -50x +370 -385$$
$$= 2x^3 +(-10 +10)x^2 +(74 -50)x -15$$
$$= 2x^3 + 24x -15 \checkmark$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4 -7x^3 +12x-25$ على $h(x) = x- 4$ وباقِيها.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسومِ عليْهِ، وإضافةِ الباقي. فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسومِ كانَ الحلُّ صحيحًا.

ألاحظُ في المثالِ السابقِ أنَّ درجةَ ناتجِ القسمةِ $(2x^2 - 10x + 74)$ مساويةٌ للفرقِ بينَ درجتَي المقسومِ $(2x^3 + 24x - 15)$ والمقسومِ عليهِ $(x+5)$، وهذا يقودُ إلى النتيجةِ الآتيةِ.

نتيجةٌ

عندَ قسمةِ كثيرِ حدودٍ على كثيرِ حدودٍ آخرَ تكونُ درجةُ ناتجِ القسمةِ مساويةً للفرقِ بينَ درجتَي المقسومِ والمقسومِ عليهِ.

الاقتراناتُ النسبيةُ (rational functions) هي اقتراناتٌ يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيرَيْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$. ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 -3x} \quad , \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 -9} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الأعدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا (أصفار المقامِ).

مثال 2

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممَّا يأتي:

1) $q(x) = \frac{x+2}{x^2 -9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

أتذكَّرُ

يُمكِنُ استعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2-9 = 0$

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ 3 ,3−، ويُكتَبُ كمجموعةٍ على الصورة الآتيةِ: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

2 $y = \dfrac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

$$x(2x^2 - 5x - 3) = 0$$ بإخراجِ x عاملٍ مشتركٍ

$$x(2x+1)(x-3) = 0$$ بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ

$$x = 0 \;,\; 2x+1 = 0 \;,\; x-3 = 0$$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$$x = 0, x = \frac{-1}{2}, x = 3$$ بحلِّ المعادلاتِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \frac{-1}{2}$، أوْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \frac{-1}{2}\}$

أُفكّرُ

هلْ مجالُ الاقترانِ $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x) = x-3$؟

أتحقق من فهمي

أجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممّا يأتي:

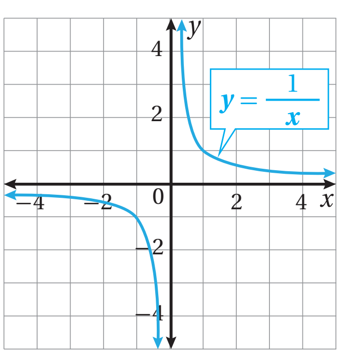
a) $h(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

b) $y = \dfrac{x^2-4}{6x-3x^2}$

معظمُ الاقتراناتِ النسبيّةِ منحنياتُها غيرُ متّصلةٍ، بمعنى: أنها تحتوي قفزاتٍ أوْ انقطاعاتٍ أو ثقوبٍ، ويحدثُ ذلكَ عندَ أصفارِ المقامِ.

أحدُ المواقعِ التي لا يكونُ عندَها منحَنى الاقترانِ متّصلًا هوَ **خطُّ التقاربِ** (asymptote)؛ وهوَ مستقيمٌ يقتربُ منهُ منحَنى الاقترانِ كُلّما ازدادتْ القيمةُ المطلقةُ لأحدِ المتغيّرينِ x أو y.

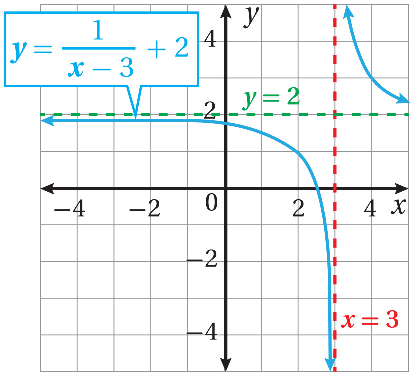
في الشكلِ المجاورِ كلٌّ منَ المحورِ x والمحورِ y هوَ خطُّ تقاربٍ لمنحَنى الاقترانِ $y = \frac{1}{x}$، وألاحظُ أنَّ مُنحنى الاقترانِ يقتربُ كثيرًا منْ خطَّيِّ التقاربِ، لكنّهُ لا يلمسهُما.



أتعلّمُ

يُسمّى الاقترانُ $f(x) = \frac{1}{x}$ اقترانَ المقلوبِ وهوَ أبسطُ الاقتراناتِ النسبيّةِ، ومنْهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ.

بالنّظرِ إلى مُنحنى الاقترانِ $y=\frac{1}{(x-3)}+2$ في الشكلِ المجاورِ ألاحظُ وجودَ خطِّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفرِ المقامِ $x=3$ وخطِّ تقاربٍ أُفقيٍّ عندَ $y=2$ ، ويقودُنا ذلكَ إلى القاعدةِ الآتيةِ لتحديدِ خطوطِ التقاربِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ.



خطوطُ التّقارُبِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ

مفهومٌ أساسيٌّ

خطُّ التقاربِ الرأسيِّ: يكونُ للاقترانِ النسبيِّ الذي على صورةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$
خطُّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفرِ المقامِ هوَ المستقيمُ $x=b$

خطُّ التقاربِ الأفقيِّ: يكونُ للاقترانِ النسبيِّ الذي على صورةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$
خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ المستقيمُ $y=c$

مثال 3

أجدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x)=\frac{2}{x-3}+5$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$؛ ألاحظُ أنَّ $b=3, c=5$

إذنْ؛ خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x=3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y=5$

2 $g(x)=\frac{7x}{x+4}$

قاعدةُ هذا الاقترانِ تختلفُ ظاهريًّا عنِ الصيغةِ $f(x)=\frac{1}{(x-b)}+c$، لكنّهُما متشابهتانِ، ويمكنُ تحويلُ قاعدةِ الاقترانِ إلى الصيغةِ الأُخرى بقسمةِ البسطِ على المقامِ باستعمالِ القسمةِ الطويلةِ كما يظهرُ جانبًا.

$$\begin{array}{r} 7 \\ x+4\,\overline{)\,7x\qquad} \\ (-)\ 7x+28 \\ \hline -28 \end{array}$$

إذنْ؛ $g(x)=7-\frac{28}{x+4}$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$؛ ألاحظُ أنَّ $b=-4, c=7$

إذنْ؛ خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x=-4$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y=7$

أتحقق من فهمي

أجدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

a) $f(x) = 2 + \frac{9}{x+1}$ b) $h(x) = \frac{1}{x} - 3$ c) $j(x) = \frac{4x+11}{x-5}$

لتمثيلِ الاقتراناتِ النسبيّةِ بيانيًّا؛ أجدُ خطوطَ التقاربِ، وأرسمُها أولًا، ثمّ أُكوّنُ جدولَ قيمٍ باختيارِ قيمِ x على يمينِ خطِّ التقاربِ الرأسيِّ وعلى يسارِه، وأعّينُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أتعلَّمُ

إذا لمْ توجدْ عواملُ مشتركةٌ بينَ بسطِ الاقترانِ النسبيِّ ومقامِه، فإنَّهُ توجدُ خطوطُ تقاربٍ رأسيةٌ عندَ أصفارِ مقامِهِ جميعِها.

مثال 4

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

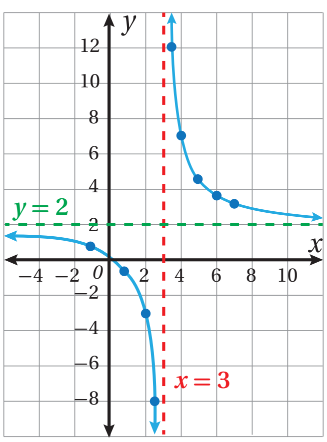
الخطوةُ 1: أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ.

خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمَ $x = 3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمَ $y = 2$

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولَ قِيَمٍ باختيارِ بعضِ القيمِ حولَ $(x=3)$؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$f(x)$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطوةُ 3: أرسمُ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أُعيِّنُ النقاطَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يمينِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يسارِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.



المجالُ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 3، أوْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 2، أوْ $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

تحتوي منحنيــاتُ بعضِ الاقتراناتِ النســبيّةِ فجواتٍ (ثقوب) تُعبّرُ عن القيــمِ التي لا يكونُ الاقترانُ مُعرّفًا عندَها.

مفهومٌ أساسيٌّ — **فجواتُ منحنى الاقترانِ النسبيِّ**

إذا كانَ $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ، حيثُ $q(x) \neq 0$، وَكانَ $x-c$ عاملًا مُشــتركًا لكلٍّ منْ $p(x)$ وَ $q(x)$، فإنَّ مُنحنى $f(x)$ يحتوي فجوةً عندَ $x=c$

مثال 5

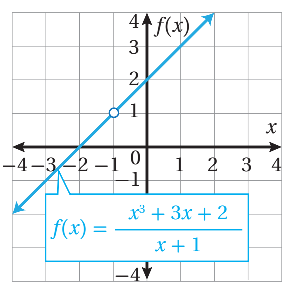
أُمثّلُ الاقترانَ $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ بيانيًّا.

أختصرُ العواملَ المشتركةَ بينَ البسطِ والمقامِ.

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$ أُحلّلُ البسط

$$=\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=x+2$$ أختصرُ العاملَ المشتركَ $(x+1)$

إذن؛ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ هوَ ذاتُهُ التمثيلُ البيانــيُّ للاقتــرانِ $f(x)=x+2$ مع وجودِ فجــوةٍ (دائرةٍ صغيرةٍ مُفرَغةٍ) في المنحنى عند $x=-1$ كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.



أتحقق من فهمي

أُمثّلُ كلًّا من الاقترانينِ الآتيينِ بيانيًّا:

a) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

b) $f(x)=\frac{x^4+3x^2}{x^2}$

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ القسمةِ والباقيَ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(x^2+5x-1)\div(x-1)$
2. $(3x^2+23x+14)\div(x+7)$
3. $(x^3-3x^2+5x-6)\div(x-2)$
4. $(9x^3-9x^2+17x+6)\div(3x-1)$
5. $(-6x^3+x^2+4)\div(2x-3)$
6. $(8x^4+2x^3-14x^2+2)\div(4x^2+x-1)$

أَجِدُ مجالَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

7 $f(x) = \dfrac{3x-6}{2x}$

8 $h(x) = \dfrac{2x-8}{2x^2-3x+1}$

9 $g(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2+9}$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ:

10 $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

11 $h(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

12 $g(x) = \dfrac{4}{x+2} - 1$

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا:

13 $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$

14 $f(x) = \dfrac{-x^2+x^3}{x^3}$

15 $f(x) = \dfrac{3x^4+6x^3+3x^2}{x^2+2x+1}$

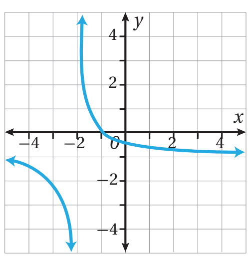
أُعيِّنُ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ النسبيّةِ الآتيةِ رمزَ التمثيلِ البيانيِّ المناسبِ لهُ:

16 $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2$

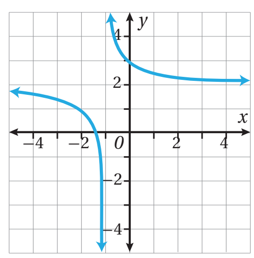
17 $h(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$

18 $g(x) = \dfrac{1}{x+2} - 1$

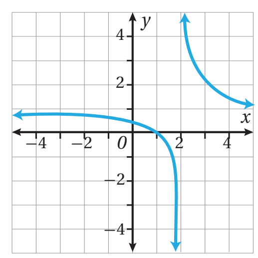
A



B



C



مهارات التفكير العليا

19 **تبريرٌ:** مِساحةُ ورقةٍ مستطيلةٍ تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحداتٍ مُربَّعةً، وطولُها يساوي $(x+2)^2$ وحدةً. أَجِدُ قيمةَ a مُبرِّرًا إجابتي.

20 **أيُّها لا ينتمي:** أُحدِّدُ فيما يأتي الاقترانَ المختلفَ عنِ الاقتراناتِ الثلاثةِ الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي:

$l(x) = \dfrac{7}{x^2-9}$	$h(x) = \dfrac{9}{x^2+1}$	$g(x) = \dfrac{5}{x+2}$	$f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ: $y = 3$، وخطّا تقاربٍ رأسيانِ هما: $x = -2, x = 7$.

الدرسُ
3

تركيبُ الاقتراناتِ
Composition of Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ مفهومِ الاقترانِ المُركَّبِ، وشــرطِ تركيبِ اقترانيْنِ، وإيجادُ قيمتِهِ لعددٍ مُعطى، وإيجادُ قاعدةِ اقترانٍ مُركَّبٍ إذا عُلِمَتْ قاعدتا مُركَّبتيْهِ.

المصطلحاتُ تركيبُ الاقتراناتِ، الاقترانُ المُركَّبُ، المُركِّبتانِ.

مسألةُ اليومِ عندما تسقطُ قطرةُ ماءِ المطرِ على بحيرةٍ تتكوَّنُ موجةٌ دائريةٌ يتزايدُ طولُ نصفِ قُطْرِها بالنســبةِ إلى الزمنِ وَفقَ الاقترانِ: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$، حيثُ r نصفُ القُطْرِ بالســنتيمتراتِ، وَ t الزمنُ بالدقائقِ. أجِدُ مِساحةَ الموجةِ عندما $t = 2$.

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّهُ يُمكِنُ اســتعمالُ أيِّ اقترانيْنِ، مثــلِ $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 1$، لتكوينِ اقتراناتٍ جديدةٍ، وذلكَ بإجراءِ عملياتِ جمعٍ، أوْ طرحٍ، أوْ ضربٍ، أوْ قســمةٍ عليْهِما كما في الأمثلةِ الآتيةِ:

$$(f-g)(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad (f+g)(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x-1} \qquad (f\,.\,g)(x) = x^2(2x-1)$$

ويمكنُ أيضًا تكوينُ اقترانٍ جديدٍ منَ الاقترانيْنِ f، وَ g عنْ طريقِ دمجِهِما، بحيثُ تكونُ مخرجةُ أحدِهِما مدخلةً للآخرِ.

وتُسمّى عمليةُ الدمجِ هذهِ **تركيبَ الاقتراناتِ** (functions composition)، ويُسمّى الاقترانُ الناتجُ **الاقترانَ المُركَّبَ** (composite function).

يُمكِنُ تركيبُ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ بطريقتيْنِ، هما:

1) تطبيقُ g أولًا، ثمَّ تطبيقُ f على نتيجةِ g، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(f \circ g)$.

2) تطبيقُ f أولًا، ثمَّ تطبيقُ g على نتيجةِ f، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(g \circ f)$.

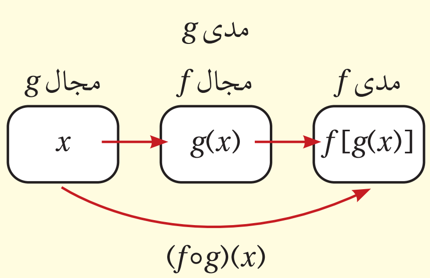
لغة الرياضيات

يُقرَأُ $(f \circ g)$ كما يلي:
f بعدَ g
ويُقرَأُ $(g \circ f)$ كما يلي:
g بعدَ f

مفهومٌ أساسيٌّ **تركيبُ الاقتراناتِ**

إذا كانَ $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيْنِ، وكانَ مدى $g(x)$ يقعُ ضمنَ مجالِ $f(x)$ فإنَّ الاقترانَ المُركَّبَ $(f \circ g)(x)$ يُعطى كما يأتي:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



مثال 1

إذا كانَ $f(x) = x^2, g(x) = x + 4$، فأَجِدُ:

1 $(g\circ f)(3)$

$(g\circ f)(3) = g(f(3))$ — تعني $(g\circ f)(3)$ تعني g لِـ $f(3)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g(3^2)$ — بتعويضِ $x = 3$ في معادلةِ f

$= g(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9 + 4 = 13$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

2 $(g\circ f)(-2)$

$(g\circ f)(-2) = g(f(-2))$ — $(g\circ f)(-2)$ تعني g لِـ $f(-2)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g((-2)^2)$ — بتعويضِ $x = -2$ في معادلةِ f

$= g(4)$ — بالتبسيطِ

$= 4 + 4 = 8$ — بتعويضِ $x = 4$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

3 $(f\circ g)(5)$

$(f\circ g)(5) = f(g(5))$ — $(f\circ g)(5)$ تعني f لِـ $g(5)$؛ أيْ g، ثمَّ f

$= f(5+4)$ — بتعويضِ $x = 5$ في معادلةِ g

$= f(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9^2 = 81$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ f، والتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $h(x) = \sqrt{x}, j(x) = 2x + 1$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $(h\circ j)(4)$ **b)** $(j\circ h)(4)$ **c)** $(h\circ h)(16)$ **d)** $(j\circ j)(-8)$

يُمكِنُ إيجادُ قاعدةِ الاقترانِ المُركَّبِ بدلالةِ المُتغيِّرِ x، ثمَّ حسابِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ عندَ أيِّ قيمةٍ عدديةٍ معطاةٍ.

مثال 2

إذا كانَ $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x^2 - 6$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f\circ g)(x)$، وَ $(g\circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f\circ g)(-2)$، وَ $(g\circ f)(0)$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ — تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(2x^2 - 6)$ بتعويضِ $g(x) = 2x^2 - 6$

$= 3(2x^2 - 6) + 5$ بتعويضِ $(2x^2 - 6)$ مكانَ x في معادلةِ f

$(f \circ g)(x) = 6x^2 - 13$ بالتبسيطِ

$(f \circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11$ بتعويضِ $x = -2$، والتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= g(3x+5)$ بتعويضِ $f(x) = 3x + 5$

$= 2(3x+5)^2 - 6$ بتعويضِ $(3x + 5)$ مكانَ x في معادلةِ g

$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6$ بتربيعِ $(3x + 5)$

$(g \circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44$ بتعويضِ $x = 0$، والتبسيطِ

أُفكِّرُ

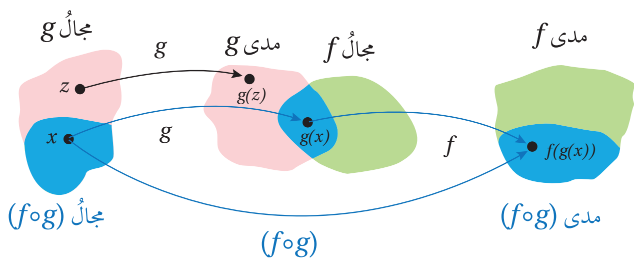
هلْ تُحقِّقُ عمليةُ تركيبِ الاقتراناتِ الخاصيةَ التبديليةَ؟

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = 2 - 3x$، فأَجِدْ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدْ $(f \circ g)(3)$، وَ $(g \circ f)(-1)$.

مجالُ الاقترانِ المُركّبِ

يتكوَّنُ مجالُ $(f \circ g)(x)$ منْ مجموعةِ قيمِ x منْ مجالِ g التي تكونُ قيمُ $g(x)$ لها موجودةً في مجالِ f. ولذلكَ تُستثنى منْ مجالِ $(f \circ g)(x)$ قيمُ x التي لا يكونُ الاقترانُ g معرّفًا عندَها (ليستْ ضمنَ مجالِ g)، وقيمُ x التي لا يكونُ $f(g(x))$ معرّفًا عندَها ($g(x)$ ليستْ ضمنَ مجالِ f).



مثال 3

إذا كانَ $f(x) = \frac{6}{x-2}, g(x) = \frac{9}{x-3}$؛ فأجدُ مجالَ $(f \circ g)(x)$.

مجالُ الاقترانِ $g(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ المقامَ صفرًا.

$x - 3 = 0$ بمساواةِ المقامِ معَ الصفرِ

$x = 3$ بطرحِ 3 منَ الطرفينِ

مجالُ الاقترانِ $f(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x-2=0$، أي $x=2$ ، ولذلكَ تُستثنى قيمُ x التي تجعلُ $g(x)=2$

بمساواةِ $g(x)$ معَ 2 $\quad \frac{9}{x-3}=2$

بضربِ الطرفينِ في $(x-3)$ $\quad 9=2(x-3)$

بالتوزيعِ $\quad 9=2x-6$

بإضافةِ 6 للطّرفينِ $\quad 15=2x$

بقسمةِ الطرفينِ على 2 $\quad 7.5=x$

إذنْ؛ مجالُ $(f\circ g)(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ 3 , 7.5 ، أيْ:
$\{x: x\neq 3,\ x\neq 7.5\}$.

أتحقق من فهمي

أجدُ مجالَ $(g\circ f)(x)$ للاقترانينِ في المثالِ 3 أعلاهُ.

يُمكنُ النظرُ إلى كثيرٍ منَ الاقتراناتِ بوصفِها اقتراناتٍ مُركَّبةً، وإيجادُ اقترانيْنِ بسيطيْنِ يُكافِئُ تركيبُهُما الاقترانَ المُركَّبَ، عندئذٍ يكونُ الاقترانانِ البسيطانِ **مُركّبتَيِ الاقترانِ المُركَّبِ** (components of the composite function).

فمثلًا، يُمكنُ اعتبارُ الاقترانِ $f(x)=\sqrt{4x^2+9}$ اقترانًا مُركَّبًا، ومُركّبتاهُ هما: $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=4x^2+9$، ويكونُ $f(x)=(h\circ g)(x)$.

> **إرشادٌ**
> قدْ لا تكونُ القيودُ على مجالِ الاقتراناتِ واضحةً بعدَ إجراءِ عمليةِ تركيبِ الاقتراناتِ وتبسيطِها؛ لذا منَ المُهِمِّ الانتباهُ إلى مجالِ الاقترانيْنِ قبلَ تركيبِهِما.

مثال 4

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x)=f(g(x))$

1 $h(x)=\frac{1}{x+3}$

أفترضُ أنَّ $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x+3$. وبذلكَ، فإنَّ:

بتعويضِ $g(x)=x+3$ $\quad f(g(x))=f(x+3)$

بتعويضِ $x+3$ مكانَ x في معادلةِ f $\quad =\frac{1}{x+3}=h(x)$

2 $h(x) = (2 + x^2)^{10}$

أفترِضُ أنَّ $g(x) = 2 + x^2, f(x) = x^{10}$. وبذلكَ، فإنَّ:

$$f(g(x)) = f(2 + x^2)$$ بتعويضِ $g(x) = 2 + x^2$

$$= (2 + x^2)^{10} = h(x)$$ بتعويضِ $2 + x^2$ في معادلةِ f

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكِنُ استعمالُ فكرةِ الاقتراناتِ المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلِ: التجارةِ، والصناعةِ، وغيرِهِما.

مثال 5: من الحياة

صناعةٌ: وجدَ مديرُ مصنعٍ للأثاثِ أنَّ تكلفةَ إنتاجِ q منْ خزاناتِ الكتبِ في فترةِ العملِ الصباحيةِ بالدينارِ هيَ: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كانَ عددُ خزاناتِ الكتبِ التي يُمكِنُ إنتاجُها في t ساعةً في الفترةِ الصباحيةِ هيَ: $q(t) = 20t, 0 \le t \le 5$، فما تكلفةُ الإنتاجِ بدلالةِ t؟ كمْ دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

لإيجادِ تكلفةِ الإنتاجِ بدلالةِ t ، أُعوِّضُ قيمةَ $q(t)$ في معادلةِ التكلفةِ، فأُكوِّنُ اقترانًا مُركَّبًا هوَ $(C \circ q)(t)$:

$$(C \circ q)(t) = C(20t)$$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800$$ بتعويضِ $20t$ مكانَ q في معادلةِ التكلفةِ

$$= 400t^2 + 40t + 800$$ بالتبسيطِ

تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ : $(C \circ q)(4)$

$$(C \circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذنْ، تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: 7360 دينارًا.

معلومةٌ

الكلفن وحدةٌ لقياسِ درجةِ الحرارةِ، اعتُمِدَتْ في النظامِ الدوليِّ، ورُمِزَ إليْها بالرمزِ (K)، وقدْ سُمِّيَتْ بهذا الاسمِ نسبةً إلى الفيزيائيِّ اللورد كلفن.

أتحقق من فهمي

قياسٌ: يُحوِّلُ الاقترانُ $C(F)=\frac{5}{9}(F-32)$ درجاتِ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ F إلى مقياسِ سيلسيوس C. ويُحوِّلُ الاقترانُ $K(C)=C+273$ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس إلى مقياسِ كلفن K. أكتبُ الاقترانَ الذي يُحوِّلُ درجةَ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ إلى مقياسِ كلفن، ثمَّ أجِدُ درجةَ الحرارةِ على مقياسِ كلفن التي تُقابِلُ 86 درجةً فهرنهايتيةً.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَ $f(x)=x+7,\ g(x)=\frac{x}{2}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $(f\circ g)(4)$
2. $(g\circ f)(4)$
3. $(g\circ g)(-2)$
4. $(f\circ f)(3)$

إذا كانَ $c(x)=x^3,\ d(x)=2x-3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

5. $(c\circ d)(3)$
6. $(d\circ c)(5)$
7. $(c\circ d)(x)$
8. $(d\circ c)(x)$

أجِدُ مجالَ $(f\circ g)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

9. $f(x)=\frac{2x}{x-3},\ g(x)=\frac{1}{x-5}$
10. $f(x)=\frac{1}{2x-2},\ g(x)=\frac{5}{x+7}$

11. إذا كانَ $a(x)=x+4,\ b(x)=x-7$، فأُثبِتُ أنَّ $(a\circ b)(x)=(b\circ a)(x)$.

12. إذا كانَ $f(x)=2^x,\ g(x)=3x+4$، فأَجِدُ $(f\circ g)(x)$، ثمَّ أجِدُ قيمةَ $(f\circ g)(-3)$.

13. إذا كانَ $f(x)=\frac{1}{x-4},\ g(x)=2x-10$، فأَجِدُ $(g\circ f)(x)$ بصورةِ كسرٍ واحدٍ، ثمَّ أُعيِّنُ مجالَهُ.

إذا كانَ $f(x)=x+1,\ g(x)=x^2-7$، فأُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي بصورةِ اقترانٍ مُركَّبٍ، مُعتمِدًا الاقترانيْنِ f, g:

14. x^2-6
15. x^2+2x-6

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x)=f(g(x))$

16. $h(x)=\frac{4}{3-\sqrt{4+x^2}}$
17. $h(x)=\left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

18 إذا كانَ $x > 3$, $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$, $g(x) = \frac{2}{3-x}$، فهلْ يُمكِنُ تكوينُ $(f \circ g)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثلّاجةِ بالاقترانِ:
$N(T) = 23T^2 - 56T + 1,\ 3 < T < 33$، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ منَ الثلّاجةِ تُعطى درجةُ حرارتِهِ بالاقترانِ: $T(t) = 5t + 1.5$، حيثُ t الزمنُ بالساعاتِ:

20 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$.

21 أَجِدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلتيْنِ عشريتيْنِ.

22 إذا كانَ $f(x) = ax + b,\ a > 0$، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a، وَb.

23 أَجِدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{x}\ ,\ h(x) = x + 3$.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَتْ كلٌّ منْ هدى ووفاءَ ناتجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيثُ: $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = x^2 + 5$. أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

وفاءُ

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= (x^2+5)^2 - 6x^2 - 5 \\
&= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5 \\
&= x^4 + 4x^2 + 20
\end{aligned}
$$

هدى

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= (x^2+5)^2 - 6(x^2+5) - 5 \\
&= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5 \\
&= x^4 + 4x^2 - 10
\end{aligned}
$$

25 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ اقترانيْنِ f، وَ g بحيثُ يكونُ $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

26 **تحدٍّ:** إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}$; $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، فما قاعدةُ $(f \circ g)(x)$؟ ما مجالُهُ؟

27 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ ، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، فأَحُلُّ المعادلةَ $(f \circ g)(x) = -4$.

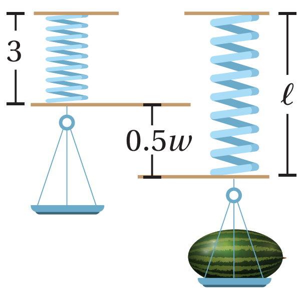
الدرسُ 4

الاقترانُ العكسيُّ
Inverse Function

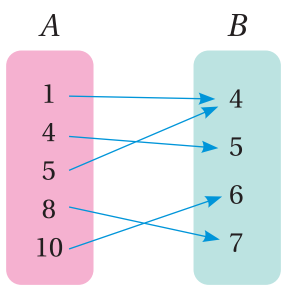
فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقترانِ العكسيِّ، وإيجادُهُ، وتحديدُ مجالِهِ ومداهُ.

المصطلحاتُ العلاقةُ العكسيةُ، الاقترانُ العكسيُّ، اقترانُ واحدٍ لواحدٍ، اختبارُ الخطِّ الأفقيِّ، الاقترانُ المحايدُ، الاقترانُ الجذريُّ.

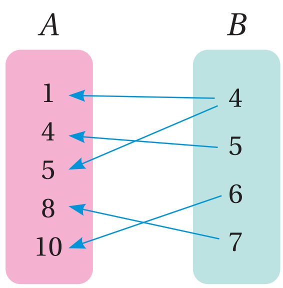
مسألةُ اليومِ يُستعمَلُ الاقترانُ $l = 0.5w + 3$ لإيجادِ طولِ الزنبركِ l بالسنتيمتراتِ في الميزانِ الزنبركيِّ عندَ قياسِ كتلةِ جسمٍ w بالكيلوغرامِ. هلْ يُمكِنُ إيجادُ اقترانٍ آخرَ يُستعمَلُ لإيجادِ كتلةِ الجسمِ إذا عُلِمَ طولُ الزنبركِ؟



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ العلاقةَ تربطُ بينَ مجموعتيْنِ منَ العناصرِ، وأنَّ إحداهُما تُسمّى المجالَ، والأُخرى تُسمّى المدى. وبالنظرِ إلى العلاقةِ المُمثَّلةِ في المُخطَّطِ السهميِّ المجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ المجالَ هوَ: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$، والمدى هوَ: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.



عندَ عكسِ اتجاهِ الأسهمِ لترتبطَ عناصرُ B بعناصرِ A تنتجُ علاقةٌ عكسيةٌ (inverse relation)، مجالُها B، ومداها A.

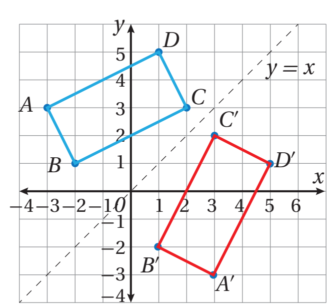


مثال 1

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(-3, 3), (-2, 1), (2, 3), (1, 5)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المستطيلِ $ABCD$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

لإيجادِ العلاقةِ العكسيةِ، أُبدِّلُ إحداثيي كل زوجٍ مرتبٍ، فتكونُ العلاقةُ العكسيةُ هيَ: $\{(3, -3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}$.

عندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا تنتجُ إحداثياتُ رؤوسِ المستطيلِ $A'B'C'D'$ الذي يُمثِّلُ انعكاسًا للمستطيلِ $ABCD$ حولَ المستقيمِ $y = x$



أتحقق من فهمي

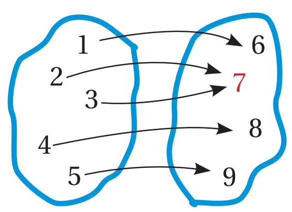
تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(3,4), (3,-4), (1,-3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ ABC. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

الاقتراناتُ هيَ نوعٌ خاصٌّ منَ العلاقاتِ؛ لأنَّ لها خاصيةً لا تُحقِّقُها جميعُ العلاقاتِ؛ فهيَ تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المدى. وبما أنَّ كلَّ اقترانٍ هوَ علاقةٌ فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ علاقةٍ عكسيةٍ للاقترانِ (معكوسُ الاقترانِ)، فإذا كانَ المعكوسُ اقترانًا أيضًا سُمِّيَ **اقترانًا عكسيًّا** (inverse function). ويُرمَزُ إلى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$.

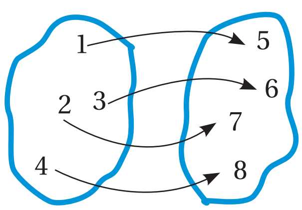
رموزٌ رياضيةٌ

يُقرَأُ الرمزُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ تحديدُ إذا كانَ معكوسُ الاقترانِ $f(x)$ يُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا بالنظرِ إلى $f(x)$ نفسِهِ؛ فإذا ارتبطَ كلُّ عنصرٍ في المدى بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المجالِ كانَ المعكوسُ اقترانًا، عندئذٍ يُسمّى $f(x)$ **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ** (one to one function).

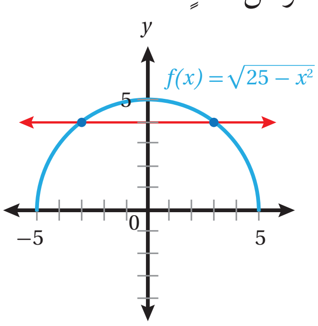


اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

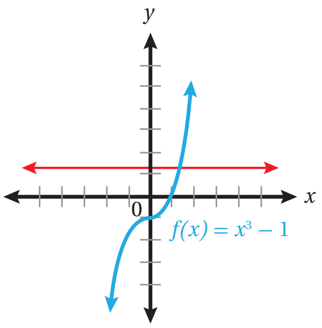


اقترانُ واحدٍ لواحدٍ.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ طريقةٍ تُسمّى **اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ** (horizontal line test)؛ للتحقُّقِ منْ أنَّ الاقترانَ هوَ واحدٌ لواحدٍ، وذلكَ برسمِ أيِّ خطٍّ أفقيٍّ، والتأكُّدِ أنَّهُ لا يقطعُ منحنى $f(x)$ في أكثرَ منْ نقطةٍ.



اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

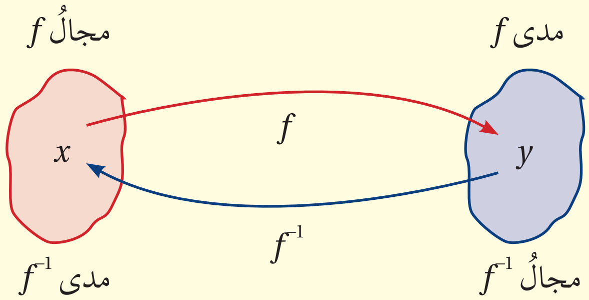


اقترانُ واحدٍ لواحدٍ.

الاقترانُ العكسيُّ

مفهومٌ أساسيٌّ

لأيِّ اقتـــرانِ $f(x)$، يوجدُ اقترانٌ عكســـيٌّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقـــطْ إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، عندئذٍ يكونُ مجالُ $f(x)$ هوَ مدى $f^{-1}(x)$، ومدى $f(x)$ هوَ مجالَ $f^{-1}(x)$.



يُمكِنُ إيجادُ الاقترانِ العكســـيِّ للاقترانِ المكتوبِ بصورةِ معادلةٍ بالتبديلِ بينَ x وَ y في قاعدةِ الاقترانِ.

مثال 2

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 4(x-5)$

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = f(x)$

أي أنَّ $y = 4(x-5)$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 4(x-5)$ المعادلةُ الأصليةُ

$y = 4x-20$ بتوزيعِ الضربِ في 4 على الحدَّيْنِ

$y + 20 = 4x$ بإضافةِ 20 إلى طرفَيِ المعادلةِ

$\frac{y+20}{4} = x$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4

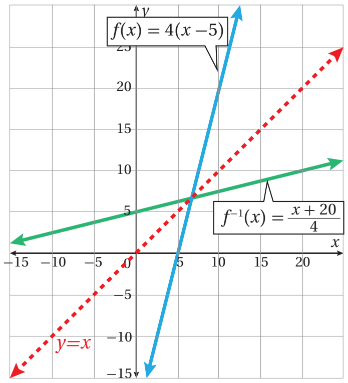
الخطوةُ 3: أُبـــدِّلُ x بِـ y، وأُبدِّلُ y بـــِ x في الصيغةِ التي توصَّلْتُ إليْها فـــي الخطوةِ 2، فينتجُ:

$$\frac{x+20}{4} = y$$

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فيكونُ الناتجُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$.

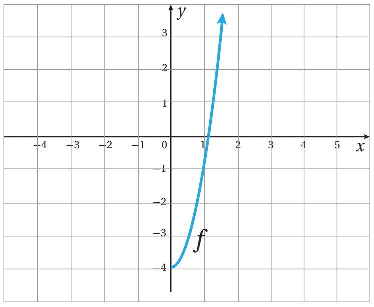
أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمالِ اختبارِ الخطِّ الأفقيِّ، أَجِدُ أنَّ $f(x)$ هوَ اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ عندما $x \geq 0$؛ لذا فإنَّ لهُ اقترانًا عكسيًّا.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 3x^2 - 4$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 3x^2 - 4$ المعادلةُ الأصليةُ

$y + 4 = 3x^2$ بإضافةِ 4 إلى طرفَيِ المعادلةِ

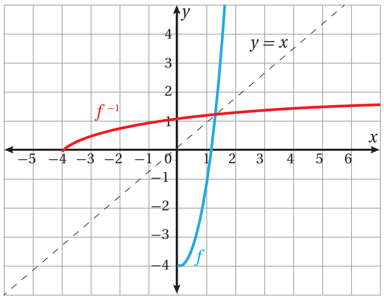
$\frac{y+4}{3} = x^2$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$\sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$ $x>0$

الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بـِ y، وأُبدِّلُ y بـِ x، فينتجُ: $y = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y،

فينتجُ: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

معلومةٌ

بوجهٍ عامٍّ، لا يوجدُ للاقترانِ التربيعيِّ اقترانٌ عكسيٌّ؛ لأنَّهُ ليسَ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ. ولكنْ إذا اختُزِلَ مجالُهُ بالفترةِ التي يكونُ فيها اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، كانَ لهُ عندئذٍ اقترانٌ عكسيٌّ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $f^{-1}(x)$ على الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f، أمّا الرمزُ $\frac{1}{f(x)}$ فيدلُّ على مقلوبِ الاقترانِ f.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ:

a) $h(x) = 7x + 5$ **b)** $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

مـنْ خصائـصِ أيِّ اقترانيْـنِ مُتعاكِسـيْنَ أنَّ كلًّا منْهُمـا يَعكسُ أثـرَ الآخرِ؛ لـذا ينتجُ منْ تركيبِهِمـا الاقترانُ الذي يُبْقـي كلَّ عنصرٍ في مجالِهِمـا على حالِهِ، وهوَ **الاقتـرانُ المحايدُ** (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسِهِ، وقاعدتُهُ هيَ: $f(x) = x$

إرشادٌ

تعني جملـةُ (إذا وفقطْ إذا) أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهيْنِ.

نتيجةٌ

يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$، إذا وفقطْ إذا كانَ:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميـعِ قيـمِ x فـي مجـالِ $f^{-1}(x)$ وَ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميـعِ قيـمِ x فـي مجـالِ $f(x)$.

تُسـتعمَلُ النتيجةُ السـابقةُ لإثباتِ أنَّ كلًّا منَ اقترانيْـنِ معلوميْنِ هوَ اقترانٌ عكسـيٌّ للآخرِ، وللتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحلِّ عندَ إيجادِ الاقترانِ العكسيِّ.

مثال 3

أُثبتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x - 5$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ بإيجادِ $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(3x - 5)$ بتعويضِ $g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x-5)+5}{3}$ بتعويضِ $3x - 5$ مكانَ x في معادلةِ $f(x)$

$= \frac{3x+(-5+5)}{3}$ بالتجميعِ

$(f \circ g)(x) = x$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

بتعويضِ $f(x)=\frac{x+5}{3}$ $= g(\frac{x+5}{3})$

بتعويضِ $\frac{x+5}{3}$ مكانَ x في معادلةِ $g(x)$ $= 3(\frac{x+5}{3})-5$

باختصارِ العاملِ 3 منَ البسطِ والمقامِ $= x+5-5$

بالتبسيطِ $(g \circ f)(x) = x$

إذنْ، كلٌّ منَ الاقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ؛ لأنَّ $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)=x$.

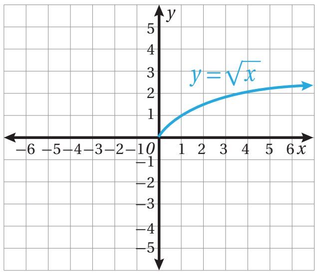
أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x)=4x-8$ وَ $g(x)=\frac{x}{4}+2$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

نتجَ في المثالِ الثاني الاقترانُ العكسيُّ $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعيًّا لمقدارٍ جبريٍّ، وهوَ نوعٌ خاصٌّ منَ الاقتراناتِ يُسمّى **الاقترانَ الجذريَّ** (radical function)، مثلَ:

$f(x)=\sqrt{5+x^2}$ $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+12}{8}}$ $f(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ $f(x)=\frac{\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$

إذا كانَ دليلُ الجذرِ فرديًّا مثلَ: $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ كانَ مجالُ الاقترانِ الجذريِّ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. ومـداهُ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. أمّا إذا كانَ دليلُهُ زوجيًّا مثـلَ: $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt{\ }$ ، فإنَّ مجالَهُ يكونُ مجموعةَ الأعدادِ التي تجعلُ المقدارَ تحتَ رمزِ الجذرِ عددًا غيرَ سالبٍ؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ للأعدادِ السالبةِ ليسَتْ حقيقيةً، ويكونُ مداهُ مجموعةً منَ الأعدادِ الحقيقيةِ غيرِ السالبةِ. فمثلًا، $f(x)=\sqrt{x}$ مجالُهُ $x \geq 0$ ، ومداهُ $y \geq 0$، وتمثيلُهُ البيانيُّ كما في الشكلِ الآتي:



أتعلَّمُ

يمكنُني أنْ أمثّلَ الاقترانَ الجـذريَّ بيانيًّا بإنشـاءِ جـدولِ قيـمٍ أفترضُها للمُتغيّـرِ x مـنْ مجالِ الاقترانِ، وأعوّضُها في قاعـدةِ الاقتـرانِ لأجدَ قيـمَ y، وأعيّـنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، وأرسـمُ المنحنى الذي يمرُّ بها.

مثال 4

أَجِدُ مجالَ الاقترانِ $f(x)=\sqrt{2x-6}$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ قيمُ x التي تجعلُ $2x-6 \geq 0$:

$2x-6 \geq 0$	أكتبُ المتباينةَ
$2x-6+6 \geq 0+6$	بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ
$2x \geq 6$	بالتبسيطِ
$x \geq 3$	بقسمةِ الطرفيْنِ على 2

إذنْ، مجالُ $f(x)$ هوَ $x \geq 3$، أوِ الفترةُ $[3, \infty)$، ومداهُ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ منْ قيمتِهِ عندَ 3 فصاعدًا؛ لأنَّ المقصودَ بالجذرِ هنا هوَ الجذرُ الموجبُ. فالمدى هوَ $y \geq 0$، أوِ الفترةُ $[0, \infty)$.

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ، أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y=\sqrt{2x-6}$، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ لإيجادِ x بدلالةِ y:

$y=\sqrt{2x-6}$	المعادلةُ الأصليةُ
$y^2=2x-6$	بتربيعِ الطرفيْنِ
$y^2+6=2x$	بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ
$\frac{y^2+6}{2}=x$	بقسمةِ الطرفيْنِ على 2

بإبدالِ y بـ x، وَ x بـ y في المعادلةِ الناتجةِ، فإنَّهُ ينتجُ: $y=\frac{x^2+6}{2}$

أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x)=\frac{x^2+6}{2}$

يكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى $f(x)$؛ أيْ مجالُهُ الفترةُ $[0, \infty)$، ومداهُ هوَ مجالُ $f(x)$؛ أيِ الفترةُ $[3, \infty)$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مجالَ $g(x)=\sqrt{3x+12}-2$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

تتطلَّبُ بعضُ المسائلِ الحياتيةِ استعمالَ مفهومِ الاقترانِ العكسيِّ لحلِّها. فإذا عُلِمَ طولُ نصفِ قُطْرِ كرةٍ أمكنَ إيجادُ حجمِها بالتعويضِ المباشرِ في قانونِ حسابِ حجمِ الكرةِ: $V(r)=\frac{4}{3}r^3\pi$. ولكنْ إذا عُلِمَ الحجمُ، وطُلِبَ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ، فيجبُ تغييرُ الصيغةِ الخاصةِ بإيجادِ الحجمِ V إلى صيغةٍ أُخرى لإيجادِ r، وهنا يبرزُ مفهومُ الاقترانِ العكسيِّ.

أتذكَّرُ

عملياتُ الجمعِ، والطرحِ، والضربِ في عددٍ موجبٍ لا تُغيِّرُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ. أمّا الضربُ في عددٍ سالبٍ فيعكسُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ.

أتذكَّرُ

مجالُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى الاقترانِ f.

إرشادٌ

لا يُستعمَلُ رمزُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ في المسائلِ العمليةِ، وإنَّما يُستعمَلُ رمزٌ مثلُ $r=r(V)$ الذي يُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ بدلالةِ الحجمِ.

مثال 5: من الحياة

فيزياءُ: سقطَ جسمٌ ساكنٌ منَ ارتفاعِ 200 m عنْ سطحِ الأرضِ، فكانَ موقعُه s بالنسبةِ إلى الأرضِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً منْ سقوطِهِ يعطى بالاقتران $s(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبِّرُ عنْ الزمن t بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ الموقعِ s، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ الذي يكونُ عنده موقعُ الجسمِ 50 m فقطْ.

إنَّ التعبيرَ عنْ t بدلالةِ s يعني إيجادَ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $s(t)$. ولأنَّ الزمنَ t لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ $s(t)$ هوَ $t \geq 0$، وفيهِ يكونُ $s(t)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $s = 200 - 4.9t^2$

الخطوةُ 2: أجعلُ t موضوعَ القانونِ.

المعادلةُ الأصليةُ $s = 200 - 4.9t^2$

بطرحِ 200 منْ طرفَيِ المعادلةِ $s - 200 = -4.9t^2$

بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على -4.9 $\frac{s-200}{-4.9} = t^2$

بضربِ البسطِ والمقامِ في -1 $\frac{200-s}{4.9} = t^2$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ $\sqrt{\frac{200-s}{4.9}} = t$

إذنْ، الاقترانُ الذي يُعبِّرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الموقعِ هوَ: $t(s) = \sqrt{\frac{200-s}{4.9}}$

بتعويضِ $s = 50$ $t(50) = \sqrt{\frac{200-50}{4.9}}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 5.53

إذنْ، يكونُ موقعُ الجسمِ 50 m بعدَ مُضِيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِهِ.

أتحقق من فهمي

يرتبطُ محيطُ الرأسِ C للطفلِ بطولِهِ S (كلا القياسيْنِ بالسنتيمترِ) عنْ طريقِ الاقترانِ:

$H(C) = 2.15C - 26.75$:

a) أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ محيطِ الرأسِ C بدلالةِ طولِ الطفلِ H.

b) أَجِدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُهُ 66 cm

كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِهِ تقريبًا.

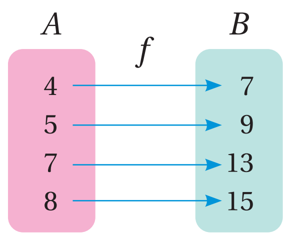
أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ الاقترانَ الذي لهُ اقترانٌ عكسيٌّ في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ):

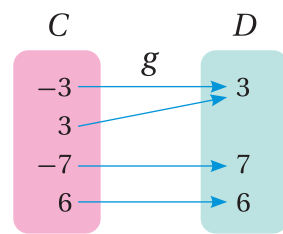
1 $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2 $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

3



4



إذا كانَ $f(x) = 3(\frac{x}{2} + 4)$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

5 $f(-2)$

6 $f(4)$

7 $f^{-1}(9)$

8 $f^{-1}(18)$

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

9 $f(x) = x + 7$

10 $f(x) = 8x$

11 $f(x) = \frac{x}{2} + 6$

12 $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$

13 $f(x) = 4x^3$

14 $g(x) = 4 + \sqrt{6 - 3x}\,, x \leq 2$

15 $g(x) = \frac{8 - 3x}{5x}\,, x \neq 0$

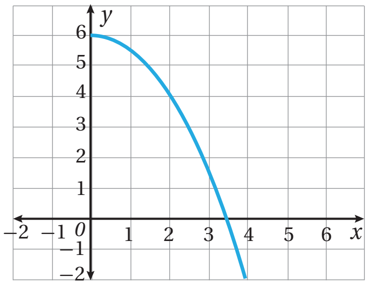
16 $j(x) = (x - 2)^2 + 4\,, x \geq 2$

17 أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ:

$$f(x) = (x+3)^2 + 2,\ x \geq -3,\ g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}\,,\ x \geq 2$$

18 أُثبِتُ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x - 1}\,, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ لنفسِهِ.

19 **صناعةٌ:** إذا كانَ $C(x)$ يُمثِّلُ التكلفةَ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً منْ مصابيحِ الإنارةِ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $C^{-1}(23000)$؟



20 أرسمُ منحنى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f المجاورِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، مُعيِّنًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ f وَ f^{-1}.

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ:
$f(x) = x^2-2x+5 \ , \ -3 \le x \le 1$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.
(إرشادٌ: أكتبُ $f(x)$ بصورةِ $(x+b)^2+c$ باستعمالِ إكمالِ المربعِ).

22 **كيمياءُ:** في دورقٍ 100 mL منْ أحدِ المحاليلِ، منْها 25 mL منْ حامضِ الهيدروكلوريكِ. إذا أُضيفَ إلى الدورقِ n mL منْ محلولٍ مُشابِهٍ، تركيزُ الحامضِ فيهِ 60%، فإنَّ تركيزَ الحامضِ في الدورقِ يُعطى بالاقترانِ: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبِّرُ عنْ n بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ التركيزِ C، ثمَّ أَجِدُ عددَ المِلّيلتراتِ n التي يجبُ إضافتُها ليصبحَ تركيزُ الحامضِ في الدورقِ 50%

23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

24 تُعطى مِساحةُ السطحِ الكليةُ A للأسطوانةِ التي نصفُ قُطرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها 40 cm بالاقترانِ:
$A(r) = 2\pi r^2 + 80\,\pi r$. أُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ r بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ قاعدةِ أسطوانةٍ مِساحةُ سطحِها الكليةُ $2000\ cm^2$

25 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt[3]{x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f^{-1}(x)$, $f(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

26 **تبريرٌ:** إذا كانَ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ لهُ صفرٌ عندما $x = 4$، فما الذي يُمكِنُ استنتاجُهُ عنْ منحنى $f^{-1}(x)$؟

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ لهُ، ثمَّ أُثبِتُ أنَّ كلًّا منْهُما اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

28 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = x^2 + 3$، وَ $g(x) = 5x - 1$، وَ $x > 0$، فأَحُلُّ المعادلةَ: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$.

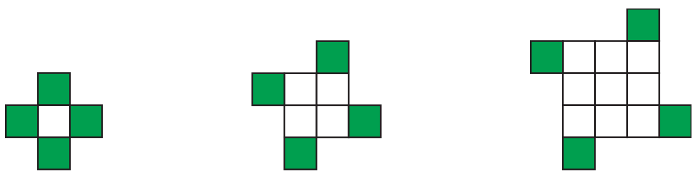
الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ.

المصطلحاتُ المتتاليةُ، الحدُّ، الحدُّ العامُّ.

مسألةُ اليومِ تبيّنُ النماذجُ الآتيةُ أوّلَ 3 حدودٍ منْ نمطٍ هندسيٍّ. أستعملُ النمطَ لأكملَ الجدولَ أدناه:



النموذجُ (3)   النموذجُ (2)   النموذجُ (1)

النموذجُ	1	2	3	4	n
عددُ المربعاتِ البيضاءِ	1	4	9		
عددُ المربعاتِ الخضراءِ	4	4	4		

تُعَدُّ **المتتاليةُ** (sequence) اقترانًا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ الموجبةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها، ومداهُ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

مراجعةُ مفهومٍ **المتتاليةُ**

المتتاليةُ هيَ مجموعةٌ منَ الأعدادِ تَتْبَعُ ترتيبًا مُعيَّنًا، ويُسمّى كلُّ عددٍ فيها **حدًّا** (term).

مثال 1

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 **2 , 5 , 8 , 11 , ...**

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ السابقِ بمقدارِ 3، إذنْ تتزايدُ المتتاليةُ بمقدارِ 3، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$2 \underset{+3}{\curvearrowright} 5 \underset{+3}{\curvearrowright} 8 \underset{+3}{\curvearrowright} 11 \underset{+3}{\curvearrowright} 14 \underset{+3}{\curvearrowright} 17 \underset{+3}{\curvearrowright} 20, \ldots$$

أتذكَّرُ

قدْ تنتجُ المتتاليةُ منْ إضافةِ عددٍ ثابتٍ لحدودِها، أوْ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، أوْ منْ كلتا العمليتيْنِ معًا.

2 $3 \; , \; 6 \; , \; 12 \; , \; 24 \; , \ldots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ الحصولَ على أيِّ حدٍّ يكونُ بضربِ الحدِّ السابقِ لهُ في 2، إذنْ تتضاعفُ المتتاليةُ بمقدارِ 2، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \xrightarrow{\times 2} 96 \xrightarrow{\times 2} 192 \; , \ldots$$

3 $80 \; , \; 73 \; , \; 66 \; , \; 59 \; , \ldots$

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ ينقصُ عنِ الحدِّ السابقِ بمقدارِ 7، إذنْ تتناقصُ المتتاليةُ بمقدارِ 7، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$80 \xrightarrow{-7} 73 \xrightarrow{-7} 66 \xrightarrow{-7} 59 \xrightarrow{-7} 52 \xrightarrow{-7} 45 \xrightarrow{-7} 38 \; , \ldots$$

4 $\frac{1}{3} \; , \; \frac{1}{9} \; , \; \frac{1}{27} \; , \; \frac{1}{81} \; , \ldots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروبًا في الحدِّ السابقِ لهُ، إذنْ تتضاءلُ المتتاليةُ بمقدارِ $\frac{1}{3}$، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{27} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{81} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{243} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{729} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{2187} \; , \ldots$$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التعبيرُ عنِ المتتاليةِ:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

في صورةِ:

$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$

$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$

$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$

$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$

b) $5, 10, 20, 40, \ldots$

c) $150, 141, 132, 123, \ldots$

d) $400, 200, 100, 50, \ldots$

تعلَّمْتُ في صفوفٍ سابقةٍ **الحدَّ العامَّ** (n^{th} term) لمتتاليةٍ، الذي يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ أيِّ حدٍّ ورُتبتِهِ (n)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $T(n)$. يُسهِّلُ الحدُّ العامُّ إيجادَ أيِّ حدٍّ في المتتاليةِ باستعمالِ رُتبتِهِ، مثلِ الحدِّ الذي رُتبتُهُ خمسونَ مثلًا. ويُمكِنُ تصنيفُ المتتاليةِ اعتمادًا على حدِّها العامِّ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وغيرِ ذلكَ.

أتذكَّرُ

رتبةُ الحدِّ هيَ ترتيبُ موقعِهِ بالنسبةِ إلى الحدودِ الأُخرى في المتتاليةِ.

مثال 2

أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:

1 $4, 7, 10, 13, \ldots, 3n+1$

أُعوِّضُ رُتبَ بعضِ الحدودِ في المقدارِ الجبريِّ المُعطى للتأكُّدِ أنَّها تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$\times 3$	3	$+1$	4
$n=2$	$\times 3$	6	$+1$	7
$n=3$	$\times 3$	9	$+1$	10
$n=4$	$\times 3$	12	$+1$	13

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ خطِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ خطِّيٌّ.

لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ، أُعوِّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدِّ العامِّ:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \ldots, n^2+3$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ الحدودَ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^2$	1	$+3$	4
$n=2$	$(2)^2$	4	$+3$	7
$n=3$	$(3)^2$	9	$+3$	12
$n=4$	$(4)^2$	16	$+3$	19

أتذكَّرُ

ناتجُ تعويضِ رتبةِ أيِّ حدٍّ في صيغةِ الحدِّ العامِّ يُساوي الحدَّ نفسَهُ.

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تربيعيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تربيعيٌّ.

أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

3 $\mathbf{2 , 9 , 28 , 65 , \dots , n^3 + 1}$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^3$	1	$+1$	2
$n=2$	$(2)^3$	8	$+1$	9
$n=3$	$(3)^3$	27	$+1$	28
$n=4$	$(4)^3$	64	$+1$	65

إذنْ، المقــدارُ الجبــريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العــامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تكعيبيـــةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تكعيبيٌّ. أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

أتحقق من فهمي

أُبيِّــنُ إذا كانَ المقــدارُ الجبــريُّ المُعطــى بجانبِ كلِّ متتاليــةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حــدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثــمَّ أُصنِّــفُ المتتاليــاتِ إلى خطِّيــةٍ، أوْ تربيعيــةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِــدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ فــي كلٍّ منْها:

a) $1 , 3 , 5 , 7, \dots , 2n-1$

b) $0 , 3 , 8 , 15 , \dots , n^2 - 1$

c) $1.5 , 8.5 , 27.5 , 64.5 , \dots , n^3 + 0.5$

يُمكِنُ إيجادُ الحدِّ العامِّ للمتتالياتِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ والتكعيبيةِ بملاحظةِ العلاقةِ بينَ الحدودِ ورُتبِها.

مثال 3

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 **5 , 12 , 19 , 26 , 33 , ...**

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتزايدُ بمقدارِ 7:

$$5 \;,\; 12 \;,\; 19 \;,\; 26 \;,\; 33 \;,\; \ldots$$

+7 +7 +7 +7

يُمكِـنُ مبدئيًّا التعبيرُ عنِ المتتاليــةِ بالحدِّ $7n$؛ لأنَّ تزايدَ حـدودِ المتتاليةِ بمقدارِ 7 في كلِّ مــرّةٍ يُذكِّرُني بحقائقِ ضربِ العــددِ 7، ولكنْ عندَ تعويـضِ $n = 1$ ينتجُ العددُ 7، وهــوَ أكبرُ منَ الحدِّ الأولِ بـِ 2؛ لذا أطرحُ العــددَ 2 منْ $7n$ ، وبذلكَ يصبحُ الحدُّ العامُّ: $T(n) = 7n - 2$.

2 **5 , 8 , 13 , 20 , 29 , ...**

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ. إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طــرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها. أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

مربعاتُ رتبِ الحدودِ	n^2 ... 25	16	9	4	1
الحدودُ	؟ ... 29	20	13	8	5

بالنظــرِ إلى ناتجِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ، أُلاحِظُ أنَّهُ إذا أُضيفَ 4 إلى مُربَّعِ رُتبةِ الحدِّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ. وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^2 + 4$

3 **0 , 7 , 26 , 63 , 124 , ...**

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ.

إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها.

أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيــرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، وأنَّها غيرُ ناتجةٍ منْ تربيعِ كلِّ حدٍّ. أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تكعيبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

مربعاتُ رتبِ الحدودِ	n^3 ... 125	64	27	8	1
الحدودُ	؟ ... 124	63	26	7	0

أُلاحِظُ أنَّهُ عندَ طرحِ 1 منْ مكعبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^3 - 1$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

a) $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$

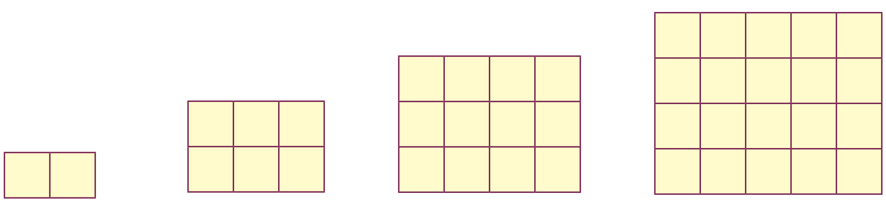
b) $4, 7, 12, 19, 28, \ldots$

c) $-1, 6, 25, 62, 123, \ldots$

تظهرُ المتتالياتُ أيضًا في كثيرٍ منَ الأنماطِ الهندسيةِ.

مثال 4

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



النموذجُ (1). النموذجُ (2). النموذجُ (3). النموذجُ (4).

بالنظرِ إلى النمطِ، أُلاحِظُ أنَّ عددَ المُربَّعاتِ يُشكِّلُ المتتاليةَ الآتيةَ: $2, 6, 12, 20, \ldots$

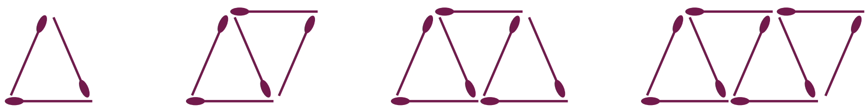
بالنظرِ إلى الحدودِ الأولى منَ المتتاليةِ، أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ فيها يساوي حاصلَ ضربِ عرضِ المُستطيلِ في طولِهِ:

$$\underset{1\times2}{2}, \underset{2\times3}{6}, \underset{3\times4}{12}, \underset{4\times5}{20}, \ldots$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

أتحقق من فهمي

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



النموذجُ (1). النموذجُ (2). النموذجُ (3). النموذجُ (4).

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $6 , 11 , 16 , 21 , \ldots$

2) $-1 , 6 , 13 , 20 , \ldots$

3) $\frac{3}{2} , \frac{5}{2} , \frac{7}{2} , \frac{9}{2} , \ldots$

4) $-8 , -7 , -6 , -5 , \ldots$

5) $-2 , 1 , 6 , 13 , \ldots$

6) $4 , 16 , 36 , 64 , \ldots$

7) $3 , 9 , 27 , 81 , \ldots$

8) $3, 8, 18, 38, \ldots$

9) $128, 64, 32, 16, \ldots$

أَجِدُ أولَ خمسةِ حدودٍ لكلِّ متتاليةٍ مُعطى حدُّها العامُّ في ما يأتي، ثمَّ أُصنِّفُها إلى متتاليةٍ خطِّيةٍ، أَوْ تربيعيةٍ، أَوْ تكعيبيةٍ:

10) $n + 3$

11) $3n - 1$

12) $4n + 5$

13) $n^2 - 1$

14) $n^2 + 2$

15) $200 - n^2$

16) $n^3 + 1$

17) $\frac{n^3}{2}$

18) $3n^3 - 1$

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

19) $21, 24, 27, 30, 33, \ldots$

20) $1, 9, 17, 25, 33, \ldots$

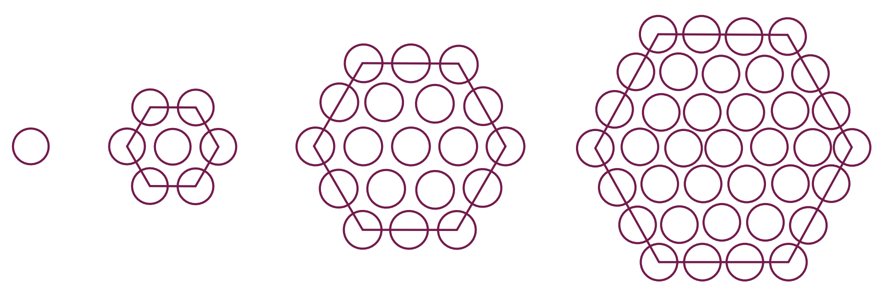
21) $10, 13, 18, 25, 34, \ldots$

22) $-\frac{5}{2} , -1 , \frac{3}{2} , 5 , \frac{19}{2} , \ldots$

23) $6, 13, 32, 69, 130, \ldots$

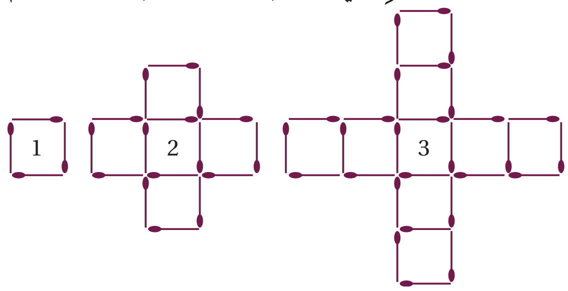
24) $1, 15, 53, 127, 249, \ldots$

25) أجدُ عددَ الدوائرِ في النموذجِ الخامسِ من النمطِ الهندسيِّ الآتي:



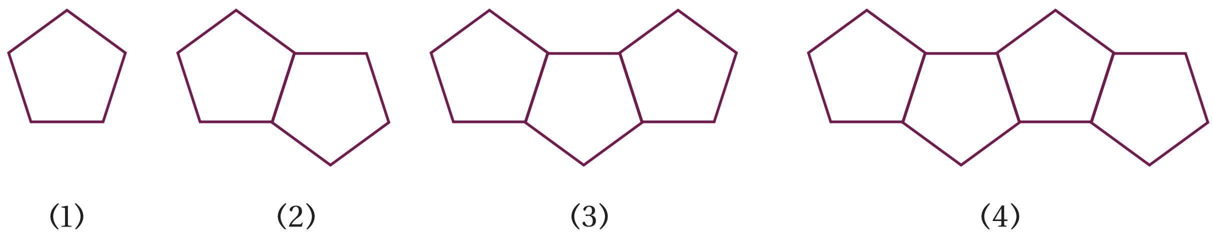
(1) (2) (3) (4)

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددَ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً، أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



26 أكملُ الجدولَ الآتي بالاعتماد على نماذجِ النمطِ الهندسيِّ أدناهُ:

النموذجُ	(1)	(2)	(3)	(4)
المحيطُ	5	8		



27 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي n مَن الأشكالِ الخماسيّةِ.

28 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي 50 شكلًا خُماسيًّا.

29 ما أكبرُ عددٍ من الأشكالِ الخُماسيّةِ التي يمكنُ استعمالُها لعملِ نموذجٍ محيطُهُ أقلُّ منْ 1000cm؟

مهارات التفكير العليا

30 **تحـــدٍّ**: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتاليةِ: ... ,70 ,48 ,30 ,16 ,6 هوَ: $T(n) = an + bn^2$ ، حيثُ a, b عددانِ حقيقيانِ، فأَجِدُ قيمَ a, b.

31 **تحدٍّ**: أَجِدُ أولَ ثلاثةِ حدودٍ لمتتاليةٍ خطِّيةٍ، إذا كانَ مجموعُ هذهِ الحدودِ 12، وحاصلُ ضربِها 28

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أَجِدُ ثلاثَ متتالياتٍ تبدأُ بـ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطِّيةً، والثانيةُ تربيعيةً، والثالثةُ تكعيبيةً.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 الحدُّ العامُّ (T_n) للمتتاليةِ: ... ,56 ,35 ,20 ,11 هوَ:

a) $T_n = n^2 + 6n + 4$ **b)** $T_n = 3n^2 + 8$

c) $T_n = 2n^2 + 9$ **d)** $T_n = n^2 + 4n + 6$

2 إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$، فإنَّ قيمةَ $f(-2)$ هيَ:

a) -22 **b)** -15

c) 9 **d)** 29

3 إذا كانَ $f(x)=2x^3-4x^2+6,\ g(x)=5x^2-7x+4$، فإنَّ ناتجَ $f(x) - g(x)$ هوَ:

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$

c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$

d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كانَ $g(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ السادسةِ، وَ $h(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، فإنَّ درجةَ ناتجِ قسمةِ $g(x)$ على $h(x)$ هيَ:

a) الأولى. **b)** الثالثةُ.

c) الرابعةُ. **d)** الثامنةُ.

5 إذا كانَ $f(x) = 3x - 5\ ,\ h(x) = x^2 - 2$، فإنَّ قيمةَ $(h\circ f)(3)$ هيَ:

a) 4 **b)** 7

c) 14 **d)** 16

6 إذا كانَ $f(x) = 8 - 2x$، فإنَّ قيمةَ $f^{-1}(4)$ هيَ:

a) 0 **b)** -6 **c)** -2 **d)** 2

7 خطُّ التقاربِ الأفقيِّ للاقترانِ $r(x) = \frac{3}{4-3x} + 7$ هوَ:

a) $y = 0$ **b)** $y = 7$

c) $y = 4$ **d)** $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتاليةِ ... ,20 ,12 ,6 ,2 ,0 هوَ:

a) 90 **b)** 95

c) 97 **d)** 99

9 مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هوَ:

a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$

b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$

c) $\{x \mid x \neq 5\}$

d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

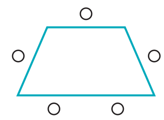
10 إذا كانَ $f(x)=2x^2-4x+1,\ g(x)=6x^3-7x+3$، فأَجِدُ $x^2f(x) + g(x)$

11 إذا كانَ $h(x) = 3x^2 - 4x,\ j(x) = 4x^3 + 2x + 5$، فأَجِدُ $h(x)\,.\,j(x)$

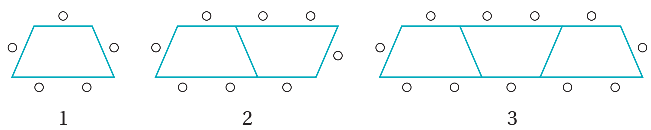
12 أَقْسِمُ $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

13 أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{4}{2-x}$، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ، ومداهُ.

يوجدُ في قاعةِ طعامِ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلِ شبهِ منحرفٍ. وكلُّ طاولةٍ تتَّسِعُ لخمسةِ طلبةٍ كما في الشكلِ الآتي:



لاحظَ مُشرفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبةِ يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ المُلاصِقِ بعضُها لبعضٍ كما في الشكلِ الآتي:



14 أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

عددُ الطاولاتِ المُتلاصِقةِ	1	2	3	4	5
عددُ الطلبةِ	5	8	11		

15 أَجِدُ الحدَّ العامَّ.

16 ما عددُ الطلبةِ الذينَ يُمكِنُهُم الجلوسُ حولَ 13طاولةً مُتلاصِقةً؟

17 تنوي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلٍ لـ 200 طالبٍ. كمْ طاولةً مُتلاصِقةً تَلزمُ لذلكَ؟

إذا كانَ $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = \frac{1}{x+1} + 2,\ x \neq -1$، فأَجِدُ:

18 $g^{-1}(x)$

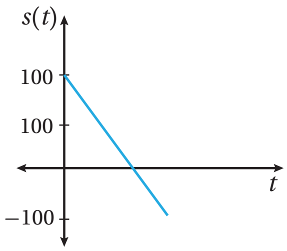
19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ: $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

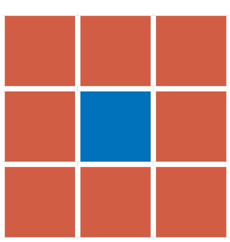
يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ $s(t)$ لجسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالمترِ و t الزمنُ بالثانيةِ.

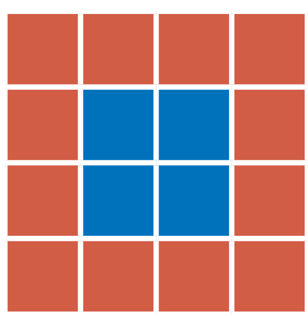


22 إذا وصلَ الجسمُ إلى الموقعِ $s = -100$ بعدَ 6 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِهِ، فأكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $s(t)$.

23 ما الزمنُ الذي استغرقَهُ الجسمُ منذُ بدءِ حركتِهِ حتّى وصلَ إلى نقطةِ الأصلِ؟

رتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكليْنِ الآتيينِ:


الشكلُ (1).


الشكلُ (2).

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراءِ في الشكلِ n؟

25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيهِ؟

26 استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحدِ أشكالِ هذا النمطِ. كمْ عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراءِ والزرقاءِ المُستعمَلةِ؟

الوحدةُ 6

المشتقاتُ
Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُسهِّلُ الحساباتِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باستعمالِ الاقترانات. ومنْ ذلكَ، حسابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحسابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المسافةِ – الزمنِ، ومنحنى السرعةِ – الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

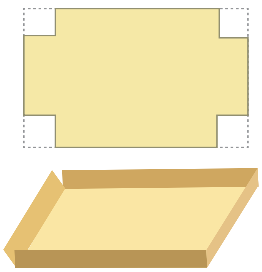
- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ المشتقةِ الأولى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجادَ القيمِ العظمى والصغرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

مشروعُ الوحدةِ

عملُ صندوقٍ حجمُهُ أكبرُ ما يُمكِنُ

فكرةُ المشروعِ حسابُ أكبرِ حجمٍ ممكنٍ لصندوقٍ باستعمالِ المشتقةِ.

الموادُّ والأدواتُ ورقتانِ منَ الكرتونِ المُقوّى مستطيلتا الشكلِ منَ المقاسِ نفسِهِ، مسطرةٌ، مقصٌّ، برمجيةُ جيوجبرا.



خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أقصُّ أربعةَ مُربَّعاتٍ متطابقةٍ.
2. أُطبِقُ الأطرافَ بعضَها على بعضٍ، فينتجُ صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مفتوحٌ منَ الأعلى.
3. أحسبُ حجمَ الصندوقِ، بقياسِ كلٍّ منَ الطولِ، والعرضِ، والارتفاعِ باستعمالِ المسطرةِ. هلْ يُمكِنُ عملُ صندوقٍ أكبرَ حجمًا باستعمالِ ورقةٍ منَ المقاسِ نفسِهِ؟
4. أُعيدُ الخطواتِ السابقةَ، ولكنْ بطريقةٍ جبريةٍ، وافتراضِ أنَّ طولَ ضلعِ المُربَّعِ المقصوصِ منْ كلِّ زاويةٍ يساوي x، وأكتبُ ثلاثةَ مقاديرَ جبريةٍ تُمثِّلُ الطولَ والعرضَ والارتفاعَ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ حجمِ الصندوقِ بدلالةِ x.
5. أكتبُ اقترانًا يمثلُ حجمَ الصندوقِ $V(x)$.
6. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ.
7. أُمثِّلُ اقترانَ الحجمِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
8. أتحقَّقُ منَ النقطةِ التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بالضغطِ على أيقونةِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا أُبيِّنُ فيهِ:

1. النتائجَ التي توصَّلَ إليْها كلُّ فردٍ في المجموعةِ.
2. بعضَ الصعوباتِ التي واجهَتْها المجموعةُ في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، وكيفَ تجاوزَتْها.
3. مقترحًا لتطبيقٍ حياتيٍّ أوْ علميٍّ تُستعمَلُ فيهِ فكرةُ المشروعِ.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى

Exploring the Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أُخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاطٌ

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

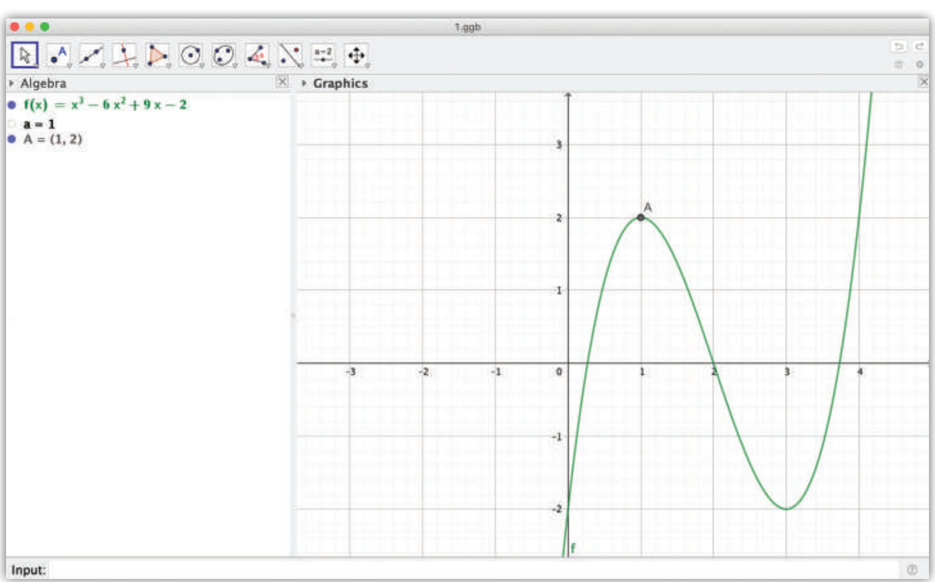
- أكتبُ $f(x) =$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

x | $\square^{\square}$ | 3 | − | 6 | x | $\square^2$ | + | 9 | x | − | 2 | ↵

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

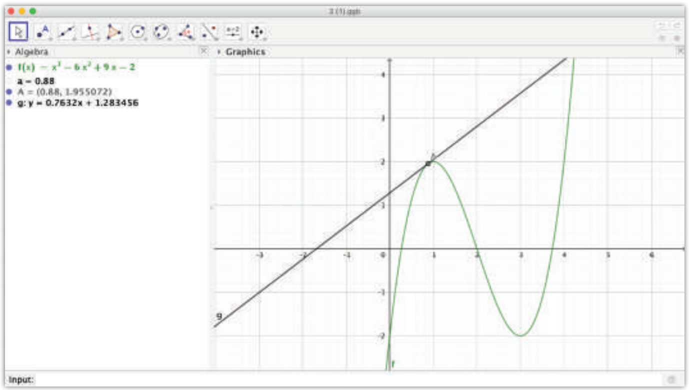
- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.



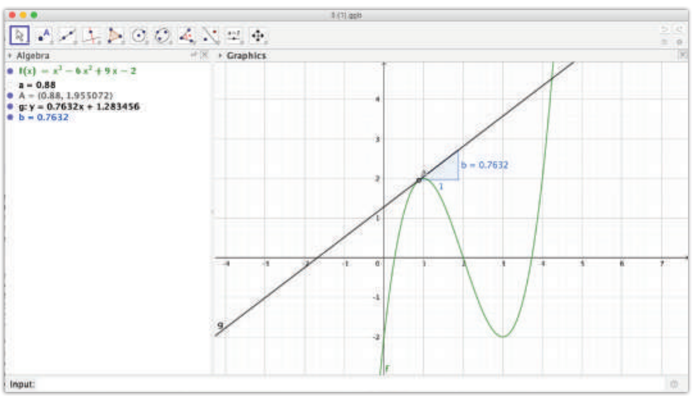
الخطوةُ 3: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ Tangent (A, f) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أُلاحِظُ أنَّ برمجيةَ جيوجبرا تُسمّي المماسَّ g بصورةٍ تلقائيةٍ.



الخطوةُ 4: أَجِدُ ميلَ المماسِّ عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ Slope(g) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .



الخطوةُ 5: أُحرِّكُ النقطةَ A، مُلاحِظًا التغيُّرَ في قيمةِ الميلِ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- متى يكونُ ميلُ المماسِّ موجبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ سالبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ صفرًا؟

أتدرب

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا لكلٍّ منْها عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ:

1. $f(x) = (x-1)^2 + 3$
2. $h(x) = 3 - 2x - x^2$
3. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$
4. $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

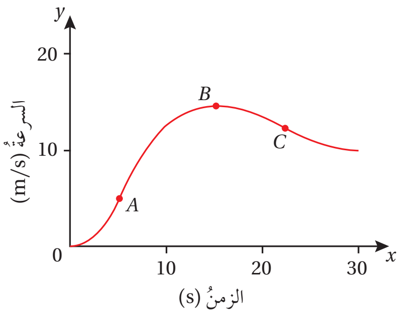
الدرسُ 1

تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope

فكرةُ الدرسِ تقديرُ ميلِ المنحنى.

المصطلحاتُ السرعةُ اللحظيةُ، التسارعُ اللحظيُّ.

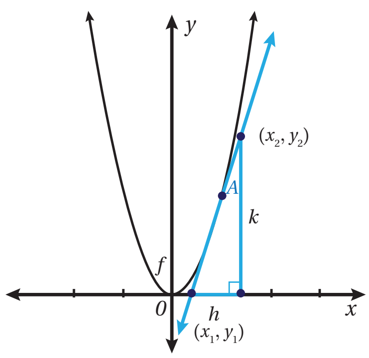
مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سرعةَ سيّارةٍ في 30 ثانيةً.



- هلْ يُمكِنُ إيجادُ تسارعِ السيّارةِ عندِ النقاطِ A, B, C؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ موجبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ سالبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ صفرًا؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ ميلِ المستقيمِ، فهلْ يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى ليسَ مستقيمًا؟

إنَّ ميلَ المنحنى عندَ نقطةٍ واقعةٍ عليْهِ يساوي ميلَ المماسِّ عندَ تلكَ النقطةِ؛ لذا، فإنَّ ميلَ المنحنى يختلفُ منْ نقطةٍ إلى أُخرى عليْهِ كما في النشاطِ المذكورِ آنفًا قبلَ الدرسِ.



أُفكِّرُ
لماذا يكونُ ميلُ المستقيمِ ثابتًا عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ؟

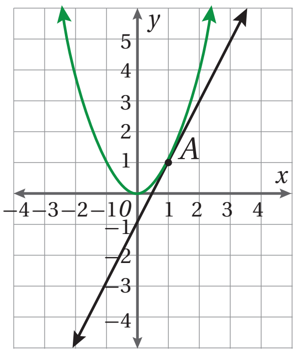
لإيجادِ ميلِ منحنى عندَ نقطةٍ ما، أرسمُ مماسًّا عندَ تلكَ النقطةِ، ثمَّ أَجِدُ ميلَ المماسِّ باستعمالِ إحداثياتِ نقطتيْنِ تقعانِ عليْهِ: (x_1, y_1) , (x_2, y_2)، وذلكَ بالتعويضِ في صيغةِ ميلِ المستقيمِ.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{h}$$ ، حيثُ: $x_2 - x_1 \neq 0$

مثال 1

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.



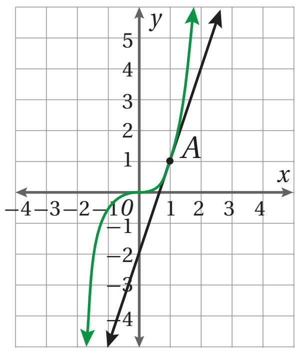
أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ منَ الرسمِ: $B(0, -1)$ وَ $C(2, 3)$، ثمَّ أحسبُ الميلَ:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{3-(-1)}{2-0}$ بالتعويضِ

$= 2$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 2



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.

إذا لمْ يكنِ المماسُّ مرسومًا عندَ النقطةِ التي يرادُ إيجادُ ميلِ المنحنى عندَها، فإنَّهُ يُرسَمُ باستعمالِ المسطرةِ. وبما أنَّ الرسمَ اليدويَّ ليسَ دقيقًا، فإنَّ ميلَ المماسِّ المرسومِ قدْ يختلفُ قليلًا عنِ القيمةِ الدقيقةِ لميلِ المنحنى، عندئذٍ يكونُ الناتجُ قيمةً تقريبيةً لميلِ المنحنى.

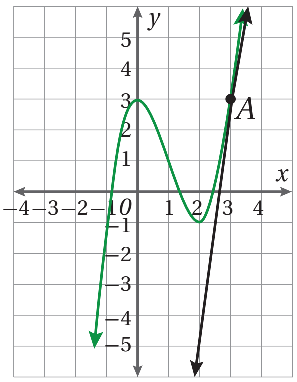
إرشادٌ

أستعملُ شبكةَ المُربَّعاتِ لتمثيلِ المنحنياتِ بيانيًّا بدقةٍ.

مثال 2

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عندَ كلِّ نقطةٍ ممّا يأتي:

1 **النقطةُ $A(3, 3)$.**



الخطوةُ 1: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A(3, 3)$ باستعمالِ المسطرةِ.

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 3), C(2, -5)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{-5-3}{2-3}$ بالتعويضِ

$= 8$ بالتبسيطِ

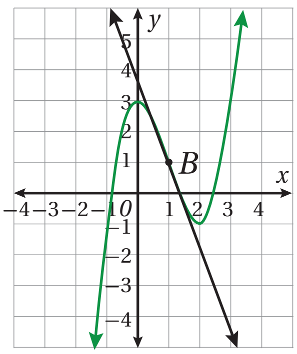
إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 8 تقريبًا.

أتعلَّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ موجبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً حادةً معَ اتجاهِ محورِ x الموجبِ.

2 النقطةُ $B(1, 1)$.

أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ B، ثمَّ أُحدِّدُ نقطتيْنِ عليْهِ $B(1, 1), E(0, 3.8)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ:



صيغةُ الميلِ $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويضِ $\quad = \dfrac{1-3.8}{1-0}$

بالتبسيطِ $\quad = -2.8$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ B هوَ -2.8

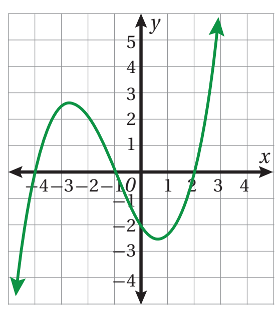
3 أكتبُ معادلةَ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $B(1, 1)$

معادلةُ المماسِّ $\quad y - b = m(x-a)$

بتعويضِ النقطةِ $B(1, 1)$ وَ $m = -2.8$ $\quad y - 1 = -2.8(x-1)$

بالتبسيطِ $\quad y = 3.8 - 2.8x$

أتحقق من فهمي

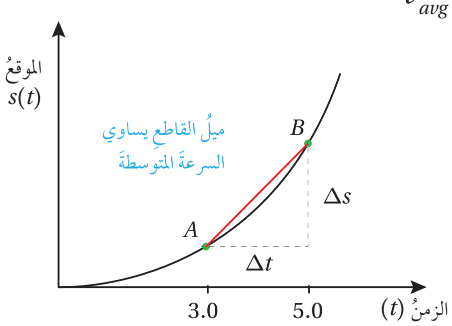


أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0, -2)$.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ منحنى الموقعِ – الزمنِ يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ ثابتةٍ، وأنَّهُ لا يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ مُتغيِّرةٍ. ويمكنُ حسابُ السرعةِ المتوسطةِ $\bar{v}$ لجسمٍ مُتحرِّكٍ في فترةٍ زمنيةٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في الموقعِ Δs على التغيُّرِ في الزمنِ Δt:

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

بالنظرِ إلى منحنى الموقعِ – الزمنِ المجاورِ لجسمٍ يتحرك في مسارٍ مستقيمٍ يتبيَّنُ أنَّ السرعةَ المتوسطةَ منَ اللحظةِ $t = 3$ إلى اللحظةِ $t = 5$ تساوي ميلَ القاطعِ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ A وَ B على المنحنى.



أتعلَّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ سالبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً منفرجةً مع اتجاهِ محورِ x الموجبِ.

أُفكِّرُ

متى يكونُ ميلُ المنحنى صفرًا؟

أتذكَّرُ

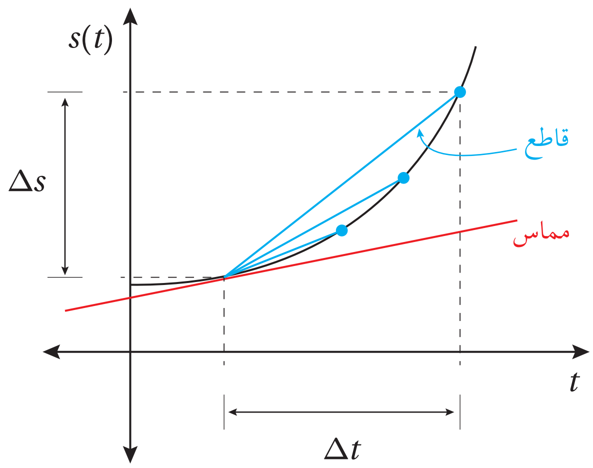
معادلةُ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ (a, b) هيَ:

$y - b = m(x-a)$

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى التغيُّرِ في قيمةِ s بالرمزِ Δs

لكنَّ السـرعةَ المتوسـطةَ لا تُقـدِّمُ معلوماتٍ كافيـةً في كثيرٍ مـنَ المواقفِ، مثـلِ تحديدِ سـرعةِ سـيّارةٍ لحظةَ مرورِها أمامَ الـرادارِ واتجاه حركتهـا؛ فتَلزَمُ عندئذٍ **السـرعةُ اللحظيةُ** (instantaneous velocity) التي يُمكِنُ إيجادُها بتقليصِ الفترةِ الزمنيةِ للسرعةِ المتوسطةِ حتـى تصبحَ نقطةً (لحظةً) كما في الشـكلِ الآتـي، فيصبحُ القاطعُ الذي يمـرُّ بنقطتَيْنِ على المنحنى مماسًّا لهُ عندَ نقطةٍ واحدةٍ.



بما أنَّ ميلَ المماسِّ يساوي ميلَ المنحنى عندَ نقطةِ التماسِّ، فإنَّ السرعةَ اللحظيةَ عندَ لحظةٍ ما تساوي ميلَ منحنى اقترانِ الموقعِ – الزمنِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

رموزٌ رياضيّةٌ

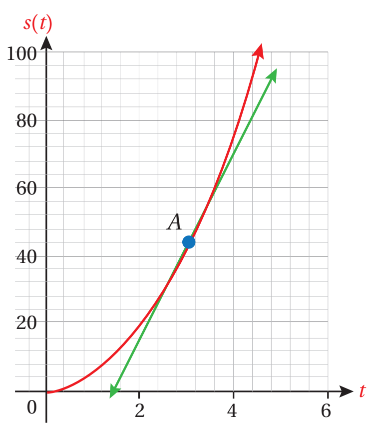
يشيرُ الرمزُ v إلى السرعةِ المتجهةِ، التي تسـمى اختصارًا في هذا الكتابِ (السـرعةَ)، بينَما يشيرُ الرمـزُ v_s إلى السـرعةِ القياسيةِ.

مثال 3

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 4.9t^2$ موقعَ جسـمٍ يتحركُ في مسـارٍ مسـتقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسـمِ بالأمتـارِ بعـدَ t ثانيةً. أقدرُ سـرعةَ الجسـمِ بعدَ 3 ثـوانٍ من بـدءِ الحركةِ.

الخطوةُ 1: أُعـوِّضُ $t = 3$ بالاقتـرانِ لتحديدِ موقعِ الجسـمِ بعـدَ 3 ثـوانٍ، فتنتـجُ النقطـةُ $A(3, 44.1)$ التي تُمثِّلُ نقطةَ التماسِّ.

الخطوةُ 2: أُمثِّـلُ منحنـى الاقتـرانِ $s(t) = 4.9t^2$ بيانيًّا، ثـمَّ أرسـمُ المماسَّ عنـدَ النقطةِ $A(3, 44.1)$.



رموزٌ رياضيّةٌ

يشيرُ الرمزُ $\overline{v}$ إلى سرعةِ الجسـمِ المتوسطةِ في فتـرةٍ زمنيّـةٍ مـا، مثلِ $[t_1, t_2]$.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ النقطتينِ $A(3, 44.1)$ وَ $B(2, 16)$ على المماسِّ، ثمَّ أستعملُهُما لحسابِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ
$$m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

بالتعويضِ
$$= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$$

بالتبسيطِ
$$= 28.1$$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$ هوَ 28.1 تقريبًا. ومنْهُ، فإنَّ سرعةَ الجسمِ اللحظيةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ 28.1 m/s

أُفكِّرُ

إنَّ حسابَ السرعةِ اللحظيةِ برسمِ المماسِّ وتحديدِ نقطتيْنِ عليْهِ أمرٌ صعبٌ، فهلْ توجدُ طريقةٌ أسهلُ وأدقُّ لحسابِ الميلِ؟

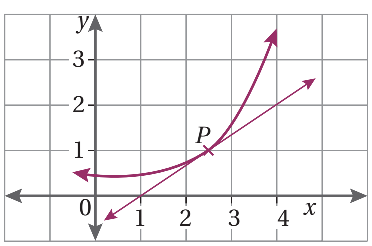
أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + t$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيم، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةٍ. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ.

أتدرب وأحل المسائل

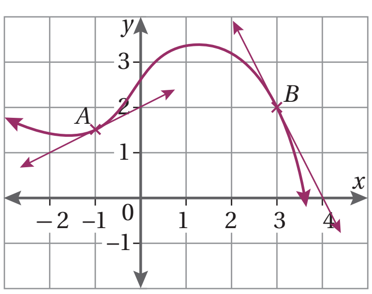
1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P.

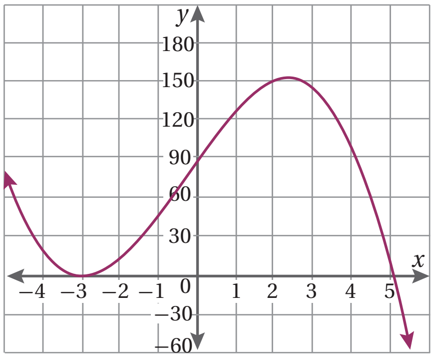


2 في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ A وَ B.



3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$، والنقطةِ $(4.5, 60)$.



أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 – 4):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \leq x \leq 4$

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$.

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$.

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟

أُكملُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلَ (10–8):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$		0.01	0.1		0.8		

8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \leq x \leq 3$

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$.

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$.

12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$.

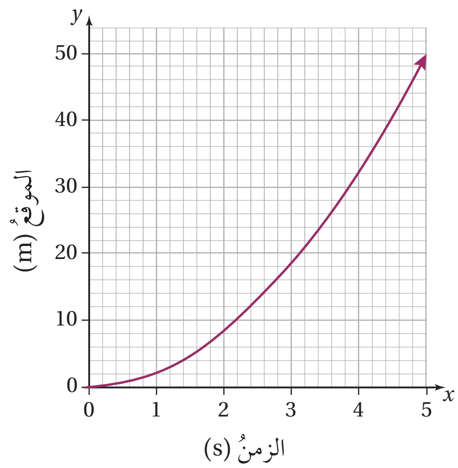
13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$.

14 $y = 5x^3 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$.

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$.

16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$.

درّاجاتٌ ناريةٌ: بدأَتْ درّاجةٌ ناريةُ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ موقعَ الدراجةِ خلالَ أوّلِ 5 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِها:



17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعينًا بالجدولِ الآتي:

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	0	2	8	18	32	50

18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $t = 2$.

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ بدءِ الحركةِ.

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

21 أحسبُ السرعةَ المتوسّطةَ $\overline{v}$ للدراجةِ في الفترةِ الزمنيّةِ $[1, 3]$.

سـيّاراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ سرعةَ سيّارةٍ تتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ وفي اتّجاهٍ واحدٍ، فسجَّلَ موقع السيارة بالنسبة لنقطة انطلاقها في لحظات زمنية محددة كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ القوانين الفيزيائية المتعلقة بالقوى المؤثرة على السيارة لكتابة معادلة جبرية تمثل العلاقة بين موقع السيارة والزمن على النحو الآتي: $s(t) = at + bt^2$، حيثُ a وَ b عددانِ ثابتانِ:

الزمنُ t (ثانيةٌ)	0	1	2	3	4
الموقعُ s (مترٌ)	0	5	12	21	32

22 أرسمُ منحنى اقترانِ الموقعِ – الزمنِ $s(t)$.

23 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 3$.

24 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a وَb.

25 **فيزياءُ:** يمثلُ الاقترانُ $s(t) = 3t - t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالمترِ، و t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y.

27 **مسـألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجـةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّـا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكِسـتيْنِ عليْهِ: $(a,b), (-a, b)$.

الدرسُ 2

الاشتقاقُ
Differentiation

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ المشتقةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 80t - 5t^2$ موقعَ منطادٍ بالنسبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ. ما سرعةُ المنطادِ بعدَ 10 ثوانٍ منْ إطلاقِهِ؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ الميلِ أوْ تقديرِهِ، وهيَ طريقةٌ ليسَتْ سهلةً، وتحتاجُ إلى دقةٍ عندَ رسمِ المماسِّ. سأتعرَّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جبريةً أسهلَ لإيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ نقطةٍ عليهِ منْ دونِ حاجةٍ إلى رسمِ المماسِّ.

عندَ إيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ نقاطٍ مختلفةٍ عليْهِ باستعمالِ طريقةِ ميلِ المماسِّ التي تعرَّفْتُها سابقًا، وتنظيمِ القيمِ في الجدولِ الآتي، سألاحِظُ أنَّ ميلَ المنحنى عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) يساوي قيمةَ x مضروبةً في العددِ 2؛ أيْ إنَّ الميلَ m يساوي $2x$

(x , y)	$(-2, 4)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4=-2\times2$	$-2=-1\times2$	$0=0\times2$	$2=1\times2$	$6=3\times2$	$8=4\times2$	$10=5\times2$

وبالمثلِ، سأجِدُ أنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) على منحناهُ هوَ $m = 3x^2$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^n$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) عليْهِ هوَ $m = nx^{n-1}$.

مشتقةُ (derivative) الاقترانِ $f(x)$ عندَ نقطةٍ واقعةٍ على منحناهُ هيَ ميلُ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $f'(x)$.

رموزٌ رياضيةٌ

تُستعمَلُ الرموزُ $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ الاقترانِ $y = f(x)$

مفهومٌ أساسيٌّ **مشتقةُ اقترانِ القوةِ**

- **بالكلماتِ:** عندَ اشتقاقِ الاقترانِ $f(x)=x^n$، فإنَّ أس x في المشتقةِ يكونُ أقلَّ بواحدٍ منْ أس x في الاقترانِ الأصليِّ، وإنَّ معاملَ x في المشتقةِ يساوي أس x في الاقترانِ الأصليِّ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = x^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 1

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^8$

$f'(x) = 8x^{8-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 8x^7$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^{5-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 5x^4$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

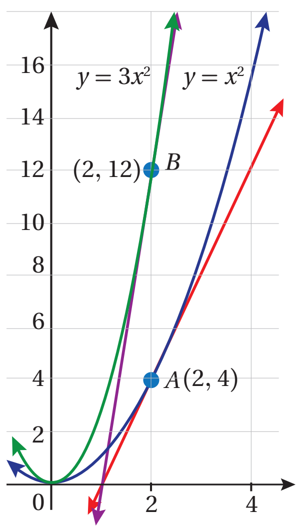
أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^7$ **b)** $f(x) = x^{11}$

منَ المعلومِ أنَّ قيمَ y للاقترانِ $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالِ قيمِ y التي تُناظِرُها للاقترانِ $g(x) = x^2$. وعليْهِ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقترانِ $g(x) = x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 4)$.

وهذا يعني أنَّ مشتقةَ $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقةِ (x^2)؛ أيْ $(3\times 2x)$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ مشتقةَ الاقترانِ $f(x)= ax^n$، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ، هيَ $f'(x)= a \times nx^{n-1}$.



مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ مضاعفاتِ القوّةِ ومشتقّةُ الثابتِ

- **مشتقةُ مضاعفاتِ القوةِ:** إذا كانَ $f(x) = ax^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = anx^{n-1}$.
- **مشتقةُ الثابتِ:** إذا كانَ $f(x) = c$، حيثُ c عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ $f'(x) = 0$؛ أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةٍ لمشتقةِ الاقترانِ الخطيِّ؟

مثال 2

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

$f'(x) = 8x^3$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ بالتبسيطِ

3 $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

$f'(x) = -2$ بالتبسيطِ

4 $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$ قانونُ مشتقةِ الثابتِ

أتذكَّرُ

ميلُ الاقترانِ الثابتِ يساوي صفرًا.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي:

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

- **بالكلماتِ:** مشتقةُ مجموعِ كثيرَي الحدودِ تساوي مجموعَ مشتقتَيْهِما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرَي الحدودِ تساوي الفرقَ بينَ مشتقتَيْهِما.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = g(x) \pm h(x)$، حيثُ $g(x)$ وَ $h(x)$ كثيرا حدودٍ، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

مثال 3

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 2x - 6$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$ بالتبسيطِ

إرشادٌ

أستعملُ قواعدَ الاشتقاقِ المناسبةَ لإيجادِ المشتقةِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

أُلاحِظُ منَ الأمثلةِ السابقةِ أنَّ مشتقةَ الاقترانِ هيَ اقترانٌ جديدٌ يُمثِّلُ قيمةَ ميلِ منحنى الاقترانِ الأصليِّ عندَ قيمٍ مختلفةٍ؛ لذا يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ، بتعويضِ الإحداثيِّ x لتلكَ النقطةِ في اقترانِ المشتقةِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميلُ منحنى $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقترانُ الأصليُّ

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاقِ الاقترانِ

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويضِ قيمةِ $x = 1$

$= -12$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$ هوَ -12

أتعلّمُ

يُستعمَلُ الرمزُ $f'(a)$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ $f(x)$ عندما $x = a$.

2 قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

$f'(x) = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$6x - 18 = 0$ بتعويضِ قيمةِ المشتقةِ

$6x = 18$ بجمعِ **18** للطرفيْنِ

$x = 3$ بقسمةِ الطرفيْنِ على **6**

إذنْ، قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا هيَ $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ ، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ ميلَ منحنى الموقعِ – الزمنِ في لحظةٍ ما (عندَ نقطةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةَ اللحظيةَ عندَ تلكَ النقطةِ، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميلَ منحنى السرعةِ – الزمنِ في لحظةٍ ما يساوي التسارعَ اللحظيَّ.

أستطيعُ الآنَ إيجادَ كلٍّ منَ السرعةِ اللحظيةِ، والتسارعِ اللحظيِّ باستعمالِ المشتقةِ بسهولةٍ منْ دونِ حاجةٍ إلى تقديرِ ميلِ المنحنى باستعمالِ المماسِّ كما في الدرسِ السابقِ.

معلومةٌ

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةَ اقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما.

التسارعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةَ اقترانِ السرعةِ عندَ لحظةٍ ما.

مثال 5: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

1 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هوَ $v(t)$.

إذنْ، $v(t) = s'(t)$.

المطلوبُ هوَ $v(3) = s'(3)$، التي تُمثِّلُ السرعةَ اللحظيةَ عندما $t = 3$.

$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$ تعريفُ اقترانِ السرعةِ

$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$ بتعويضِ $t = 3$

$= 14.7 \text{ m/s}$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هيَ 14.7 m/s

أتذكّرُ

يرمزُ للثواني بالرمزِ s وهوَ الحرفُ الأولُ منْ كلمةِ second وتعني ثانيةً.

2 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

التسارعُ هوَ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ التسارعِ هوَ $a(t)$.

إذنْ، $a(t) = v'(t)$.

المطلوبُ هوَ $a(5) = v'(5)$، التي تُمثِّلُ التسارعَ عندما $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = 3.6t$ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ

$a(5) = 3.6(5)$ بتعويضِ $t = 5$

$= 18$ بالتبسيطِ

إذنْ، تسارعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هوَ 18 m/s^2

أتعلَّمُ

تكونُ قيمةُ التسارعِ صفرًا إذا كانَتِ السرعةُ ثابتةً.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1 $f(x) = -7$

2 $g(x) = 3x^9$

3 $r(x) = -5x^2$

4 $i(x) = x^4 - 3x$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}\,x$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$

10 أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

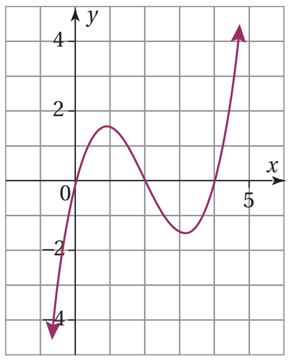
11 أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً).

12 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$.

13 أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ 6 m/s

14 أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ.

15 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$.



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:

16 أَجِدُ $f'(x)$.

17 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

18 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ -0.5

19 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x^3+2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ x لها 1

تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

20 أَجِدُ قيمةَ b.

21 أَجِدُ قيمةَ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ، هيَ -12

22 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ a.

23 أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$.

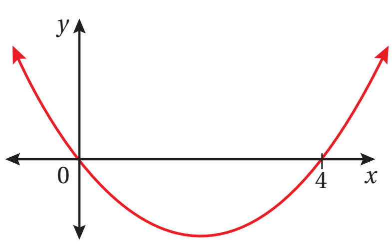
أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

26 $f(x) = (x+3)(x-3)$

25 $f(x) = (x+2)(x+5)$

24 $f(x) = 2x(x+1)$

27 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = kx(x-4)$، حيثُ k عددٌ حقيقيٌّ. أَجِدُ قيمةَ k إذا كانَ ميلُ المنحنى عندَ النقطةِ $(4, 0)$ هوَ 2



مهارات التفكير العليا

28 **تبريرٌ:** أُثبِتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

29 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمَ a, b إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا.

30 **تحدٍّ:** أُطلِقَتْ قذيفةٌ منْ سطحِ الأرضِ رأسيًّا إلى الأعلى، فكانَ موقعُها بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ s بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِها $s(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما سرعةُ القذيفةِ عندَما يكونُ موقعُها 98 m فوقَ سطحِ الأرضِ؟

الدرسُ 3

القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

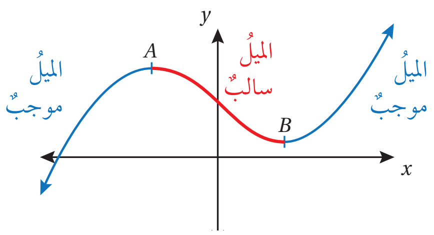
فكرةُ الدرسِ إيجادُ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى المحليةِ لكثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ نقطةٌ حرجةٌ، قيمةٌ عظمى، قيمةٌ صغرى.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $s = -16t^2 + 75t + 2.5$ الموقع (بالقدمِ) الذي تصله كرةٌ بعدَ ركلِها رأسيًّا لأعلى، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. ما أعلى موقعٍ تصلُهُ الكرةُ؟

تُسمّى النقطةُ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى كثيرِ الحدودِ صفرًا **النقطةَ الحرجةَ** (critical point).

في الشكلِ المجاورِ، A وَ B نقطتانِ حرجتانِ؛ لأنَّ ميلَ المنحنى عندَ كلٍّ منهُما صفرٌ.



لغةُ الرياضياتِ

يشيرُ مصطلحُ (النقطةُ الحرجةُ) إلى النقطةِ (x, y)، ويشيرُ مصطلحُ (القيمةُ الحرجةُ) إلى الإحداثيِّ x للنقطةِ الحرجةِ.

تُسمّى القيمةُ d في النقطةِ $A(c, d)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها موجبةٌ، وعنْ يمينِها سالبةٌ، **القيمةَ العظمى المحليةَ** (local maximum)؛ لأنَّها أكبرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها. وتُسمّى القيمةُ h في النقطةِ $B(e, h)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها سالبةٌ، وعنْ يمينِها موجبةٌ، **القيمةَ الصغرى المحليةَ** (local minimum)؛ لأنَّها أصغرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.

مثال 1

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى المحليّةِ والقيمِ الصغرى المحليّةِ للاقترانِ $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجِدَتْ).

الخطوةُ 1: أجِدُ القيمَ الحرجةَ؛ أيْ قيمَ x التي ميلُ المنحنى عندها صفرٌ.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$ مشتقةُ الاقترانِ

$$3x^2 - 12 = 0$$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$$3x^2 = 12$$ بجمعِ 12 للطرفيْنِ

$$x^2 = 4$$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$$x = \pm 2$$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، توجدُ نقطتانِ حرجتانِ لمنحنى الاقترانِ عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأنَّ مشتقةَ الاقترانِ تساوي صفرًا عندَ هاتيْنِ النقطتيْنِ.

أتعلَّمُ

يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى، وذلكَ باختيارِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

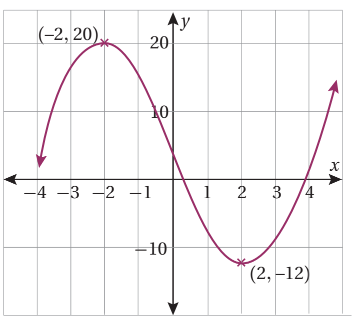
الخطوةُ 2: لتحديدِ أيُّ النقــاطِ الحرجةِ يوجدُ عندها قيمةٌ عظمـــى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ، أختبرُ إشارةَ ميلِ المنحنى حولَ كلٍّ منْهُما، وذلكَ بتعويضِ بعضِ القيمِ القريبةِ منْها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

تتغيَّرُ إشــارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = -2$ منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ عظمى عندما $x = -2$، هيَ $f(-2) = 20$، وتتغيَّرُ إشــارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = 2$ منْ سالبةٍ إلى موجبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ صغرى عندما $x = 2$، هيَ $f(2) = -12$.

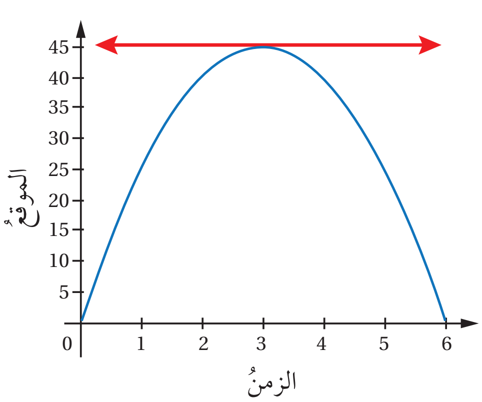
طريقةٌ بديلةٌ: يُمكِنُ أيضًا تحديدُ إذا كانَ يوجدُ عندَ النقطةِ الحرجةِ قيمةٌ عظمـــى أوْ قيمةٌ صغرى للاقتــرانِ بتمثيلِ منحنى الاقترانِ بيانيًّــا. فعندَ تمثيلِ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الشــكلِ المجاورِ، فــإنَّ النقطةَ $(-2, 20)$ تبدو أعلى مــنَ النقاطِ المجاورةِ لها علــى المنحنى، وبذلكَ تســاوي القيمةُ العظمى 20، وتبدو النقطــةُ $(2, -12)$ أخفضَ منَ النقاطِ المجاورةِ لها ، وبذلكَ تساوي القيمةُ الصغرى -12



أتحقق من فهمي

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى المحليّةَ للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).

يُمثِّلُ الإحداثــيُّ y للنقطةِ التي يتغيَّرُ عندها اتجاهُ حركةِ الجسمِ منَ الصعودِ إلى الهبوطِ قيمةً عظمى لمنحنى الموقعِ – الزمنِ؛ لأنَّ مشــتقةَ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ تســاوي صفرًا (المماسُّ أفقيٌّ)؛ لذا يُمكِنُ استعمالُ المشــتقةِ لتحديدِ النقطةِ التــي يبلغُ عندها الجسمُ أعلى موقعٍ.



> **إرشادٌ**
> إذا لــمْ تتغيّــرْ إشــارةُ المشــتقّةِ مــنْ مُوجبــةٍ إلــى ســالبةٍ أوْ العكسِ حولَ النقطــةِ الحرجةِ؛ فلا يكونُ للاقترانِ قيمةٌ عُظمى ولا صُغرى عندَ تلكَ النقطةِ.

> **أُفكِّرُ**
> لمــاذا لا توجــدُ قيــمٌ عظمــى وقيــمٌ صغرى للاقترانِ الثابتِ؟
> لمــاذا لا توجــدُ قيــمٌ عظمــى وقيــمٌ صغرى للاقتــرانِ الخطِّيِّ الذي مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ؟

مثال 2: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ موقعَ كرةٍ بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ ركلِها رأسيًّا لأعلى:

1 أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثِّلُ الاقترانُ المُعطى $s(t)$ موقعَ الكرةِ. ومنَ المعلومِ أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ تساوي اقترانَ السرعةِ. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوِّضُ $t = 3$ في $s'(t)$:

$s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ اقترانُ الموقعِ

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$s'(3) = 25 - 10(3)$ بتعويضِ $t = 3$ في $s'(t)$

$= -5$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ -5 m/ s

أتعلَّمُ

سرعةُ الكرةِ هيَ 5 m/s، والإشارةُ السالبةُ تدلُّ على أنَّ الكرةَ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها، وأخذَتْ تهبطُ نحوَ الأرضِ.

2 أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ.

يُمثِّلُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقترانِ الموقعِ $s(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أُحدِّدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $s'(t) = 0$:

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$25 - 10t = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$25 = 10t$ بجمعِ $10t$ للطرفيْنِ

$t = 2.5$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 10

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$

t		2.5	
إشارةُ الميلِ	+ + +	0	− − −

أتعلَّمُ

بما أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ هيَ اقترانُ السرعةِ، فإنَّ القيمَ التي تساوي عندها مشتقةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا هيَ القيمُ التي تنعدمُ عندها السرعةُ.

إذنْ، تصلُ الكرةُ أقصى ارتفاعٍ عندما $t = 2.5$ s، وقيمتُهُ هيَ $s(2.5)$:

$s(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$ بتعويضِ $t = 2.5$ في $s(t)$

$= 32.25$ بالتبسيطِ

إذنْ، أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هوَ 32.25 m

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 20t - 5t^2$ موقعَ حجرٍ بالنسبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ رأسيًّا لأعلى:

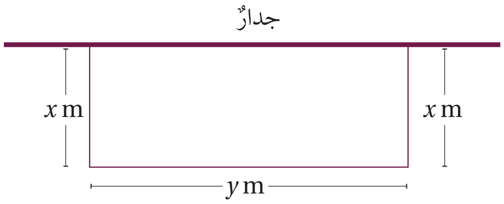
a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ.

b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.

إذا مثَّلَ الاقترانُ $f(x)$ مِساحةَ منطقةٍ ما، فإنَّ القيمةَ الكبرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ العظمى للاقترانِ، والقيمةَ الصغرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ الصغرى للاقترانِ.

مثال 3: من الحياة

جدارٌ: لدى مُزارعٍ 32 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بهِ حظيرةً مستطيلةً، طولُها y مترًا، وعرضُها x مترًا، بجانبِ جدارٍ يكونُ أحدَ أضلاعِ هذهِ الحظيرةِ:



1 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = x(32-2x)$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

طولُ السياجِ 32 m؛ لذا، فإنَّ $x + y + x = 32$

إذنْ، طولُ الحظيرةِ $y = 32-2x$، ومِساحتُها $x(32-2x)$ مترًا مُربَّعًا.

2 أَجِدُ $A'(x)$.

$A(x) = x(32-2x)$ اقترانُ المِساحةِ

$A(x) = 32x-2x^2$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$A'(x) = 32-4x$ مشتقةُ اقترانِ المِساحةِ

3 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحظيرةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

لإيجادِ قيمةِ x، أحُلُّ المعادلةَ $A'(x) = 0$:

$32 - 4x = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$32 = 4x$ بجمعِ $4x$ للطرفيْنِ

$x = 8$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 4

أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ.

أُعوِّضُ قيمةَ $x = 8$ بالاقترانِ الذي يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

$A(8) = 8(32-2(8))$ بتعويضِ $x = 8$ في $A(x)$

$= 128$ بالتبسيطِ

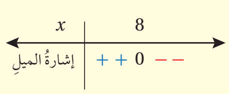
إذنْ، أكبرُ مِساحةٍ للحظيرةِ 128 m^2، وهيَ تنتجُ عندما يكونُ عرضُ الحظيرةِ 8 m، وطولُها 16 m.

أتذكَّرُ

تُسمّى قيمُ x التي تُحقِّقُ المعادلةَ $f'(x) = 0$ قيمًا حرجةً لمنحنى الاقترانِ $f(x)$.

تنبيهٌ

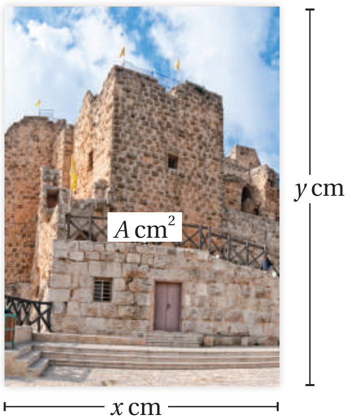
تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ منْ يسارِ إلى يمينِ $x = 8$؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = 8$



بنى عزُّ الدينِ أسامةُ قلعةَ عجلونَ (أحدَ قادةِ صلاحِ الدينِ الأيّوبيِّ)، وذلكَ عامَ 1184م/ 580هـ. تمتازُ هذهِ القلعةُ بمتانةِ بنائِها، وموقعِها الاستراتيجيِّ المُطِلِّ.

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ، محيطُها 72 cm، ومساحتُها A cm^2:



a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الصورةِ.

b) أَجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للصورةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 2x^3 + 7$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11) أَجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ.

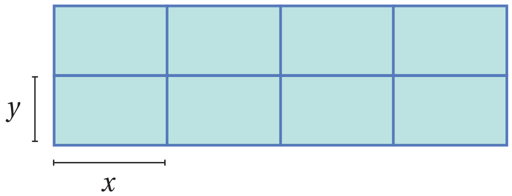
12) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ السهمُ.

13) يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50 - x)$ مِساحةَ مستطيلٍ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟

14 للاقترانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاثُ نقاطٍ حرجةٍ. أَجِدُ إحداثياتِ هذهِ النقاطِ، مُصنِّفًا إيّاها إلى عظمى، وصغرى محليةٍ.

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$.

لدى مُزارِعٍ 180 m منَ الشِّباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها x مترًا، وعرضُها y مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:



16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ x وَ y هيَ $y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

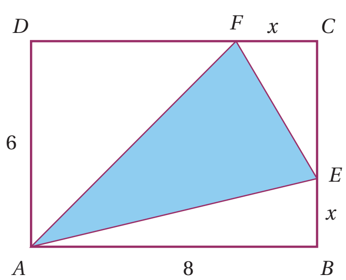
19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ.

20 **برهانٌ:** أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

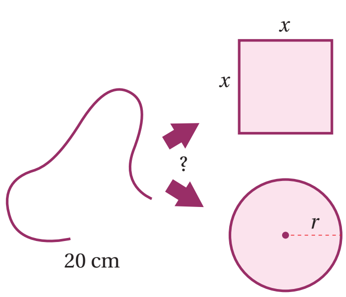
21 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمتَي الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:



22 اعتمادًا على القياساتِ المعطاةِ في الشكلِ، أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ AFE.

23 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ AFE أصغرَ ما يُمكِنُ.



24 **تحدٍّ:** سلكٌ طولُهُ 20 cm، يُرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَي المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ.

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x - 1$ عندَ النقطةِ $x = 5$ هوَ:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$

c) -1 d) 0

2 إذا كانَ $f(x) = x(2x + 1)$ ، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x + 1$

c) $2x^2 + x$ d) $4x + 1$

3 قيمةُ x التي عندَها قيمةٌ عظمى للاقترانِ $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هيَ:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$

c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثَّلَ الاقترانُ $s(t) = t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً، فإنَّ سرعةَ الجسمِ بوحدةِ m/s عندما $t = 1$ هيَ:

a) 0 b) 1

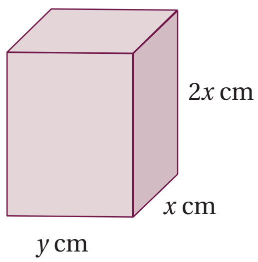
c) 2 d) 4

5 إذا كانَ $h(x) = 2x^2 + x$ ، فأَجِدُ $h'(x)$ ، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ $x(1 + h'(x)) = 2h(x)$.

6 إذا وقعَتِ النقطةُ $P(-1, c)$ على منحنى الاقترانِ $f(x) = 5x^2 + 2$، فأَجِدُ قيمةَ c، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أوْ سالبًا عندَ النقطةِ P.

7 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 4x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ x لها -1

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِنِ البناءِ، وتبلغُ مساحةُ سطحِهِ الكليةُ $600\ \text{cm}^2$:



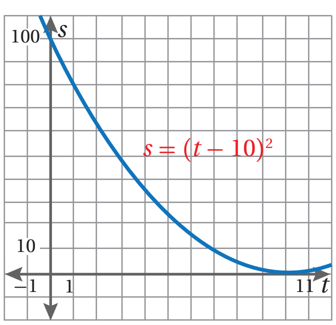
8 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ.

9 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ.

10 أَجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ.

11 يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + 1$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانية. أَجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ t عندما تبلغُ السرعةُ 6 m/s

أطلقَتْ سيّارةٌ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتحركت في مسارٍ مستقيمٍ نحو محطةِ الوَقودِ.



يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجاورِ العلاقةَ بينَ موقعِ السيارةِ بالأمتارِ (s) بالنسبةِ إلى الزمنِ (t) بالثواني:

12 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ.

13 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ.

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانات الآتيةِ:

14 $f(x) = 2\pi^3$

15 $f(x) = x^8$

16 $f(x) = -3x^4$

17 $f(x) = x$

18 $f(x) = 1-2x$

19 $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

20 $f(x) = 17$

21 $f(x) = 5x + 4$

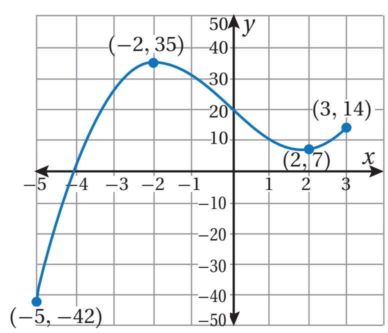
22 $f(x) = x^2-5x + 6$

23 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

24 تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟

25 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:

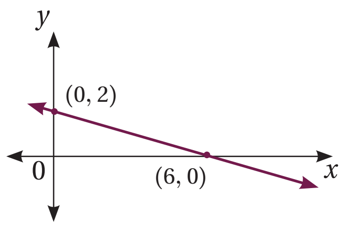


26 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا.

27 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا.

28 أُحدِّدُ النقطةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا.

29 إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأَجِدُ $f'(x)$.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

30 جميعُ قيمِ x التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى محلية للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

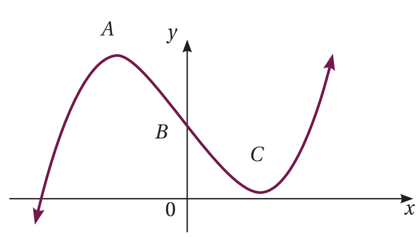
a) $-1, 0, 1$ **b)** $-1, 0$

c) $0, 1$ **d)** $-1, 1$

31 عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^2$ هوَ:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3-12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ A، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ C، ويقطعُ محورَ y عندَ النقطةِ B:



32 أَجِدُ $f'(x)$.

33 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ B.

34 أَجِدُ إحداثيَّي كلٍّ منَ النقطتيْنِ A وَ C.

الوحدةُ 7

المتجهاتُ
Vectors

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

لفهمِ تأثيرِ قوةٍ ما في جسمٍ، يجبُ تحديدُ كلٍّ مِنْ مقدارِ هذهِ القوةِ، واتجاهِها، في ما يُعرَفُ بالمتجهِ. في هذهِ الوحدةِ، سأتعلَّمُ كثيرًا عنِ المتجهاتِ وتطبيقاتِها الحياتيةِ، منْ مثلِ تحديدِ تأثيرِ الرياحِ في حركةِ السفنِ الشراعيةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلَّ المعادلاتِ الخطِّيةِ بمُتغيِّرَيْنِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ إيجادَ إحداثيَّيْ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
- ✓ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الكاملةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ المتجهاتِ، وكيفيةَ تمثيلِها على المستوى الإحداثيِّ.
- ◄ جمعَ المتجهاتِ، وطرحَها، وضربَها القياسيَّ.
- ◄ التفسيرَ الهندسيَّ للمتجهاتِ، وبعضَ التطبيقاتِ الحياتيةِ عليْها.
- ◄ إيجادَ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهَيْنِ.

مشروعُ الوحدةِ

المتجهاتُ في الجغرافيا

فكرةُ المشروعِ أســتعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشــروعِنا الخاصِّ باكتشــافِ اســتعمالاتٍ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما ستعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورةٍ لخريطةِ الوطنِ العربيِّ أوِ الشرقِ الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ بجهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ أيقونةَ Image من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظْتُها.
   - أُظهِرُ الشــبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاســوبِ، ثمَّ اختيارِ (الإعداداتُ) Settings، ومنْها أختارُ Background Image
   - أَجِــدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ من شــريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ موقعِ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ.
3. أرسمُ متجهًا بينَ أيِّ عاصمتيْنِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ من شريطِ الأدواتِ.
4. أَجِدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمّانَ وأربعِ عواصمَ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أُقارِنُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّمًا النتائجَ في جدولٍ.
5. أَجِدُ اتجاهَ أربعِ عواصمَ عربيةٍ بالنسبةِ إلى مدينةِ عمّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيه ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجريْتُها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفْتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومقترحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

الدرسُ
1

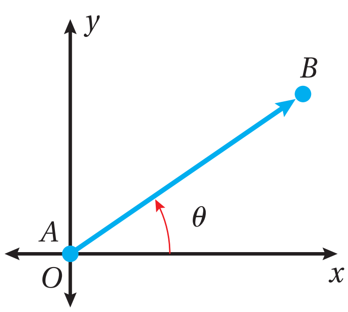
المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
Vectors in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ المتجهِ، وتمثيلُهُ في المستوى الإحداثيِّ، وإيجادُ مقدارِ المتجهِ.

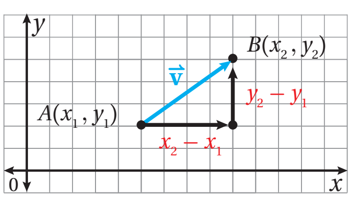
المصطلحاتُ المُركَّبةُ الأفقيةُ، المُركَّبةُ الرأسيةُ، الصورةُ الإحداثيةُ، الوضعُ القياسيُّ، متّجهُ الموقعِ، مقدارُ المتجهِ، السرعةُ المتجهةُ.

مسألةُ اليومِ قطعَ يختٌ سياحيٌّ مسارًا مستقيمًا في البحرِ الأحمرِ، مُنطلِقًا منْ مدينةِ العقبةِ باتجاهِ الجنوبِ الغربيِّ إلى مدينةِ طابا المصريةِ. هلْ يُمكِنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليختِ، وتحديدُ المسافةِ التي قطعَها باستعمالِ إحداثيَّيْ هاتيْنِ المدينتيْنِ فقطْ؟

درسْتَ في الفيزياءِ تمثيلَ المتجهاتِ في صورةِ سهمٍ ينطلقُ منْ نقطةِ إسنادٍ، مثلِ نقطةِ الأصلِ، وبطولٍ يُحدِّدُهُ مقياسُ رسمٍ مناسبٍ، واتجاهٍ تُحدِّدُهُ الزاويةُ θ التي يصنعُها السهمُ معَ محورٍ مرجعيٍّ، مثلِ محورِ x الموجبِ عكسَ عقاربِ الساعةِ. ولأنَّ استعمالَ مقياسِ الرسمِ قدْ لا يكونُ دقيقًا في بعضِ الأحيانِ؛ فإنَّهُ يتعيَّنُ استعمالُ طريقةٍ أكثرَ دقَّةً لتمثيلِ المتجهاتِ.



يُمكِنُ تمثيلُ المتجهِ $(\overrightarrow{AB})$ في المستوى الإحداثيِّ في صورةِ قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُّ منْ نقطةِ بدايتِهِ $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةِ نهايتِهِ $B(x_2, y_2)$، وفي اتجاهٍ يُحدِّدُهُ رمزُ السهمِ كما في الشكلِ المجاورِ.



رموزٌ رياضيةٌ

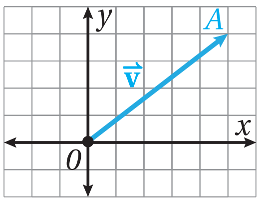
يُرمَزُ إلى المتجهِ الذي نقطةُ بدايتِهِ A، ونقطةُ نهايتِهِ B بالرمزِ $\overrightarrow{AB}$ أوْ بالرمزِ $\vec{\mathbf{v}}$ مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ.

تُسمّى الإزاحةُ الأفقيةُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ ونقطةِ نهايتِهِ **المُركَّبةَ الأفقيةَ** (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$، وتُسمّى الإزاحةُ الرأسيةُ بينَهُما **المُركَّبةَ الرأسيةَ** (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.

يُمكِنُ كتابةُ المتجهِ **بالصورةِ الإحداثيةِ** (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبتيهِ الأفقيةِ والرأسيةِ (العموديةِ) كما يأتي:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

إذا كانَتْ نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ نقطةَ الأصلِ O، كما في الشكلِ المجاورِ، فإنَّهُ يكونُ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) ويسمّى أيضًا **متّجهَ الموقعِ** (position vector) للنقطةِ A التي تقعُ عندَ نهايتِهِ؛ لأنَّهُ يحدّدُ موقعَها بالنسبةِ إلى نقطةِ الأصلِ.

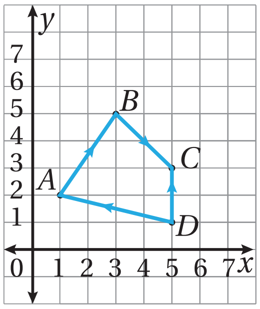


رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الرمزُ $\langle a, b\rangle$ أوْ $\binom{a}{b}$ لكتابةِ المتجهِ بصورتِهِ الإحداثيةِ.

مثال 1

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



1 $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $A(1, 2) = (x_1, y_1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$

إذنْ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3\rangle$

طريقةٌ بديلةٌ

للانتقالِ منَ النقطةِ A إلى النقطةِ B، أتحرَّكُ وحدتيْنِ إلى اليمينِ، وثلاثَ وحداتٍ إلى الأعلى.

2 $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $B(3, 5)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$

إذنْ، $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2\rangle$

أتعلَّمُ

يُعبَّرُ عنِ الانتقالِ إلى اتجاهِ اليسارِ أوِ اتجاهِ الأسفلِ باستعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

3 $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $D(5, 1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

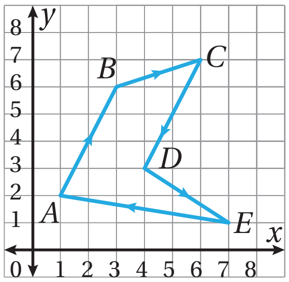
المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$

إذنْ، $\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2\rangle$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{CB}$

مقدارُ المتجهِ (magnitude) هوَ كميةٌ قياسـيةٌ تُمثِّلُ طولَ القطعةِ المسـتقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطتَيْ بدايةِ المتجهِ ونهايتِهِ.

فـإذا كانَـتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ $\vec{\mathbf{v}}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ اسـتعمالُ نظريةِ فيثاغورس لإيجادِ الصيغةِ الآتيةِ لمقدارِ المتجهِ $|\vec{\mathbf{v}}|$:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

أتعلَّمُ

يُرمَزُ إلى مقدارِ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}}$ بالرمزِ $|\vec{\mathbf{v}}|$

مفهومٌ أساسيٌّ — **مقدارُ المتجهِ**

إذا كانَـتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ $|\vec{\mathbf{v}}|$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

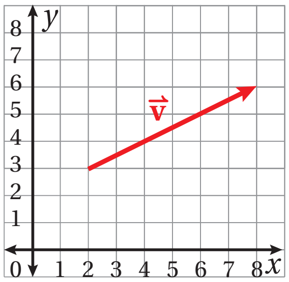
$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

وإذا كانَ المتجـهُ $\vec{\mathbf{v}}$ مكتوبًا بالصورةِ الإحداثيـةِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2 \rangle$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

مثال 2

1 **أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{v}$ في الشكلِ المجاورِ.**



الخطوةُ 1: أُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ نقطةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطةِ نهايتِهِ.

إحداثيا نقطةِ بدايةِ المتجهِ $(2, 3)$، وإحداثيا نقطةِ نهايتِهِ $(8, 6)$.

الخطوةُ 2: أُعوِّضُ الإحداثياتِ في صيغةِ مقدارِ المتجهِ.

$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{36 + 9}$ بالتبسيطِ

$= 3\sqrt{5}$ بالتبسيطِ

2 **أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$**

المتجهُ مكتوبٌ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$ بالتعويضِ

$= 5$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

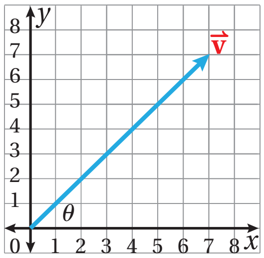
a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$

b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ المتجهُ وترًا فيهِ.

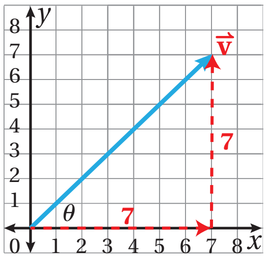
مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$ في الشكلِ المجاورِ.



الخطوةُ 1: أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$

أستعملُ نسبةَ الظلِّ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}$ وترًا فيهِ:



استعمالُ نسبةِ الظلِّ لإيجادِ الزاويةِ $\qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

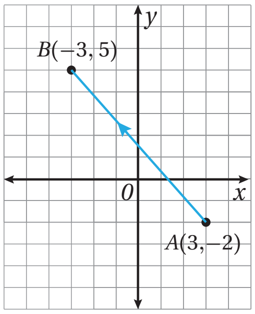
بالتعويضِ $\qquad = \dfrac{7}{7} = 1$

باستعمالِ معكوسِ الظلِّ $\qquad \theta = \tan^{-1}(1) = 45°$

إذنْ، اتجاهُ $\vec{\mathbf{v}}$ هوَ $45°$ معَ الأفقيِّ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



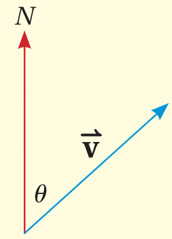
إرشادٌ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ العلميةَ لأجدَ $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي:

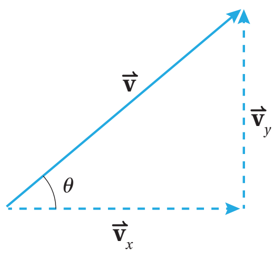
SHIFT Tan 1

أتعلَّمُ

يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ بدلالةِ اتجاهِهِ منَ الشمالِ.



السرعةُ المتجهةُ (velocity) هيَ سرعةٌ في اتجاهٍ مُحدَّدٍ ويُمكِنُ تمثيلُها بمتجهٍ. في الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ المتجهُ $\vec{\mathbf{v}}$ السرعةَ المتجهةَ لجسمٍ تحرَّكَ في مسارٍ مستقيمٍ، فصنعَ زاويةً قياسُها θ معَ محورِ x الموجبِ، وقدْ مثَّلَ مقدارُ المتجهِ $|\vec{\mathbf{v}}|$ سرعةَ هذا الجسمِ.



تُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}_x$ المُركَّبةَ الأفقيةَ للسرعةِ المتجهةِ، وتُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}_y$ المُركَّبةَ الرأسيةَ لهذهِ السرعةِ، حيثُ: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_x, v_y \rangle$

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لكتابةِ المُركَّبتيْنِ الأفقيةِ والرأسيةِ للسرعةِ المتجهةِ بدلالةِ الزاويةِ θ التي تصنعُها السرعةُ المتجهةُ معَ محورِ x الموجبِ كما يأتي:

$$v_x = |\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$

$$v_y = |\vec{\mathbf{v}}| \sin\theta$$

عندئذٍ، يُمكِنُ كتابةُ السرعةِ المتجهةِ بالصورةِ الإحداثيةِ كما يأتي:

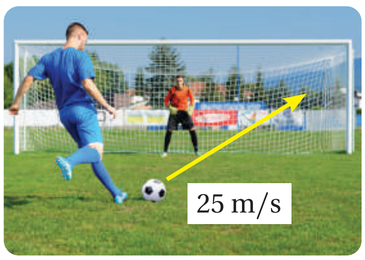
$$\vec{\mathbf{v}} = \langle\, |\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta, |\vec{\mathbf{v}}| \sin\theta \,\rangle$$

أتعلَّمُ

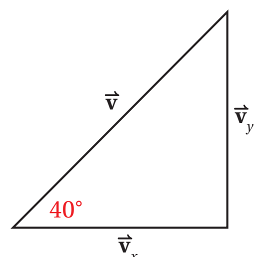
قدْ يُمثِّلُ المتجهُ أيضًا مسافةً متجهةً، أوْ قوةً متجهةً.

مثال 4: من الحياة

كرةُ قدمٍ: ركلَ ريّانُ كرةً بسرعةِ 25m/s، كما في الشكلِ المجاورِ، وبزاويةٍ مقدارُها °40 معَ الأفقيِّ. أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للكرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.



أرسمُ شكلًا مُبسَّطًا يُعبِّرُ عنِ المسألةِ، بحيثُ يكونُ فيهِ $|\vec{\mathbf{v}}| = 25$، وَ $\theta = 40°$:



$\vec{\mathbf{v}} = \langle |\vec{\mathbf{v}}|\cos\theta, |\vec{\mathbf{v}}| \sin\theta \rangle$ — $\vec{\mathbf{v}}_x=|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$، و $\vec{\mathbf{v}}_y=|\vec{\mathbf{v}}| \sin\theta$

$= \langle 25 \cos40°, 25 \sin40° \rangle$ — بالتعويضِ

$= \langle 25\times0.7660, 25\times0.6428\rangle$ — بتعويضِ قيمِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ °40

$= \langle 19.15,16.07\rangle$ — بالتبسيطِ

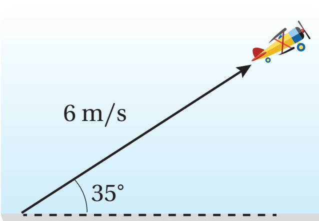
إذنْ، $\vec{\mathbf{v}} = \langle 19.15, 16.07\rangle$ هوَ المتجهُ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الكرةِ.

ازدادَ الاعتمادُ على الطائراتِ المُسيَّرةِ عنْ بُعْدٍ في كثيرٍ منَ المجالاتِ، مثلِ: رصدِ الازدحاماتِ المروريةِ، ومراقبةِ انتشارِ حرائقِ الغاباتِ.

أتحقق من فهمي

ألعابٌ: أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميساءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةٍ قياسُها °35 عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ 6 m/s كما في الشكلِ المجاورِ.

أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.



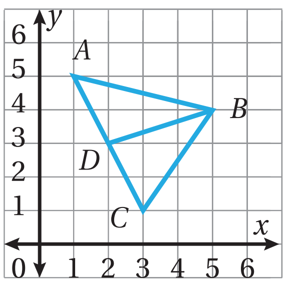
أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1 $(2, 5)$, $(4, -1)$ **2** $(-4, 7)$, $(-3, 0)$ **3** $(6, -2), (8, 1)$

4 $(4, -9), (3, -5)$ **5** $(-1.5, 3), (0.5, -4)$ **6** $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:



7 $\overrightarrow{AB}$ **8** $\overrightarrow{DB}$

9 $\overrightarrow{CB}$ **10** $\overrightarrow{CA}$

11 $\overrightarrow{AC}$ **12** $\overrightarrow{DA}$

13 في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ D على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$ ؟

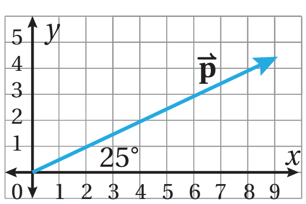
أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

14 $\langle 2,-6 \rangle$ **15** $\langle 7,-8 \rangle$ **16** $\langle -1,-1 \rangle$

17 $\langle 3,5 \rangle$ **18** $\langle 0,0 \rangle$ **19** $\langle 2, 9 \rangle$

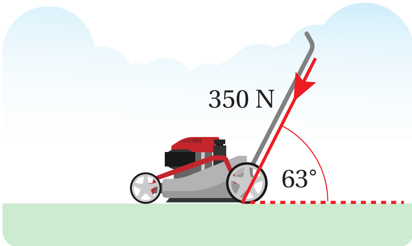
إذا كانَتْ M هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$ ، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ O هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

20 $\overrightarrow{FG}$ **21** $\overrightarrow{GF}$ **22** $\overrightarrow{OM}$



23 أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ $\vec{\mathbf{p}}$ في الشكلِ المجاورِ بطريقتيْنِ.

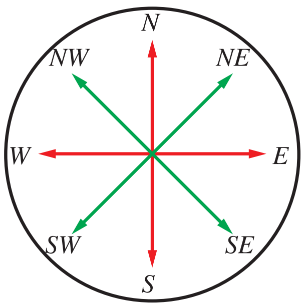
24 **حيواناتٌ:** أكتبُ السرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سرعتُهُ الأفقيةُ $v_x = 27$ km/h، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25$ km/h



25 **فيزياءُ:** تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N، وبزاويةٍ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ.
أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

26 أكتبُ المتجهَ $\mathbf{\vec{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\mathbf{\vec{v}}| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °90 معَ محورِ x.

27 أكتبُ المتجهَ $\mathbf{\vec{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\mathbf{\vec{v}}| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °320 معَ محورِ x.



28 خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ **(إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتيْنِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما).**

مهاراتُ التفكيرِ العليا

29 **تحدٍّ:** إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ B، مُبرِّرًا إجابتي.

30 **تبريرٌ:** ما مجموعةُ قيمِ b التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b\rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي.

31 **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $\mathbf{\vec{v}} = \langle 6, -1\rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

ناصرٌ	ليلى
$\lvert\mathbf{\vec{v}}\rvert = 37$	$\lvert\mathbf{\vec{v}}\rvert = \sqrt{35}$

هلْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.

الدرسُ 2

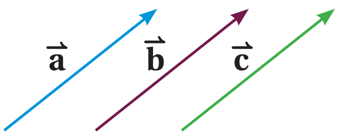
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

فكرةُ الدرسِ إجراءُ العملياتِ على المتجهاتِ.

المصطلحاتُ المتجهاتُ المتساويةُ، المتجهاتُ المتوازيةُ، معكوسُ المتجهِ، المحصلةُ، المتجهُ الصفريُّ.

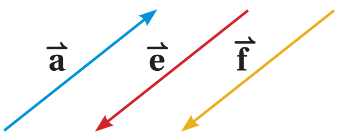
مسألةُ اليومِ بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ فقطعتْ مسافةَ 400 km ثمَّ اتجهتْ شرقًا وقطعتْ مسافةَ 250 km إذا مثّلَ كلٌّ منَ المسارَيْنِ اللّذينِ سلكَتْهُما الطائرةُ مُتجهًا في المستوى الإحداثيِّ، فماذا يمكنُ أنْ يمثلَ جمعُ هذينِ المتجهينِ؟

المتجهانِ المتساويانِ (equal vectors) هما متجهانِ لهُما نفسُ الاتجاهِ والمقدارِ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متساويةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$

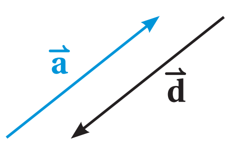


أتعلَّمُ
لا يُشترطُ أنْ يكونَ للمتجهينِ المتساويينِ نُقطَتا البدايةِ والنهايةِ ذاتاهُما.

المتجهانِ المتوازيانِ (parallel vectors) هما متجهانِ لهُما الاتجاهُ نفسُهُ، أوْ عكسُهُ، وليسَ شرطًا أنْ يكونَ لهُما المقدارُ نفسُهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$ متوازيةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} \parallel \vec{e} \parallel \vec{f}$

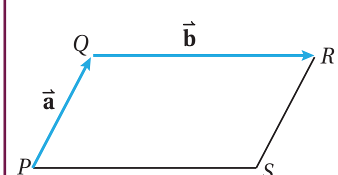


معكوسُ المتجهِ (opposite vectors) هوَ متجهٌ لهُ نفسُ مقدارِ متجهٍ آخرَ، لكنَّهُ في اتجاهٍ مُعاكسٍ لهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهُ $\vec{d}$ معكوسُ المتجهِ $\vec{a}$، وبالرمزِ: $-\vec{a}$؛ أيْ إنَّ $\vec{d} = -\vec{a}$



مثال 1

في الشكلِ المجاورِ، $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فيهِ $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ ، وَ $\overrightarrow{QR} = \vec{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$:



1. $\overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{SR} = \vec{a}$ متجهٌ موازٍ ومساوٍ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

2. $\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{SP} = -\vec{b}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

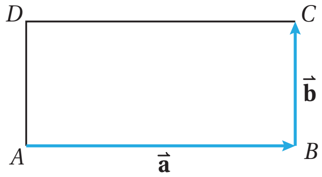
3 $\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

4 $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RQ} = -\vec{b}$ متجهٌ مُوازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

أتحقق من فهمي



في الشكلِ المجاورِ، $ABCD$ مستطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$، وَ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$:

a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{CB}$

جمعُ المتجهاتِ هندسيًّا

يمكن إيجاد ناتج جمع متجهين أو أكثر هندسياً.

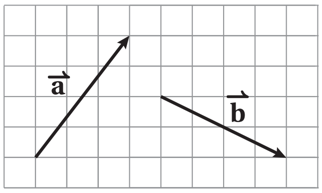
لإيجادِ $\vec{a} + \vec{b}$ هندسيًّا، أَتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

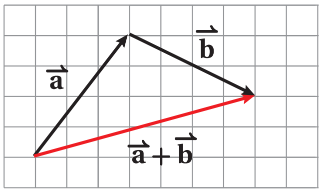
الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $\vec{a}$.

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ $\vec{b}$ بحيثُ تكونُ نقطةُ بدايتِهِ هيَ نقطةَ نهايةِ المتجهِ $\vec{a}$.

الخطوةُ 3: أَصِلُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ $\vec{a}$ ونقطةِ نهايةِ المتجهِ $\vec{b}$، فيكونُ المتجهُ الناتجُ هوَ المتجهَ $\vec{a} + \vec{b}$.

يُسمّى المتجهُ الناتجُ منْ جمعِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ **المحصلةَ** (resultant)، وتسمّى هذهِ الطريقةُ في جمعِ المتجهّاتِ هندسيًّا قاعدةَ المثلثِ.



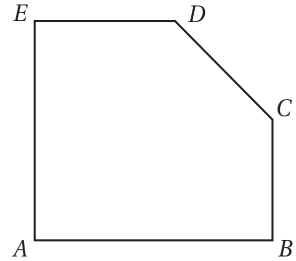


أتعلَّمُ

لا يتأثّرُ المتّجهُ بتغييرِ موقِعِهِ ما دامَ أنَّ اتجاهَهُ ومقدارَهُ لم يتغيّرا.

مثال 2

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:



1 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BC}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$، فينتجُ $\overrightarrow{BA}$

2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

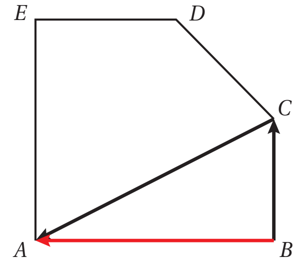
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BA}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{EC}$

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{DE}$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$



أتعلَّمُ

- يُسمّى المتجهُ $\overrightarrow{AA}$ المتجهَ الصفريَّ؛ وهوَ متجهٌ ليسَ لهُ مقدارٌ واتجاهٌ.
- لأيِّ متجهٍ $\vec{\mathbf{a}}$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{a}} + 0 = 0 + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$

$\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = (-\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{a}} = 0$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$

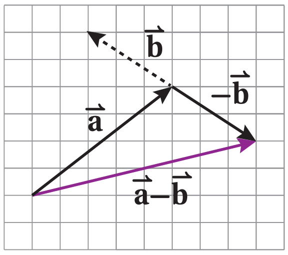
طرحُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ هندسيًّا.

لإيجادِ $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$، أجمعُ المتجهَ $\vec{\mathbf{a}}$ معَ معكوسِ المتجهِ $\vec{\mathbf{b}}$؛ أيْ:

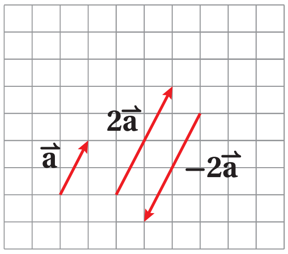
$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$$

ولذلكَ يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ هندسيًّا بطريقةٍ مشابهةٍ لعمليةِ الجمعِ. وذلكَ بإيجادِ محصلةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $-\vec{\mathbf{b}}$ كما في الشكلِ المجاورِ.



ضربُ المتجهِ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا

ينتجُ منْ ضربِ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$ في العددِ الحقيقيِّ k متجهٌ موازٍ للمتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$، ويكونُ للمتجهيْنِ $k\vec{\mathbf{a}}$، وَ $\vec{\mathbf{a}}$ الاتجاهُ نفسُهُ إذا كانَ k عددًا موجبًا، واتجاهانِ مُتعاكِسانِ إذا كانَ k عددًا سالبًا.

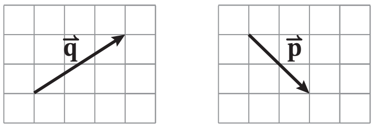


$$2\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}$$

$$-2\vec{\mathbf{a}} = (-\vec{\mathbf{a}}) + (-\vec{\mathbf{a}})$$

مثال 3

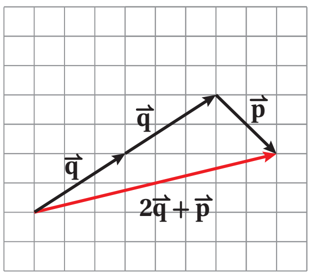
اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:



1) $2\vec{q}+\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $2\vec{q}$

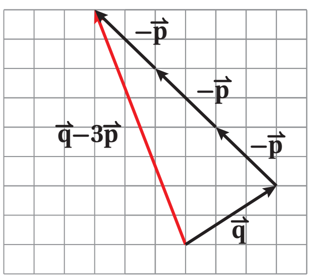
الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $2\vec{q}$ وَ $\vec{p}$



2) $\vec{q}-3\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $-3\vec{p}$ منْ رأسِ المتجهِ $\vec{q}$

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $\vec{q}$ وَ $-3\vec{p}$



اكتُشِفَتِ المتجهاتُ قبلَ 200 عامٍ تقريبًا، وهيَ تُعَدُّ منَ الفروعِ الحديثةِ في علمِ الرياضياتِ مقارنةً بعلمِ الجبرِ. وقدْ أسهمَ اكتشافُها كثيرًا في الربطِ بينَ الهندسةِ والجبرِ؛ ما أدّى إلى تطوُّرِ علمِ الرياضياتِ.

أتحقق من فهمي

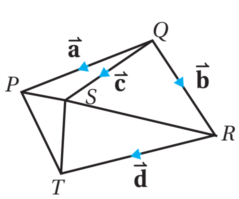
اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

a) $\vec{p}+3\vec{q}$ b) $3\vec{q}-2\vec{p}$ c) $2\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}$

يمكنُ استعمالُ قاعدةِ المثلّثِ بطريقةٍ عكسيّةٍ؛ لكتابةِ متّجهٍ يمثّلُ ضلعًا في شكلٍ هندسيٍّ بدلالةِ متّجهاتٍ تمثّلُ أضلاعًا أخرى في الشكلِ.

مثال 4

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$



1) $\overrightarrow{PS}$

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔPQS

$=-\vec{a}+\vec{c}$ بالتعويضِ

$=\vec{c}-\vec{a}$ بالتبسيطِ

2 $\overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔRQP

$= -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ بالتعويضِ

$= \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ بالتبسيطِ

3 $\overrightarrow{PT}$

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔPRT

$= (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{d}}$ $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP} = -(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

$= \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}} - \vec{\mathbf{a}}$ بالتبسيطِ

4 $\overrightarrow{TS}$

$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}$ بجمعِ المتجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta TRS, \Delta RQS$

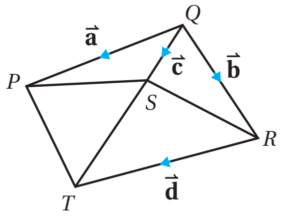
$= \overrightarrow{TR} + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS})$ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}$

$= -\vec{\mathbf{d}} + (-\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ بالتعويضِ

$= \vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{d}}$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشــكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{d}}$



a) $\overrightarrow{SR}$ b) $\overrightarrow{QT}$ c) $\overrightarrow{PT}$ c) $\overrightarrow{ST}$

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ جبريًّا

يُمكِــنُ إيجادُ ناتجِ الجمعِ والطرحِ والضربُ في ثابتٍ للمتجهاتِ المكتوبةِ بالصورةِ الإحداثيةِ عنْ طريقِ جمعِ مُركَّباتِها الأفقيةِ والرأسيةِ، أوْ طرحِها.

مفهومٌ أساسيٌّ **جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ**

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle x_1, y_1 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle x_2, y_2 \rangle$، وكانَ k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \langle x_1+x_2, y_1+y_2 \rangle$ $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \langle x_1-x_2, y_1-y_2 \rangle$ $k\vec{\mathbf{a}} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$

مثال 5

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -4, 6 \rangle$، وَ $\vec{c} = \langle -3, -1 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle 3 + (-4), 1 + 6 \rangle$$
$$= \langle -1, 7 \rangle$$

2 $2\vec{a}$

$$2\vec{a} = \langle 2 \times 3, 2 \times 1 \rangle = \langle 6, 2 \rangle$$

3 $\vec{c} - \vec{b}$

$$\vec{c} - \vec{b} = \langle -3 - (-4), -1 - 6 \rangle$$
$$= \langle 1, -7 \rangle$$

4 $\vec{a} + \vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{c} = \langle 3 + (-3), 1 + (-1) \rangle$$
$$= \langle 0, 0 \rangle$$

أفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ المتجهيْنِ $\vec{u} - \vec{v}$ ، $\vec{v} - \vec{u}$؟

أتعلَّمُ

المتجهُ $\vec{a}$ هوَ معكوسُ المتجهِ $\vec{c}$؛ لأنَّ مجموعَهُما يساوي المتجهَ الصفريَّ؛ أيْ إنَّ:

$$\vec{a} + \vec{c} = 0$$

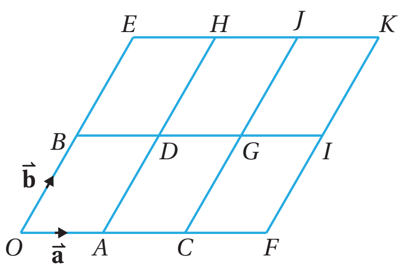
أتحقق من فهمي

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -2, 7 \rangle$، وَ $\vec{c} = \langle 0, -5 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $-\vec{b}$ b) $4\vec{c}$ c) $\vec{b} - \vec{c}$ d) $4\vec{a} + 3\vec{c}$

أتدرب وأحل المسائل

أحدِّدُ كلًّا ممّا يأتي اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يتكوَّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ:



1. ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\vec{a}$
2. ثلاثةُ متجهاتٍ موازيةٍ للمتجهِ $\vec{b}$
3. ثلاثةُ متجهاتٍ معاكسةٍ للمتجهِ $\vec{a}$
4. ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OD}$
5. ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OG}$

باستعمالِ الشكلِ الواردِ في السؤالِ السابقِ، أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

6 المتجهُ $\overrightarrow{OC}$

7 متجهُ الموقعِ للنقطةِ E

8 متجهُ الموقعِ للنقطةِ F

9 المتجهُ $\overrightarrow{OG}$

10 المتجهُ $\overrightarrow{AG}$

11 المتجهُ $\overrightarrow{OK}$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 34, -86 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle -65, 17 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{c}} = \langle 9, -1 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

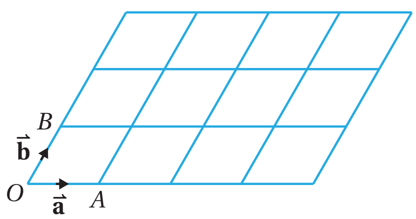
15 $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}$

14 $3\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}}$

13 $\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

12 $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{c}}$

أنسـخُ الشكلَ المجاورَ الذي يتكوَّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمَّ أحدِّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ C, D, E, F بحيثُ تحقّقُ كلًّا ممّا يأتي:



17 $\overrightarrow{OD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

16 $\overrightarrow{OC} = 2\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}$

19 $\overrightarrow{OF} = 4\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$

18 $\overrightarrow{OE} = 4\vec{\mathbf{a}}$

20 إذا كانَ $\langle 3x-y, y-x^2 \rangle = \langle 7, -5 \rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

إذا كانَ $\vec{\mathbf{e}} = \langle -3, -2 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{f}} = \langle 2, 4 \rangle$ ، فأُمثِّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ:

23 $\vec{\mathbf{e}} - \vec{\mathbf{f}}$

22 $3\vec{\mathbf{f}}$

21 $\vec{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{f}}$

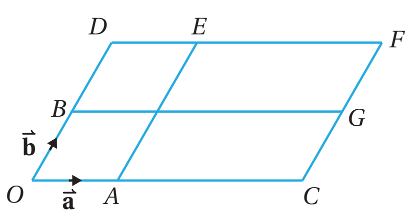
26 $2\vec{\mathbf{f}} + \vec{\mathbf{e}}$

25 $4\vec{\mathbf{e}}$

24 $\vec{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{e}}$

27 إذا كانَ $\vec{\mathbf{d}} = \langle 5, 9 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{e}} = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأَجِدُ $|4\vec{\mathbf{d}} - 3\vec{\mathbf{e}}|$ ، $|\frac{1}{3}\vec{\mathbf{e}}|$

يتكوَّنُ الشكلُ المجاورُ من مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازيةِ، إذا كان $\overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OA}$ فأكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$



31 $\overrightarrow{CE}$

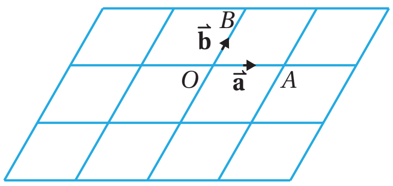
30 $\overrightarrow{EG}$

29 $\overrightarrow{OG}$

28 $\overrightarrow{OF}$

32 اعتمادًا على الشكلِ السابقِ أحدِّدُ متّجهينِ كلٌّ منهُما يساوي $(3\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}})$

33 **نزهةٌ بحريةٌ:** أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أستعملُ جمعَ المتجهاتِ لأكتبَ متجهًا يمثّلُ محصلةَ رحلةِ القاربِ وأجدُ بُعدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ.



أنسخُ الشكلَ المجاورَ المكوَّنَ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمّ أحدّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ *C, D, E, F, G, H, I, J* بحيثُ تحقّقُ كلًّا ممّا يأتي:

34 $\overrightarrow{OC} = 2\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

35 $\overrightarrow{OD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

36 $\overrightarrow{OE} = \vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

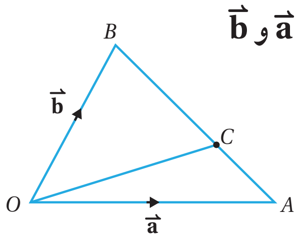
37 $\overrightarrow{OF} = \vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}$

38 $\overrightarrow{OG} = -\vec{\mathbf{a}}$

39 $\overrightarrow{OH} = -\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

40 $\overrightarrow{OI} = 2\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

41 $\overrightarrow{OJ} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$



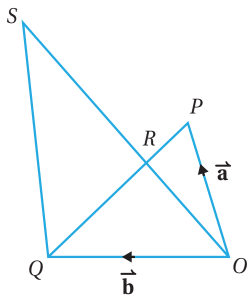
في الشكلِ المجاورِ إذا كانتْ *C* تقسمُ $\overline{AB}$ بنسبةِ 2:5 فأكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

42 $\overrightarrow{AB}$

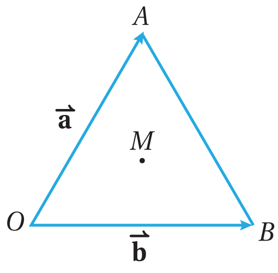
43 $\overrightarrow{AC}$

44 $\overrightarrow{OC}$

مهارات التفكير العليا



45 **برهانٌ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا كانتْ R تقسمُ كلًّا منْ $\overline{PQ}$، و $\overline{OS}$ بنسبةِ 2 : 1، وكانَ $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{b}}$، فأثبتُ أنَّ المتجهينِ $\overrightarrow{OP}$، و $\overrightarrow{QS}$ متوازيانِ.



تحدٍّ: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ المثلثَ متطابقَ الأضلاعِ *OAB* الذي مركزُهُ النقطةُ *M*؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ *M* عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:

46 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

47 أُثبتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

الدرسُ 3

الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

فكرةُ الدرسِ ضربُ المتجهاتِ، وإيجادُ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

المصطلحاتُ الضربُ القياسيُّ.

مسألةُ اليومِ دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها $54°$ مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

تعرَّفْتُ سابقًا العملياتِ على المتجهاتِ، مثلَ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ، وسأتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفيةَ إيجادِ ناتجِ ضربِ متجهيْنِ. **الضربُ القياسيُّ** (scalar product) هوَ عمليةٌ جبريةٌ بينَ متجهيْنِ، تنتجُ منْها كميةٌ قياسيةٌ يُرمَزُ إليْها بالرمزِ $\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}}$، وتُقرَأُ: $\vec{\mathbf{v}}$ dot $\vec{\mathbf{w}}$

مفهومٌ أساسيٌّ **الضربُ القياسيُّ**

إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فإنَّ: $\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

مثال 1

إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, 8 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle -5, 4 \rangle$، فأَجِدُ $\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}}$:

$$\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$ صيغةُ الضربِ القياسيِّ

$$= 2 \times -5 + 8 \times 4$$ بالتعويضِ

$$= -10 + 32$$ بالتبسيطِ

$$= 22$$

أتعلَّمُ
يُسمّى الضربُ القياسيُّ أيضًا الضربَ النقطيَّ Dot product

أتعلَّمُ
لأيِّ متجهٍ $\vec{\mathbf{u}}$، فإنَّ:
$\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{u}} = |\vec{\mathbf{u}}|^2$

أتحقق من فهمي

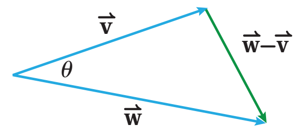
إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle -3, 2 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 6, 9 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}}$

b) $\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{u}}$

c) $\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{u}}$

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنَّ طولَ المتجهِ المرسومِ باللونِ الأخضرِ في الشكلِ المجاورِ هوَ $|\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}}|$ ، حيثُ: $\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}} = \langle w_1-v_1 , w_2-v_2 \rangle$



وباستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، فإنَّ:

$$|\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}}|^2 = |\vec{\mathbf{w}}|^2 + |\vec{\mathbf{v}}|^2 - 2\,|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = w_1^{\,2} + w_2^{\,2} + v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$

$$\cancel{w_1^{\,2}} - 2w_1 v_1 + \cancel{v_1^{\,2}} + \cancel{w_2^{\,2}} - 2\,w_2 v_2 + \cancel{v_2^{\,2}} = \cancel{w_1^{\,2}} + \cancel{w_2^{\,2}} + \cancel{v_1^{\,2}} + \cancel{v_2^{\,2}} - 2|\vec{\mathbf{w}}||\vec{\mathbf{v}}|\cos\theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_1v_1 = -2|\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = |\vec{\mathbf{w}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = |\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$$ الخاصيةُ التبديليةُ

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$$

ولذلكَ، فإنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}$$

الزاويةُ بينَ متجهينِ

مفهومٌ أساسيٌّ

يمكِـــنُ إيجادُ قياسِ الزاويــةِ θ بينَ المتجهينِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ حيثُ $0° \le \theta \le 180°$ باســتعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

مثال 2

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 3, 4 \rangle$

الخطوةُ 1: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$.

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$ بالتعويضِ

$$= \sqrt{100} = 10$$ بالتبسيطِ

الخطوةُ 2: أجدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{b}}$.

$$|\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \text{صيغةُ مقدارِ المتجهِ}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

الخطوةُ 3: أجدُ الضربَ القياسيَّ للمتجهين $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 \,.\, b_1 + a_2 \,.\, b_2 \quad \text{صيغةُ الضربِ القياسيِّ}$$

$$= 6\times3 + 8\times4 \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$= 18 + 32 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

$$= 50$$

الخطوةُ 4: أُعوِّضُ القيمةَ الناتجةَ منَ الخطوةِ السابقةِ في صيغةِ الزاويةِ بينَ متجهينِ.

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|} \quad \text{صيغةُ الزاويةِ بينَ متجهينِ}$$

$$= \frac{50}{10 \times 5} = 1 \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$$

بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ صفرٌ، فهُما متوازيانِ.

أتحقق من فهمي

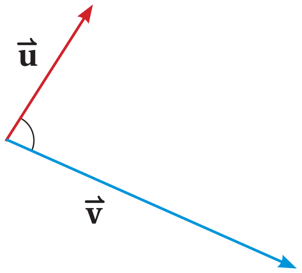
أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, 1 \rangle$ وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, 7 \rangle$

تُستخدَمُ المتجهاتُ في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونيةِ؛ فهيَ تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكَّمُ فيها اللاعبونَ.

إرشادٌ

أرسمُ المتجهيْنِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا وضعَ التوازي بينَهُما.

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$ متجهيْنِ غيرَ صفريَّيْنِ، وكانَتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَهُما قائمةً، فإنَّ المتجهيْنِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ ضربهما القياسي صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90° = 0$



مثال 3

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, 3 \rangle$ وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, 4 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 \,.\, v_1 + u_2 \,.\, v_2$

بالتعويضِ $= 2 \times -6 + 3 \times 4$

بالتبسيطِ $= -12 + 12$

$= 0$

بما أنَّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ ، فإنَّ المتجهيْنِ متعامدانِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 1, 0 \rangle$ وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -5 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

توجدُ تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ، أهمُّها حسابُ الشغلِ W الناتجِ منْ تأثيرِ قوةٍ ثابتةٍ F بزاويةٍ مُحدَّدةٍ θ على جسمٍ ما؛ لتحريكِهِ منْ نقطةٍ إلى أُخرى مسافةً مقدارُها d وحدةً. فالشغلُ هوَ كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجَ الضربِ القياسيِّ لمتجهِ القوةِ في متجهِ الإزاحةِ، ووحدةُ قياسِهِ هيَ جول (J). يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ الشغلِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$W = |F|\,|d|\,\cos\theta$$

أتعلَّمُ

وَحدةُ قياسِ الشغلِ هيَ نيوتن - متر، وتُسمّى الجول، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ J

مثال 4: من الحياة

فيزياءُ: سحبَ عاملٌ صندوقًا بقوةٍ مقدارُها $F = 13$ N ، وبذلَ شغلًا مقدارُهُ $W = 20$ J لسحبِ الصندوقِ مسافةً أفقيةً مقدارُها $d = 18$ m . ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

قانونُ الشغلِ $W = |F|\,|d|\,\cos\theta$

بالتعويضِ $20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$

بالتبسيطِ $20 = 234 \times \cos\theta$

بالتبسيطِ $\frac{20}{234} = \cos\theta$

معكوسُ جيبِ التمامِ $\theta = \cos^{-1}(0.0855)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\theta = 85.1°$

أتحقق من فهمي

سحبَ منذرٌ عربةً، فبذلَ شــغلًا مقدارُهُ 13 J، بقوةٍ مقدارُها 50 N، مسافةَ $d = 30\text{ m}$

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{a} = \langle 6, 8\rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -3\rangle$

2) $\vec{u} = \langle -3, 11\rangle$, $\vec{v} = \langle -9, 4\rangle$

3) $\vec{c} = \langle -12, 43\rangle$, $\vec{v} = \langle 22, 14\rangle$

4) $\vec{d} = \langle 21, 32\rangle$, $\vec{e} = \langle -21, 25\rangle$

5) إذا كانَ $|\vec{b}| = 6$، وَ $|\vec{a}| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ هوَ $42°$، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{a} \bullet \vec{b}$

6) إذا كانَ $|\vec{b}| = 76$، وَ $|\vec{a}| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ هوَ $120°$، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{a} \bullet \vec{b}$

7) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{a} = \langle 7, 10\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 4, -10\rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

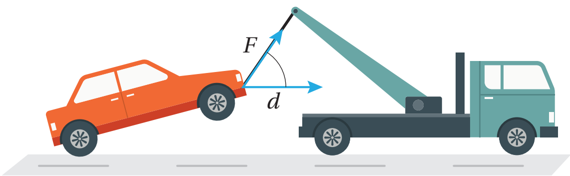
8) $\vec{c} = \langle 2, 4\rangle$, $\vec{d} = \langle -24, 12\rangle$

9) $\vec{a} = \langle 4, 16\rangle$, $\vec{k} = \langle 8, -2\rangle$

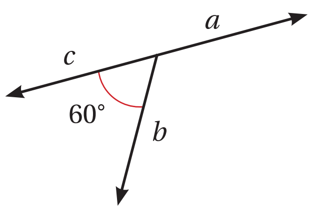
10) أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{e} = \langle 3, 4\rangle$، وَ $\vec{a} = \langle 11, -8\rangle$ متعامديْنِ أمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.

11) إذا كانَ $\vec{r} = \langle 3, -4\rangle$، وَ $\vec{s} = \langle b, b+2\rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ b.

12 **سـيّاراتٌ:** تسحبُ شاحنةٌ سيّارةً كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السحبِ $F = 34\text{N}$، والمسافةُ المقطوعةُ $d = 12$ km، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46$ J، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|\vec{a}| = 2$، وَ $|\vec{b}| = 4$، وَ $|\vec{c}| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:



15 $\vec{a} \bullet \vec{c}$ **14** $\vec{b} \bullet \vec{c}$ **13** $\vec{a} \bullet \vec{b}$

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

برهانٌ: إذا كانَتْ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهاتٍ، وكانَ $\vec{0}$ المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

19 $\vec{0} \bullet \vec{a} = 0$ **18** $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ **17** $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** إذا كانَ $\vec{p} \bullet \vec{q} = 30$، وَ $\vec{q} = \langle 6, 2\rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتمَلةً للمتجهِ $\vec{p}$.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $\vec{a} = \langle -8, -2\rangle$

22 **تبريرٌ:** أُبيِّنُ باستعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(-4, -2)$, $(1, 5)$, $(6, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **تبريرٌ:** إذا كانَ المتجهانِ $\vec{a} = \langle -1, r\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 2, -3\rangle$ متوازييْنِ، فما قيمةُ r؟

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإنَّ $|\vec{\mathbf{v}}|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانَتْ $A(0, 2)$, $B(3, y)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ y تساوي:

a) 5 b) -1

c) $5, -1$ d) $7, -3$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, 5 \rangle$ ، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 5, 6, 7:

5 $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ تساوي:

a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}}$، فإنَّ $|\vec{\mathbf{p}}|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوسُ المتجهِ $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ هوَ:

a) $\langle -2,4 \rangle$ b) $\langle 2,-4 \rangle$

c) $\langle 4,6 \rangle$ d) $\langle -4,-6 \rangle$

8 إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 2,-3 \rangle$, $\vec{\mathbf{b}} = \langle 3,4 \rangle$، فإنَّ $\vec{\mathbf{a}} \cdot 2\vec{\mathbf{b}}$ تساوي:

a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانَتِ النقاطُ A, B, C, D نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$, $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ C إذا كانَ:

9 $\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AB}$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DB}$

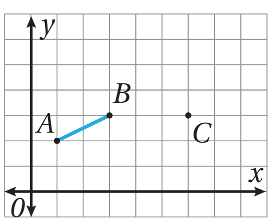
أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها:

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: $\vec{\mathbf{v}}$ وَ $\vec{\mathbf{u}}$ ، فإنَّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$

أنسخُ الرسمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ:



14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ E على المستوى الإحداثيِّ.

15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$، فأُحدِّدُ النقطةَ D على المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ M على المستوى الإحداثيِّ.

17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ k.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, 5 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1 \rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4, -2 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

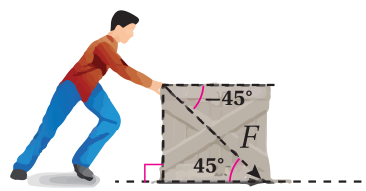
18 $-3\,(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}})$

19 $\vec{\mathbf{v}} \cdot 2\vec{\mathbf{u}}$

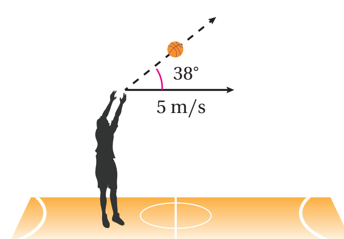
20 $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}})$

21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{v}}$ وَ $\vec{\mathbf{w}}$.

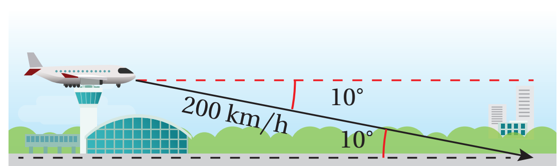
22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m



23 ركضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةِ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s ، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s ، وبزاويةٍ قياسُها 38° معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ.



24 هبطَتْ طائرةٌ بسرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُها 10°. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

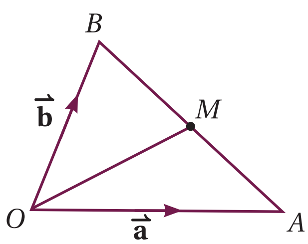


25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8 \rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, -3 \rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الثانيةِ. هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 أَجِدُ الزاويةَ θ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{p}}$ وَ $\vec{\mathbf{q}}$ إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \langle 5, -1 \rangle, \vec{\mathbf{q}} = \langle -2, 3 \rangle$

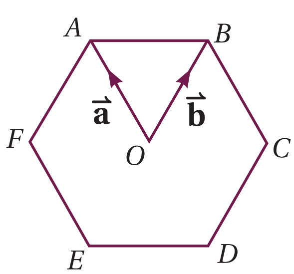
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسوميْنِ في الوضعِ القياسي، حيثُ O نقطةُ الأصلِ، وَ M نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:



27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ O، وفيهِ: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$



29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ K بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

الوحدةُ

8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ

Statistics and Probabilities

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يســاعدُنا علمُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ علــى تفســيرِ الظواهرِ، وتحليــلِ البياناتِ الكثيرةِ في حياتِنا اليوميــةِ. فمثلًا، إذا أردْتُ اســتنتاجَ العلاقةِ بينَ زمنِ الاستيقاظِ صباحًا وتحصيــلِ الطلبةِ الدراســيِّ، فإنَّني أحتاجُ إلى أداةٍ إحصائيةٍ تُسمّى شكلَ الانتشارِ، ومفهــومَ الارتبــاطِ، وهــوَ ممّا سأتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيــةِ للبياناتِ (مفرداتٌ، جداولُ تكراريةٌ)، وتحديدَ أثــرِ إجراءِ تحويلٍ خطِّيٍّ للقيمِ في مقاييسِ نزعتِها المركزيةِ.
- ✓ إيجادَ مقاييسِ التشــتُّتِ للبياناتِ المفردةِ أوِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ.
- ✓ حسابَ الاحتمالِ لحوادثَ بسيطةٍ ومركبةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ وصفَ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ باســتعمالِ شــكلِ الانتشارِ، والمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.
- ◄ إيجــادَ قيــمِ الربيعيــاتِ والمئيناتِ باســتعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.
- ◄ إيجادَ مقاييسِ التشــتُّتِ للبيانــاتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ◄ حســابَ احتمالِ حــوادثَ مُركَّبــةٍ، والاحتمالِ المشروطِ.

مشروعُ الوحدةِ

مستوى الأقاربِ التعليميُّ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنْ مستوى الأقاربِ التعليميِّ، وتنظيمُها، وتحليلُها، وكتابةُ استنتاجاتٍ عنْها.

الموادُّ والأدواتُ برمجيةُ جيوجبرا، برمجيةُ العرضِ التقديميِّ (بوربوينت).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أجمعُ بياناتٍ منْ 12 عائلةً منْ أقاربي أوْ جيراني عنِ المستوى التعليميِّ للزوجِ والزوجةِ.

2 أُنظِّمُ في الجدولِ المجاورِ البياناتِ التي جمعْتُها على النحوِ الآتي:

- أُدوِّنُ في عمودَيِ الزوجِ والزوجةِ قيمًا عدديةً وَفقَ التصنيفِ الآتي: منْ دونِ تعليمٍ (1)، الأساسيُّ (2)، الثانويُّ (3)، الدبلومُ (4)، البكالوريوسُ (5)، الماجستيرُ (6)، الدكتوراه (7).

رقمُ العائلةِ	المستوى التعليميُّ	
	الزوجةُ	الزوجُ
1		
2		
3		

3 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لتمثيلِ القيمِ العدديةِ لمستوى تعليمِ الزوجِ والزوجةِ في صورةِ أزواجٍ مُرتَّبةٍ على هيئةِ شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً للنقاطِ الاثنتي عشرةَ.

4 أُنظِّمُ البياناتِ التي جمعْتُها في الجدولِ السابقِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ كما في الجدولِ المجاورِ.

فئاتُ المستوى التعليميِّ	عددُ الزوجاتِ	عددُ الأزواجِ
1−3		
4−6		
7−9		

5 أحسبُ الانحرافَ المعياريَّ للمستوى التعليميِّ لكلٍّ منَ الأزواجِ والزوجاتِ، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما، وأُفسِّرُهُما.

6 أكتبُ حادثيْنِ متنافييْنِ، وآخريْنِ غيرَ متنافييْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهما معًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ.

7 أكتبُ حادثيْنِ مستقليْنِ، وآخريْنِ مشروطيْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهما معًا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) يُلخِّصُ العملَ، وما توصَّلَ إليْهِ كلُّ فردٍ في المجموعةِ، وما تعلَّمْتُهُ منْ هذا المشروعِ؛ على أنْ يتضمَّنَ العرضُ التقديميُّ صورًا للجداولِ، وشكلَ الانتشارِ، وجميعَ الاستنتاجاتِ التي تُوصِّلَ إليْها في أثناءِ تنفيذِ المشروعِ.

الدرسُ 1

أشكالُ الانتشارِ
Scatter Graphs

فكرةُ الدرسِ فهمُ أشكالِ الانتشارِ، ووصفُها، واستعمالُ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ مُتغيِّريْنِ بمعرفةِ قيمةِ الآخرِ.

المصطلحاتُ شكلُ الانتشارِ، الارتباطُ الموجبُ، الارتباطُ السالبُ، المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً.

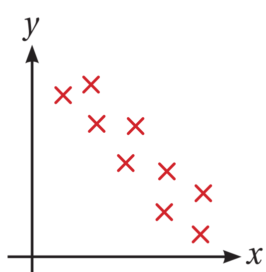
مسألةُ اليومِ ادَّعى راكانُ أنَّهُ كلَّما زادَ طولُ الشخصِ زادَتِ المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ عندَ مدِّهِما على استقامةٍ. كيفَ أتحقَّقُ مِنْ صحَّةِ ادِّعائِهِ؟

يتعيَّنُ علينا في كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ استكشافُ العلاقةِ بينَ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ، ووصفُ هذهِ العلاقةِ. ومنَ الأمثلةِ على ذلكَ:

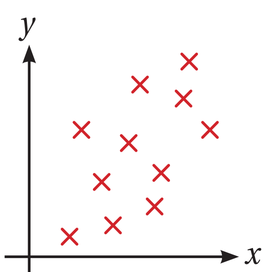
- طولُ الإنسانِ ومُعدَّلُ نبضاتِ قلبِهِ.
- تحصيلُ الطلبةِ في الرياضياتِ وتحصيلُهُمْ في العلومِ.

شكلُ الانتشارِ (scatter graph) هوَ تمثيلٌ بيانيٌّ يُوضِّحُ العلاقةَ (إنْ وُجِدَتْ) بينَ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ، وتَظهرُ فيهِ نقاطٌ تُمثِّلُ بياناتِ المجموعتيْنِ بوصفِها أزواجًا مُرتَّبةً (x, y) في المستوى الإحداثيِّ؛ إذْ تُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ x على المحورِ الأفقيِّ الموجبِ، وتُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ y على المحورِ الرأسيِّ الموجبِ.

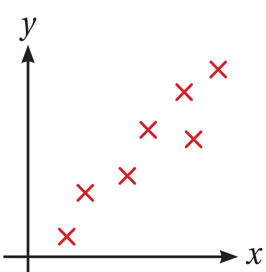
الارتباطُ (correlation) هوَ وصفُ العلاقةِ بينَ مجموعتَيِ البياناتِ. وقدْ يكونُ **الارتباطُ موجبًا** (positive correlation)، أوْ **سالبًا** (negative)، أوْ قويًّا، أو ضعيفًا، كما في أشكالِ الانتشارِ الآتيةِ:



ارتباطٌ سالبٌ قويٌّ.



ارتباطٌ موجبٌ ضعيفٌ.

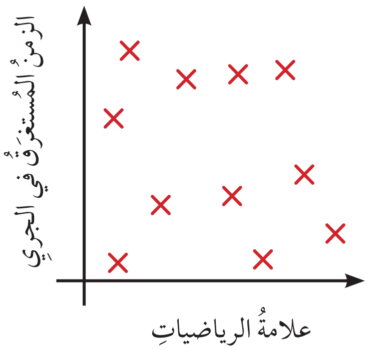


ارتباطٌ موجبٌ قويٌّ.

أتعلَّمُ
ألاحظُ عدمَ وجودِ حاجةٍ إلى الأجزاءِ السالبةِ منَ المحاورِ في المستوى الإحداثيِّ؛ لأنَّ النقاطَ التي تُمثِّلُ شكلَ الانتشارِ موجبةٌ.

منَ المُلاحَظِ أنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ موجبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شكلِ الانتشارِ حولَ مستقيمٍ ميلُهُ موجبٌ، وأنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ سالبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شكلِ الانتشارِ حولَ مستقيمٍ ميلُهُ سالبٌ.

أمّا إذا كانَ الارتباطُ ضعيفًا (أوْ لا يوجدُ ارتباطٌ)، فإنَّ النقاطَ في شكلِ الانتشارِ تكونُ متناثرةً ومتباعدةً كما في شكلِ الانتشارِ المجاورِ، الذي يُظهِرُ العلاقةَ بينَ تحصيلِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في مادَّةِ الرياضياتِ والزمنِ الذي استغرقَهُ كلٌّ منْهُمْ في الجريِ مسافةَ 800 m



مثال 1

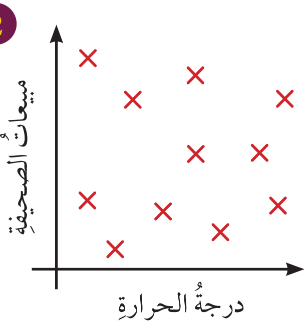
هلْ يوجدُ ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيِّرَيْنِ المُمثَّلَيْنِ في كلٍّ منْ شكلَيِ الانتشارِ الآتيَيْنِ؟ في حالةِ وجودِ ارتباطٍ بينَهما، هلْ هوَ موجبٌ أمْ سالبٌ؟ هلْ هوَ قويٌّ أمْ ضعيفٌ؟

1

يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ سعرِ الإجّاصِ وكميتِهِ المبيعةِ. وبناءً على توزيعِ النقاطِ في هذا الشكلِ، فإنَّ كميةَ الإجّاصِ المبيعةَ كانَتْ قليلةً عندما كانَ سعرُهُ مرتفعًا، والعكسُ صحيحٌ. وهذا يشيرُ إلى وجودِ ارتباطٍ سالبٍ؛ ولأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متقاربةٌ، فهوَ قويٌّ.

يُزرَعُ في دولِ العالَمِ المختلفةِ نحوَ 300 نوعٍ منَ الإجّاصِ.

2

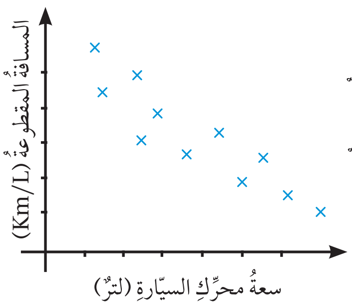


يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ درجةِ الحرارةِ ومبيعاتِ إحدى الصحفِ. ومنَ المُلاحَظِ أنَّهُ لا يوجدُ ارتباطٌ أوْ علاقةٌ واضحةٌ بينَ درجاتِ الحرارةِ ومبيعاتِ الصحيفةِ؛ لأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متباعدةٌ.

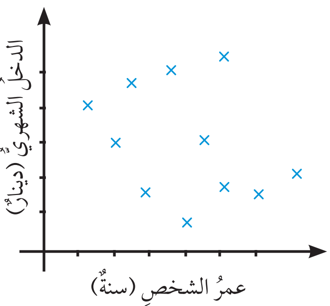
أتحقق من فهمي

هلْ يوجدُ ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيِّرَيْنِ المُمثَّليْنِ في كلِّ شكلٍ منْ أشكالِ الانتشارِ الآتيةِ؟ في حالةِ وجودِ ارتباطٍ بينَها، هلْ هوَ موجبٌ أمْ سالبٌ؟ هلْ هوَ قويٌّ أمْ ضعيفٌ؟

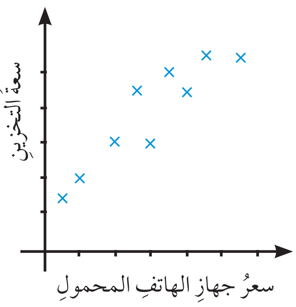
a)



b)



c)



يُعَدُّ مُعدَّلُ استهلاكِ السيّارةِ للوقودِ أحدَ أهمِّ العواملِ المُحفِّزةِ لشرائِها؛ لذا تحرصُ مصانعُ السيّاراتِ دائمًا على ابتكارِ أساليبَ تكنولوجيةٍ للحدِّ منَ استهلاكِ الوقودِ.

عندَ تمثيلِ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ بمُتغيِّرَيْنِ مثلِ (x) وَ(y)، يمكنُ تمثيلُ شكلِ الانتشارِ يدويًّا، أوْ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بتعيينِ نقاطِ شكلِ الانتشارِ بوصفِها أزواجًا مُرتَّبةً (x , y)؛ لأتمكَّنَ منْ وصفِ الارتباطِ (إنْ وُجِدَ).

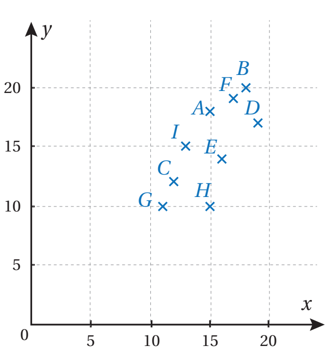
مثال 2

أُمثِّلُ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ (x) وَ (y):

مدَّةُ الاستحمامِ (x) بالدقائقِ للشخصِ، وكميةُ المياهِ المُستهلَكةِ (y) باللترِ.									
الشخصُ	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15

يعاني الأردنُّ شُحًّا في المواردِ المائيةِ؛ ولهذا، فإنَّ عدمَ الإسرافِ في استهلاكِ المياهِ هوَ واجبٌ دينيٌّ ووطنيٌّ.

أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ في المستوى الإحداثيِّ كما في الشكلِ المجاورِ.



بالنظرِ إلى شكلِ الانتشارِ، يُلاحَظُ وجودُ ارتباطٍ موجبٍ قويٍّ بينَ المُتغيِّرَيْنِ (x) وَ(y)؛ لأنَّهُ كلَّما زادَتْ قيمةُ (x) في أغلبِ الحالاتِ زادَتْ قيمةُ (y)؛ أيْ كلَّما زادَتْ مدَّةُ الاستحمامِ لشخصٍ ما زادَتْ كميةُ المياهِ التي يستهلكُها.

أتحقق من فهمي

أُمثِّلُ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ (x) وَ (y):

سعرُ السيّارةِ (x) بألوفِ الدنانيرِ، وعمرُ السيّارةِ (y) بالسنواتِ.										
السيّارةُ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً (line of best fit) هوَ مستقيمٌ يمرُّ بأكبرِ عددٍ منْ نقاطِ شكلِ الانتشارِ، بحيثُ يكونُ عددُ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويًا (تقريبًا) على جهتيْهِ، وتكونُ أقصرُ المسافاتِ بينَهُ وبينَ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويةً (تقريبًا).

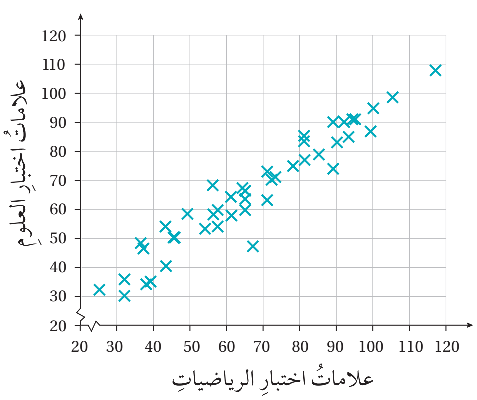
يُستعمَلُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في شكلِ الانتشارِ ذي الارتباطِ القويِّ بمعلوميةِ قيمةِ المُتغيِّرِ الآخرِ.

إرشادٌ

يُرسَمُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً بالنظرِ عامةً. ولرسمِهِ، يُفضَّلُ استعمالُ مسطرةٍ شفّافةٍ.

مثال 3

اعتمادًا على شكلِ الانتشارِ المجاورِ الذي يُمثِّلُ علاماتِ اختبارِ الرياضياتِ وعلاماتِ اختبارِ العلومِ لمجموعةٍ منَ الطلبةِ، أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

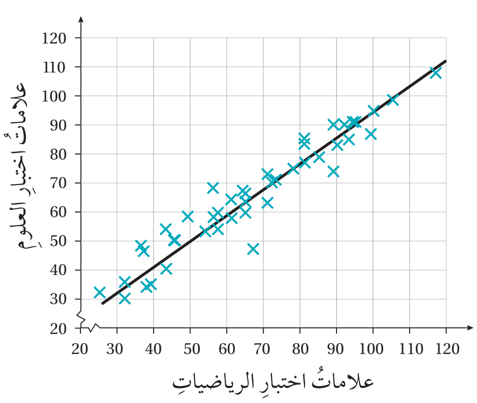


أتعلّمُ

عندَ عدمِ الحاجةِ إلى بدءِ المحاورِ في التمثيلِ البيانيِّ منْ نقطةِ الأصلِ، توضعُ قبلَ قيمِ البدءِ للمحورينِ خطوطٌ متعرّجةٌ تدلُّ على إهمالِ جزءٍ منَ المحورينِ الإحداثيين.

1 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.

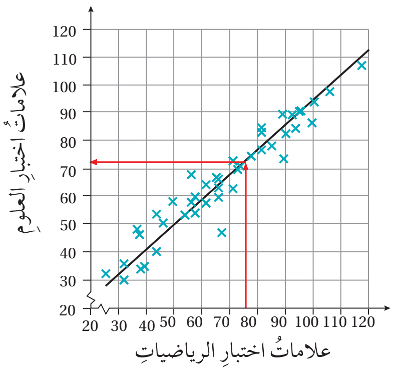
أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمالِ المسطرةِ كما في الشكلِ المجاورِ.



أُلاحِظُ أنَّ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ موجبٌ وقويٌّ.

2 علامـةُ طالبٍ في اختبارِ الرياضيـاتِ 75، لكنَّهُ غابَ عنِ اختبارِ العلومِ بسـببِ مرضِهِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً الذي رسمْتُهُ لتقديرِ علامتِهِ المحتملةِ في مادَّةِ العلومِ.

أُقدِّرُ علامةَ هذا الطالبِ في مادَّةِ العلومِ برسمِ مستقيمٍ رأسيٍّ، بدءًا بالعلامةِ 75 على المحورِ الأفقيِّ حتى يلتقيَ بالمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا أفقيًّا، وصولًا إلى المحورِ الرأسـيِّ، فأُقدِّرُ علامتَهُ بنحوِ 72 كما في الشكلِ المجاورِ.



3 أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.

يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المستقيمِ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ أيِّ نقطتيْنِ يمرُّ بهما، ولتكنْ (53, 53) وَ (95, 90):

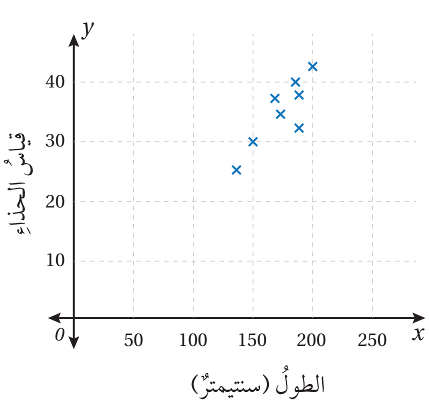
معادلةُ مستقيمٍ يمرُّ بنقطتيْنِ معلومتيْنِ
$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ
$$y-53 = \frac{90-53}{95-53}(x-53)$$

بالتبسيطِ
$$y = 0.88x + 6.36$$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على شكلِ الانتشارِ المجاورِ الذي يُمثِّلُ الطـولَ (x) بالسـنتيمترِ، وقياسَ الحـذاءِ (y) لمجموعةٍ منَ الأشخاصِ، أُجيبُ عمّا يأتي:



a) أرسـمُ المسـتقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

b) أُقدِّرُ قياسَ الحذاءِ لشخصٍ طولُهُ 190 cm

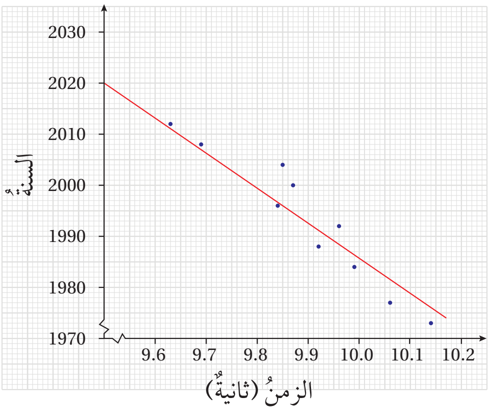
إرشادٌ

بما أنَّهُ يُمكِنُ رسمُ أكثرَ مـنْ مسـتقيمٍ، واختيارُ أيِّ نقطتيْـنِ يمـرُّ بهما المستقيمُ (يختلفُ هذا الاختيـارُ منْ شـخصٍ إلى آخرَ)، فـإنَّ معادلةَ المستقيمِ قدْ تختلفُ تبعًا للنقطتيْنِ المختارتيْنِ.

منَ المحاذيرِ التي يجبُ التنبُّهُ لها، استعمالُ شكلِ الانتشارِ لعملِ استنتاجاتٍ؛ فشكلُ الانتشارِ يكــونُ مفيدًا فقطْ ضمنَ مدى القيمِ المعطاةِ. أمّا في حــالِ الخروجِ عنْ هذا المدى فقدْ تكونُ الاستنتاجاتُ مُضلِّلةً، أوْ غيرَ منطقيةٍ.

مثال 4

الألعــابُ الأولمبيــةُ: حــدثٌ رياضــيٌّ دوليٌّ يُنظَّــمُ كلَّ ســنتيْنِ في الســنواتِ الزوجيــةِ، بتناوبِ الألعابِ الصيفيةِ والألعابِ الشتويةِ.

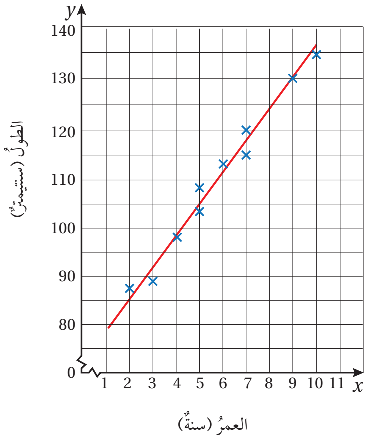


يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ الأزمنةَ المُدوَّنةَ لصاحبِ المركزِ الأولِ في سباقِ 100 m للرجالِ في عددٍ منْ دوراتِ الألعابِ الأولمبيةِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً المُعطى في الشكلِ لتقديرِ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2020م.

هلْ يُمكِنُ تقديرُ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2038م؟

إذا استعملْتُ المســتقيمَ الأفضلَ مطابقةً، فأُقدِّرُ الزمنَ المُســتغرَقَ لقطعِ مسافةِ السباقِ بنحوِ 9.5 ثوانٍ فــي دورةِ عامِ 2020م، ولكنَّ هذا التقديرَ لا ينطبقُ علــى الدوراتِ الأولمبيةِ التاليةِ الخارجــةِ عنْ مدى القيــمِ المعطاةِ؛ فوَفقًــا لهذا التقديــرِ، يُتوقَّعُ اســتمرارُ انخفاضِ الزمنِ المُستغرَقِ لقطعِ مسافةِ الســباقِ إلى 9 ثوانٍ، وَ8.5 ثوانٍ، وَ8 ثوانٍ، ...، وهكذا حتى الوصولِ إلى دورةٍ لنْ يحتاجَ فيها المتســابقونَ إلى أيِّ زمنٍ لقطعِ مســافةِ السباقِ التي طولُها 100 m، وهذا غيرُ منطقيٍّ.

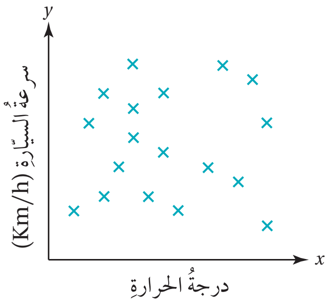
أتحقق من فهمي

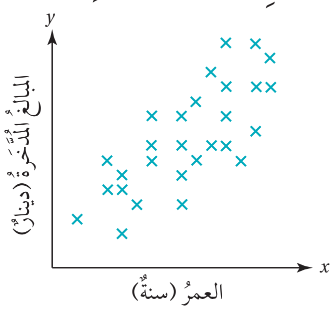


أستعملُ المســتقيمَ الأفضلَ مطابقةً في الشكلِ المجاورِ لتقديرِ طولِ طفلٍ عمرُهُ 8 ســنواتٍ. هلْ يُمكِنُ استعمالُ هذا الشــكلِ لتقديرِ طولِ شــخصٍ عمرُهُ 30 سنةً؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتدرب وأحل المسائل

أَصِفُ الارتباطَ في شكلَيِ الانتشارِ الآتييْنِ:

1


2


3 ماذا أستنتجُ منْ شكلَيِ الانتشارِ السابقيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

يُمثِّلُ الجدولُ الآتي العمرَ والطولَ والكتلةَ لسبعِ لاعباتٍ منْ فريقِ كرةِ الطائرةِ في إحدى المدارسِ:

سميرةُ	ابتسامُ	تغريدُ	هدى	عائشةُ	هندُ	وفاءُ	اسمُ اللاعبةِ
13	15	12	11	11	15	14	العمرُ (سنةٌ)
161	165	162	158	154	168	169	الطولُ (سنتيمترٌ)
41	42	37	32	35	42	40	الكتلةُ (كيلوغرامٌ)

أرسمُ أشكالَ الانتشارِ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ لكلٍّ منْها:

4 العمرُ مقابلَ الطولِ.

5 الطولُ مقابلَ الكتلةِ.

6 العمرُ مقابلَ الكتلةِ.

تجربةٌ علميةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافةَ بالسنتيمترِ، والسرعةَ بالسنتيمترِ لكلِّ ثانيةٍ، عندَ دحرجةِ كرةٍ على سطحِ طاولةٍ، بدءًا بنقطةٍ مُحدَّدةٍ:

80	70	60	50	40	30	20	10	المسافةُ (cm)
0	3	5	7	10	13	16	18	السرعةُ (cm/s)

7 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

8 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ.

9 أُقدِّرُ سرعةَ الكرةِ لحظةَ قطعِها مسافةَ 5 cm منْ نقطةِ انطلاقِها.

10 أُقدِّرُ المسافةَ التي قطعَتْها الكرةُ منْ نقطةِ انطلاقِها عندما كانَتْ سرعتُها 12 cm/s

لحلِّ المسألةِ الواردةِ في بدايةِ الدرسِ، أجمعُ بياناتٍ منْ 10 طلبةٍ عشوائيًّا، ثمَّ أُدوِّنُها في الجدولِ الآتي، ثُمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ التي تلي:

رقمُ الطالبِ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طولُ الطالبِ										
المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ (cm)										

11 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

12 أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّريْنِ.

13 هلِ ادِّعاءُ راكانٍ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أطوالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي أطوالَ 20 أبًا وأبنائِهِمُ الذينَ تبلغُ أعمارُهُمْ 20 سنةً بالسنتيمترِ:

طولُ الأبِ	178	186	164	152	169	174	183	147	162	153
طولُ الابنِ	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
طولُ الأبِ	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175
طولُ الابنِ	152	160	150	156	164	170	154	160	167	172

إرشادٌ

يُمكِنُ تمثيلُ طولِ الأبِ على المحورِ الأفقيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm، وتمثيلُ طولِ الابنِ على المحورِ الرأسيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm أيضًا.

14 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

15 هلْ صحيحٌ أنَّ الأبَ الطويلَ ابنُهُ طويلٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

في دراسةٍ مسحيةٍ لمُعلِّمٍ عنْ عددِ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ ومشاهدةِ التلفازِ أسبوعيًّا شملَتْ 20 طالبًا في أحدِ الصفوفِ التي يُدرِّسُها، كانَتْ نتيجةُ المسحِ كما في الجدولِ الآتي:

عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ	12	3	5	15	11	0	9	7	6	12
عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ	18	26	24	16	19	27	12	13	17	14
عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ	12	10	7	6	7	3	1	2	0	12
عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ	22	16	18	22	12	28	18	20	25	13

17 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

18 إذا كانَ أحدُ الطلبةِ منَ الصفِّ نفسِهِ يُشاهِدُ التلفازَ مدَّةَ 8 ساعاتٍ أسبوعيًّا، فهلْ يُمكِنُ تقديرُ عددِ الساعاتِ التي يمارسُ فيها الرياضةَ أسبوعيًّا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

سيارةُ أجرةٍ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافاتِ المقطوعةَ بالكيلومترِ والمُدَدَ الزمنيةَ المُستغرَقَةَ بالدقائقِ لـِ 10 رحلاتٍ قامَ بها سائقُ سيارةِ أجرةٍ في أحدِ الأيامِ:

المسافةُ (km)	1.6	3.8	5.2	6.6	4.8	2.9	3.9	5.8	8.8	5.4
الزمنُ (min)	3	17	11	13	9	15	8	11	16	10

19 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، بوضعِ الزمنِ على المحورِ الأفقيِّ.

20 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

21 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ 5 دقائقَ، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟

22 ما الزمنُ الذي يُمكِنُ تقديرُهُ لرحلةٍ قطعَ فيها السائقُ مسافةَ 4 km؟

23 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ ساعةً كاملةً، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

مهارات التفكير العليا

24 **تبريرٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي علاماتِ 10 طالباتٍ في اختبارَيِ الرياضياتِ والجغرافيا. إذا كانَتْ إحدى الطالباتِ مريضةً عندَ تقديمِها اختبارَ الجغرافيا، فمَنْ هيَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الاسمُ	إيمانُ	باسمةُ	تهاني	دعاءُ	رقيةُ	سارةُ	سعادُ	علياءُ	فداءُ	منى
علاماتُ اختبارِ الرياضياتِ	145	155	142	167	167	151	145	152	163	168
علاماتُ اختبارِ الجغرافيا	175	173	158	168	181	173	166	162	180	156

25 **أكتشفُ الخطأَ:** بالعودةِ إلى الجدولِ في السؤالِ السابقِ، لمْ تتقدَّمْ سميرةُ لاختبارِ الجغرافيا، وقدْ أحرزَتْ علامةَ 75 في اختبارِ الرياضياتِ. قدَّرَتْ سميرةُ أنَّها ستحصلُ على علامةِ 80 في اختبارِ الجغرافيا لوْ أنَّها قدَّمَتْهُ. هلْ تقديرُ سميرة منطقيٌّ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أختارُ مُتغيِّرَيْنِ، ثمَّ أُنشِئُ جدولًا أُنظِّمُ فيهِ بعضَ قيمِهما، ثمَّ أستعملُهُ للتنبُّؤِ بالقيمةِ الحقيقيةِ لأحدِ المُتغيِّرَيْنِ باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً إذا عُلِمَتْ قيمةُ المُتغيِّرِ الآخرِ.

27 **أكتبُ:** لماذا يوصفُ الارتباطُ بأنَّهُ موجبٌ في شكلِ الانتشارِ الذي يُمثِّلُ مبيعاتِ أحدِ المحالِّ منَ المثلجاتِ على مدارِ أشهرِ السنةِ؟ هلْ يعني ذلكَ أنَّ أحدَ المُتغيِّرَيْنِ (مبيعاتُ المثلجاتِ، أوْ أشهرُ السنةِ) سببٌ للآخرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

رسمُ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً

Graphing the Line of Best Fit

يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً لنقاطِ شكلِ الانتشارِ.

نشاط

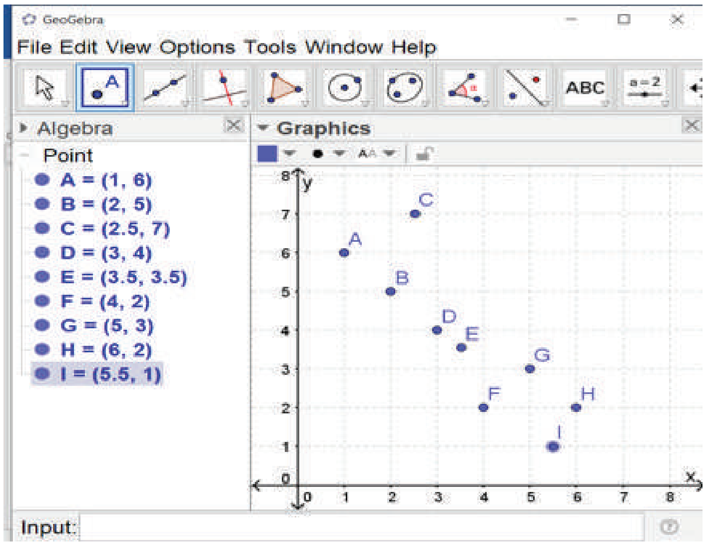
أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ الواردةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

x	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6	5.5
y	6	5	7	4	3.5	2	3	2	1

لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً، أتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ.

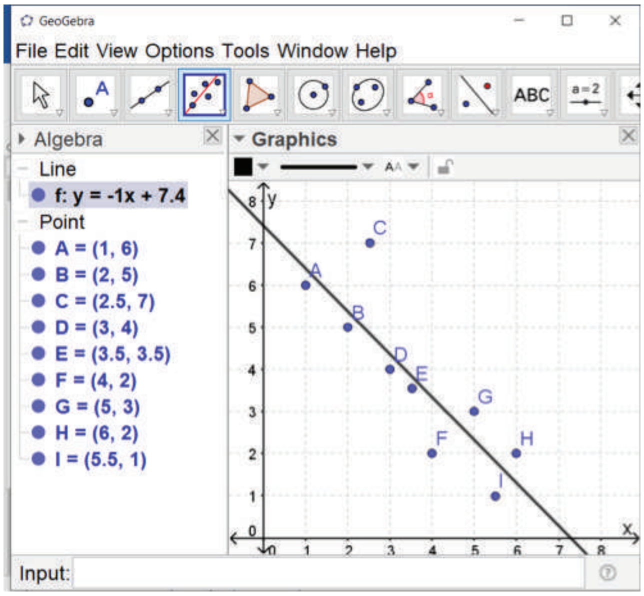
أختارُ أيقونةَ من شــريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ عندَ موقعِ كلِّ زوجٍ مُرتَّبٍ في المستوى البيانيِّ، لتظهرَ النقاطُ كما في الشكلِ الآتي:



يُمكِنُ أيضًا تعيينُ النقاطِ بإدخالِ كلٍّ منها في شريطِ الإدخالِ باستعمالِ لوحةِ المفاتيحِ في صورةِ: $A = (x, y)$.

الخطوةُ 2: أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً.

أختارُ أيقونةَ Best Fit Line منْ شـــريطِ الأدواتِ، ثمَّ أُحدِّدُ جميعَ النقاطِ التي عيَّنْتُها في المستوى الإحداثيِّ، بوضعِ المُؤشِّرِ في أيِّ مكانٍ بعيدًا عنِ النقاطِ، ثمَّ الضغطِ باستمرارٍ على الزرِّ الأيسرِ لفأرةِ الحاسوبِ، معَ السحبِ لشمولِ جميعِ النقاطِ، عندئذٍ سيظهرُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً، وتظهرُ معادلتُهُ إلى يسارِ الشاشةِ كما في الشكلِ الآتي:



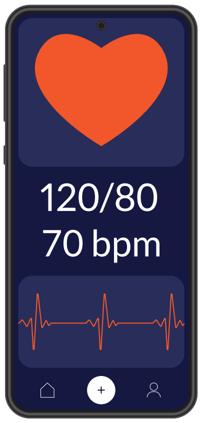
إرشادٌ

لإظهارِ هامــشِ (Algebra)، أختارُ (Algebra) مــنْ قائمــةِ العــرضِ (View).

أتدرب

1 أحُلُّ الأسئلةَ (16 ,10 ,9 ,8) في الدرسِ السابقِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أُقارِنُ الحلَّ بحلّي اليدويِّ.

2 تحوي الهواتفُ المحمولةُ تطبيقًا يُستعمَلُ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ. أستعملُ هذا التطبيقَ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ لـ 10 أشـــخاصٍ على الأقلِّ، ثمَّ أقيسُ طولَ كلٍّ منْهُمْ، ثمَّ أرسمُ شـــكلَ الانتشارِ والمستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.



الدرسُ 2

المنحنى التكراريُّ التراكميُّ

Cumulative Frequency Graph

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الربيعياتِ والمئيناتِ، وإيجادُها للبياناتِ المُبوَّبةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

المصطلحاتُ المنحنى التراكميُّ، المئيناتُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ رواتبَ الموظفينَ في إحدى الشركاتِ. ما عددُ الموظفينَ الذينَ تزيدُ رواتبُهُمْ على 520 دينارًا؟

عددُ الموظفينَ	فئاتُ الرواتبِ
8	$349 \le x < 399$
12	$399 \le x < 449$
15	$449 \le x < 499$
9	$499 \le x < 549$
6	$549 \le x < 599$

يُمثِّلُ **المنحنى التكراريُّ التراكميُّ** (cumulative frequency graph) للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ العلاقةَ بينَ التكرارِ التراكميِّ للفئاتِ في التوزيعِ التكراريِّ والحدودِ الفعليةِ العليا للفئاتِ.

مثال 1

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ الذي يستغرقُهُ طلبةُ الصفِّ العاشرِ في الوصولِ إلى المدرسةِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.

التكرارُ (عددُ الطلبةِ)	الزمنُ (دقيقةٌ)
2	$0 \le x < 5$
9	$5 \le x < 10$
9	$10 \le x < 15$
8	$15 \le x < 20$
3	$20 \le x < 25$
1	$25 \le x < 30$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ الآتي. أضيفُ الحدَّ الأعلى للفئةِ التي تسبقُ الفئةَ الأولى التي يساوي تكرارُها صفرًا.

التكرارُ التراكميُّ	الحدودُ العليا للفئاتِ
0	0
$0 + 2 = 2$	5
$2 + 9 = 11$	10
$2 + 9 + 9 = 20$	15
$2 + 9 + 9 + 8 = 28$	20
$2 + 9 + 9 + 8 + 3 = 31$	25
$2 + 9 + 9 + 8 + 3 + 1 = 32$	30

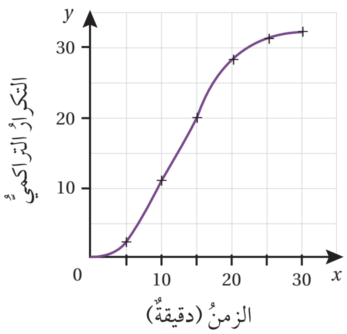
أضيفُ فئةً جديدةً إلى الجدولِ تكرارُها يساوي صفرًا.

الخطوةُ 2: أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.

أرســمُ منحنًى يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ الحدودِ العليا لفئــاتِ الزمنِ بالدقائقِ (المُتغيِّــرُ x) والتكرارِ التراكمــيِّ (المُتغيِّرُ y)، التــي تُمثِّلُها الأزواجُ المُرتَّبةُ الآتيةُ:

$(0, 0), (5, 2), (10, 11), (15, 20),$

$(20, 28), (25, 31), (30, 32)$



معلومةٌ

محافظةُ المفرقِ هيَ ثاني أكبرِ محافظاتِ المملكةِ الأردنيةِ الهاشــميةِ منْ حيثُ المِســاحةُ، وتقعُ في الشــمالِ الشــرقيِّ للمملكةِ.

أتحقق من فهمي

طقسٌ: يُبيِّــنُ الجدولُ التكــراريُّ المجاورُ درجاتِ الحرارةِ فــي محافظةِ المفرقِ في أحدِ أشــهرِ فصلِ الربيعِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.

التكرارُ (عددُ الأيامِ)	الفئاتُ (درجةُ الحرارةِ)
1	$5 \leq x < 8$
7	$8 \leq x < 11$
9	$11 \leq x < 14$
6	$14 \leq x < 17$
5	$17 \leq x < 20$
1	$20 \leq x < 23$
1	$23 \leq x < 26$

تعرَّفْتُ ســابقًا الربيعياتِ؛ وهيَ ثلاثُ قيمٍ تُقسِّمُ البياناتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ متساويةٍ. وهذهِ القيمُ هيَ: الربيعُ الأدنى (Q_1)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأدنى منَ البياناتِ، والربيعُ الأوسطُ (Q_2)؛ وهوَ وسيطُ البياناتِ كلِّها، والربيعُ الأعلى (Q_3)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأعلى منَ البياناتِ. تعرَّفْتُ أيضًا المدى الربيعيَّ؛ وهوَ مدى البياناتِ التي تقعُ بينَ الربيعِ الأدنى والربيعِ الأعلى.

1 1 3 3 3 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9

الربيعُ الأدنى Q_1 الوسيطُ Q_2 الربيعُ الأعلى Q_3

المدى الربيعيُّ

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1$$
$$= 8 - 3 = 5$$

المئينُ (percentile): هوَ قيمةٌ أكبرُ منْ نسبةٍ مئويّةٍ مُحدّدةٍ منَ البياناتِ، فمثلاً؛ إذا حصلت في اختبارِ الحاسوبِ على درجةٍ تساوي «المئينَ الأربعينَ»، فإنَّ ذلكَ يعنِي أنَّ درجتكَ أعلَى منْ درجاتِ 40% منَ الطلبةِ الذين تقدّمُوا للاختبارِ، و يُرمزُ للمئينِ الأربعينَ بالرّمزِ P_{40}.

يُمكِنُ تقديرُ قيمِ الربيعيّاتِ والمئيناتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ باستعمالِ المُنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

أتعلّمُ

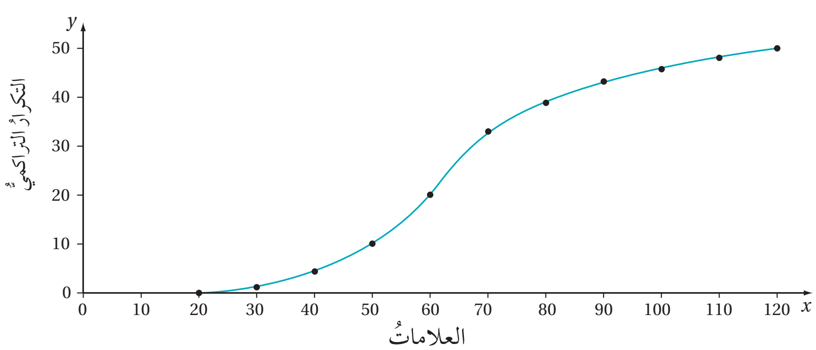
بما أنَّ الربيعَ الأدنى (Q_1) أكبرُ منْ ربعِ البياناتِ فإنّهُ يساوِي المئينَ الخامسَ والعشرينَ (P_{25}).

وهكذا فإنَّ:

$Q_1=P_{25},\ Q_2=P_{50},\ Q_3=P_{75}$

مثال 2

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ علاماتِ 50 طالبًا في اختبارِ اللغةِ العربيةِ:

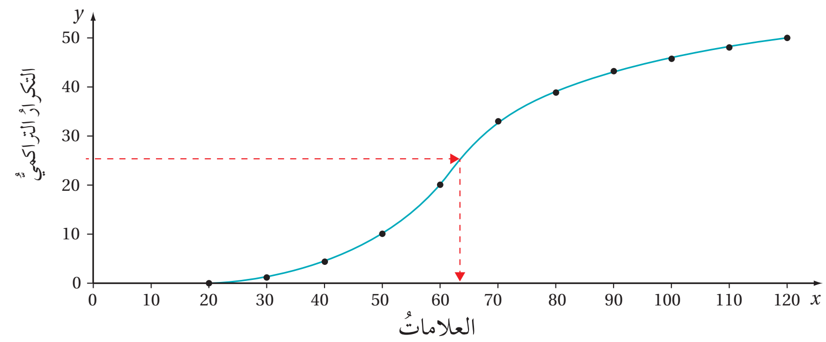


1 **أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ الوسيطِ.

بما أنَّ عددَ الطلبةِ 50 طالبًا، فإنَّ رُتبةَ الوسيطِ هيَ: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

الخطوةُ 2: أرسمُ مستقيمًا أفقيًا بدءًا بالتكرارِ التراكميِّ 25 حتى يتقاطعَ معَ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا رأسيًّا حتى يتقاطعَ معَ المحورِ الأفقيِّ (العلاماتُ) كما في الشكلِ الآتي.



إذنْ، قيمةُ الوسيطِ هيَ العلامةُ 64 تقريبًا.

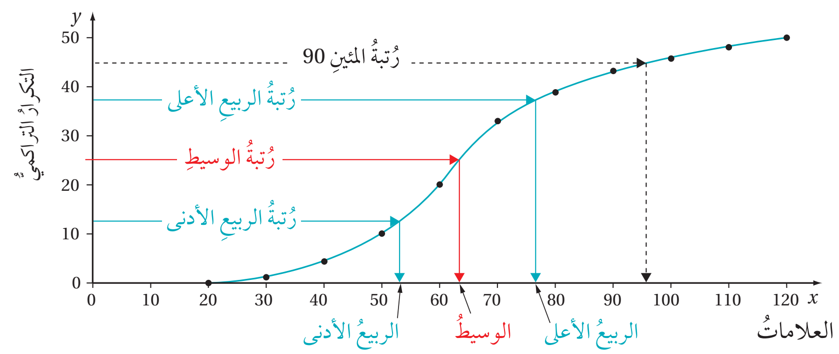
2 **أَجِدُ المدى الربيعيَّ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ الربيعِ الأدنى، ورُتبةَ الربيعِ الأعلى.

رُتبةُ الربيعِ الأدنى: $0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$

رُتبةُ الربيعِ الأعلى: $0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$

الخطوةُ 2: أُقدِّرُ قيمتَي الربيعيْنِ: الأدنى والأعلى، برسمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.



أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ الربيعِ الأدنى هيَ العلامةُ 53 تقريبًا، وأنَّ قيمةَ الربيعِ الأعلى هيَ العلامةُ 77 تقريبًا. وعليْهِ، فإنَّ قيمةَ المدى الربيعيِّ:

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

3 **أَجِدُ المئينَ 90، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ المئينِ 90

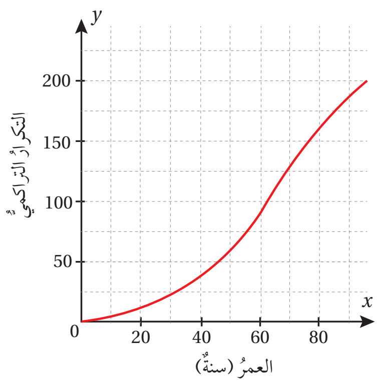
رُتبةُ المئينِ 90: $90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45$

الخطوةُ 2: أُقدِّرُ قيمةَ المئينِ 90 برسمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ المئينِ 90 هيَ العلامةُ 96 تقريبًا، وأنَّ هذهِ القيمةَ تعني أنَّ 90% منَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أقلَّ منَ العلامةِ 96، أوْ أنَّ 10% منَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أكثرَ منَ العلامةِ 96 في هذا الاختبارِ.

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ أعمارَ 200 عضوٍ في جمعيةٍ ثقافيةٍ:



a) أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

b) أَجِدُ المدى الربيعيَّ.

c) أَجِدُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.

أتدرب وأحل المسائل

كرةُ قدمٍ: **يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ عددَ الأهدافِ التي سجَّلَها طلبةُ المرحلةِ الثانويةِ في دوري كرةِ القدمِ المدرسيِّ:**

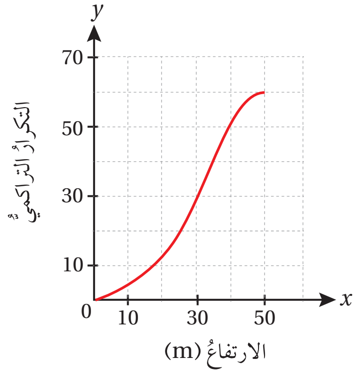
عددُ الأهدافِ	عددُ الطلبةِ
0 – 4	3
5 – 9	17
10 – 14	12
15 – 19	9
20 – 24	5
25 – 29	4

1 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.

2 أُقدِّرُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.

3 أُقدِّرُ عددَ الطلبةِ الذينَ سجَّلوا 18 هدفًا على الأقلِّ.

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ ارتفاعَ عددٍ منَ المباني في مدينةِ عمّانَ:



4 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

5 أَجِدُ المدى الربيعيَّ.

6 أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ الصندوقِ ذي العارضتيْنِ.

7 أَجِدُ المئينَ 80، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.

ألعابٌ: **يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ نتائجَ 80 متسابقًا في لعبةِ رمي السهامِ:**

عددُ المتسابقينَ	مجموعُ النقاطِ (x)
9	$1 - 20$
13	$21 - 40$
23	$41 - 60$
15	$61 - 80$
11	$81 - 100$
7	$101 - 120$
2	$121 - 140$

8 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.

9 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ.

10 إذا حصلَ المتسابقُ الذي مجموعُ نقاطِهِ أكثرُ منْ 90 على جائزةٍ، فما نسبةُ المتسابقينَ الذينَ سيحصلونَ على جائزةٍ؟

طُلِبَ إلى 30 طالبًا، وَ 50 مُعلِّمًا رفعُ أيديهِمْ لحظةَ تقديرِ انقضاءِ دقيقةٍ واحدةٍ بعدَ إعطاءِ إشارةِ البدءِ، وقدْ نُظِّمَتِ النتائجُ في الجدولَيْنِ الآتييْنِ:

عددُ الطلبةِ	فئاتُ الزمنِ (x) ثانيةً
1	$20 \leq x < 30$
3	$30 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
12	$50 \leq x < 60$
3	$60 \leq x < 70$
3	$70 \leq x < 80$
2	$80 \leq x < 90$

عددُ المُعلِّمينَ	فئاتُ الزمنِ (x) ثانيةً
1	$10 \leq x < 20$
2	$20 \leq x < 30$
2	$30 \leq x < 40$
9	$40 \leq x < 50$
17	$50 \leq x < 60$
13	$60 \leq x < 70$
3	$70 \leq x < 80$
2	$80 \leq x < 90$
1	$90 \leq x < 100$

11 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلِّ جدولٍ.

12 أَجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ لكلِّ جدولٍ.

13 أيُّ الفريقيْنِ كانَ أفضلَ في تقديرِ مدَّةِ الدقيقةِ: الطلبةُ أَمِ المُعلِّمونَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

جامعاتٌ: **يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ مُعدَّلاتِ عيِّنةٍ منْ طلبةِ كليةِ الهندسةِ في الجامعةِ الأردنيةِ:**

عددُ الطلبةِ	المُعدَّلُ التراكميُّ (x)
3	$1 \leq x < 1.5$
7	$1.5 \leq x < 2$
25	$2 \leq x < 2.5$
38	$2.5 \leq x < 3$
24	$3 \leq x < 3.5$
11	$3.5 \leq x < 4$

14 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.

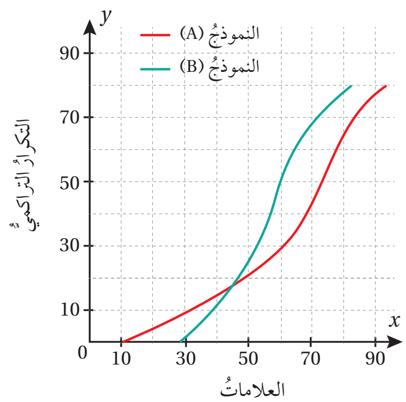
15 أَجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ للبياناتِ.

16 إذا كانَ الطلبةُ الذينَ تزيدُ مُعدَّلاتُهُمُ التراكميةُ على 3.4 قدْ حصلوا على منحةٍ، فكمْ طالبًا في هذهِ العيِّنةِ لمْ يحصلْ على منحةٍ؟

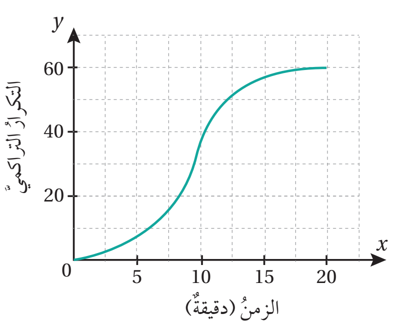
17 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

18 **تبريرٌ**: طلبَ مُعلِّمُ الرياضياتِ إلى طلبةِ الصفِّ العاشرِ الإجابةَ عنْ أسئلةِ اختبارٍ منْ نموذجيْنِ A، وَ B، ثمَّ رسمَ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لنتائجِ الطلبةِ كما في الشكلِ المجاورِ. أيُّ النموذجيْنِ كانَ أصعبَ: A أمْ B؟ أُبرِّرُ إجابتي.



19 **تحدٍّ**: يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للمدَّةِ الزمنيةِ التي استغرقَتْها 60 مكالمةً هاتفيةً أُجريَتْ في أحدِ الأيامِ معَ مُقدِّمِ برنامجٍ حواريٍّ في إحدى المحطاتِ الإذاعيةِ. أستعملُ هذا التمثيلَ لتقديرِ النسبةِ المئويةِ للمكالماتِ التي استغرقَتْ 10 دقائقَ على الأقلِّ.



20 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أجمعُ بياناتي الخاصةَ بـ 30 مشاهدةً، ثمَّ أُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ، ثمَّ أَجِدُ كلًّا منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ لها.

الدرسُ 3

مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ

Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.

مسألةُ اليومِ يعملُ في مصنعٍ للأثاثِ المنزليِّ 20 عاملًا، يتوزَّعونَ وَفقَ الأجرِ الأسبوعيِّ لأقربِ دينارٍ كما في الجدولِ المجاورِ. في أثناءِ زيارةِ مندوبِ وزارةِ العملِ الذي يُتابعُ أحوالَ العمّالِ في المصانعِ، أفادَ المديرُ الماليُّ للمصنعِ بأنَّ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ العاملينَ هوَ 4.72 تقريبًا. كيفَ يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ ما أفادَ بِهِ المديرُ الماليُّ؟

فئاتُ الأجورِ	عددُ العمّالِ
$70 \le x < 75$	6
$75 \le x < 80$	8
$80 \le x < 85$	4
$85 \le x \le 90$	2

تعرَّفْتُ سابقًا مقاييسَ التشتُّتِ التي تصفُ تباعدَ البياناتِ عنْ بعضِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ التباينُ؛ وهوَ الوسطُ الحسابيُّ لمُربَّعاتِ انحرافاتِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ، وقدْ أوجدْتُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

حيثُ:

μ : الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ.

n: عددُ البياناتِ.

تعرَّفْتُ أيضًا الانحرافَ المعياريَّ σ؛ وهوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

لِنُراجِعْ كيفيةَ حسابِ هذيْنِ المقياسيْنِ في المثالِ الآتي.

أتعلّمُ

إذا كانتِ البياناتُ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثِّلُ عينةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما؛ فإنَّ التباينَ يُرمزُ لهُ s^2، ويُعرَّفُ بأنَّهُ:

$$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$$

وفي هذا الدرسِ؛ ستُعامَلُ جميعُ البياناتُ على أنَّها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، وعليهِ فإنَّ التباينَ يُعرَّفُ بالصيغةِ المجاورةِ. ألاحظُ الاختلافَ بينَ الصيغتينِ.

مثال 1

أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ: 4, 7, 1, 3, 0, 3

1 التباينُ σ^2:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الوسطَ الحسابيَّ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ $\mu = \frac{\sum x}{n}$

بالتعويضِ، والتبسيطِ $= \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3$

أتذكَّرُ

مجموعُ انحرافاتِ المشاهداتِ أوِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا.

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، فضلًا عنْ حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

x	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$
4	$4-3=1$	1
7	$7-3=4$	16
1	$1-3=-2$	4
3	$3-3=0$	0
0	$0-3=-3$	9
3	$3-3=0$	0
المجموعُ		30

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القيمَ التي توصَّلْتُ إليْها منَ الجدولِ بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$ صيغةُ التباينِ

$$= \frac{30}{6} = 5$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، التباينُ هوَ 5

2 الانحرافُ المعياريُّ σ:

الانحرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ: $\sigma = \sqrt{5}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ:

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القيمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ قيمِ البياناتِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ على أساسِ أنَّ كلًّا منْها ممثلةٌ بقيمةِ منتصفِ الفئةِ (مركزُ الفئةِ) x.

مفهومٌ أساسيٌّ — **الوسطُ الحسابيُّ والتباينُ للبياناتِ ذاتِ الفئاتِ**

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x: مركزُ الفئةِ. f: التكرارُ المقابلُ للفئةِ

- لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$$

- لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

معلومةٌ

في ما يخصُّ البياناتِ المُنظَّمةَ في الجداولِ ذاتِ الفئاتِ، يكونُ المدى مساويًا لقيمةِ الحدِّ الأعلى الفعليِّ للفئةِ العليا مطروحًا منْها قيمةُ الحدِّ الأدنى الفعليِّ للفئةِ الدنيا.

مثال 2

عددُ الحُفّاظِ	فئاتُ العمرِ
15	6 – 8
10	9 – 11
25	12 – 14

حفظُ القرآنِ الكريمِ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لخمسينَ طالبًا يحفظونَ 5 أجزاءٍ منَ القرآنِ الكريمِ بحسبِ أعمارِهِمْ لأقربِ سنةٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

$(x-\mu)^2 \times f$	$(x-\mu)^2$	$x-\mu$	$x \times f$	x	f	فئاتُ العمرِ
194.4	12.96	−3.6	105	7	15	6 – 8
3.6	0.36	−0.6	100	10	10	9 – 11
144	5.76	2.4	325	13	25	12 – 14
342			**530**		**50**	المجموعُ

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

صيغةُ التباينِ
$$\sigma^2 = \frac{\sum\left((x-\mu)^2 \times f\right)}{\sum f}$$

بالتعويضِ
$$= \frac{342}{50}$$

بالتبسيطِ
$$= 6.84$$

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ:

$$\sigma \approx 2.62$$

أُفكِّرُ

لماذا لا يُشترَطُ في مجموعِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ أنْ يساويَ صفرًا، في حالةِ البياناتِ المُنظَّمةِ في الجدولِ ذي الفئاتِ؟

أتحقق من فهمي

عددُ الأشخاصِ	فئاتُ العمرِ (سنةٌ)
100	$18 \le x < 28$
52	$28 \le x < 38$
26	$38 \le x < 48$
18	$48 \le x < 58$
4	$58 \le x \le 68$

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لـ 200 سائقٍ وفقَ أعمارِهِم، ممن تسبَّبوا في حوادثَ مروريةٍ خطيرةٍ في إحدى المدنِ على مدارِ أسبوعٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

توجدُ صيغةٌ أُخرى لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f}$$

مثال 3: من الحياة

بريدٌ إلكترونيٌّ: دوَّنَتْ سُمَيَّةُ عددَ رسائلِ البريدِ الإلكترونيِّ اليوميةِ التي وصلَتْها في 40 يومًا، ونظَّمَتْ بياناتِها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُقدِّرُ التباينَ لهذهِ البياناتِ.

عددُ الرسائلِ	عددُ الأيامِ
10 – 14	6
15 – 19	5
20 – 24	12
25 – 29	9
30 – 34	8

معلومةٌ

في شهرِ تشرينَ الثاني منْ عامِ 1971م، تمكَّنَ راي توملينسون (مُخترِعُ البريدِ الإلكترونيِّ) منْ إرسالِ أولِ رسالةٍ إلكترونيةٍ.

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلَةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

عددُ الرسائلِ	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
10 – 14	6	12	144	72	864
15 – 19	5	17	289	85	1445
20 – 24	12	22	484	264	5808
25 – 29	9	27	729	243	6561
30 – 34	8	32	1024	256	8192
المجموعُ	**40**			**920**	**22870**

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23$$

الصيغةُ الثانيةُ لحسابِ التباينِ

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\ \mu^2}{\sum f}$$

بالتعويضِ

$$= \frac{22870 - 21160}{40}$$

بالتبسيطِ

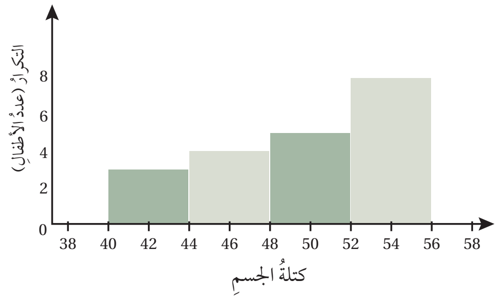
$$\approx 43$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ مسألةَ (حفظُ القرآنِ الكريمِ) التي وردَتْ في المثالِ 2 باستعمالِ الصيغةِ الثانيةِ لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، ثمَّ أُقارِنُ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ التي أتوصَّلُ إليْها بالقيمةِ التي سبقَ حسابُها.

يُمكِنُني أيضًا تقديرُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُمثَّلةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، عنْ طريقِ إعادةِ تنظيمِها في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ.

مثال 4



كتلةُ الجسمِ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لمجموعةِ أطفالٍ منْ سنِّ 10 سنواتٍ وَفقَ كتلِ أجسامِهِمْ مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرامٍ.

أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

1 **التباينُ**: أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ على النحوِ الآتي:

الفئةُ (الكتلةُ x)	f	x	$x \times f$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \times f$
$40 \le x < 44$	3	42	126	-7.6	57.76	173.28
$44 \le x < 48$	4	46	184	-3.6	12.96	51.84
$48 \le x < 52$	5	50	250	0.4	0.16	0.8
$52 \le x \le 56$	8	54	432	4.4	19.36	154.88
المجموعُ	**20**		**992**			**380.8**

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ
$$= \frac{992}{20} = 49.6$$

الصيغةُ الأولى لحسابِ التباينِ
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2 \times f}{\sum f}$$

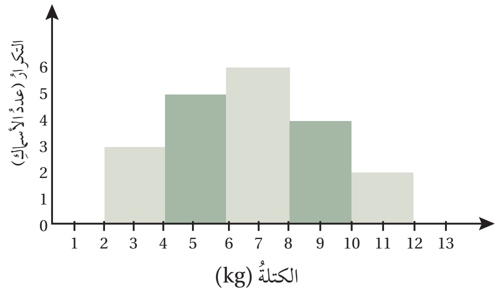
بالتعويضِ، والتبسيطِ
$$= \frac{380.8}{20} = 19.04$$

2 **الانحرافُ المعياريُّ:**

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ: $\sigma \approx 4.36$

يحوي خليجُ العقبةِ ما يزيدُ على 500 نوعٍ منَ الأسماكِ منْ أصلِ 1400 نوعٍ تعيشُ في مياهِ البحرِ الأحمرِ.

أتحقق من فهمي



صيدٌ بحريٌّ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لكتلِ مجموعةٍ منَ الأسماكِ التي اصطادَها أحدُ الصيّادينَ في مدينةِ العقبةِ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

أتدرب وأحل المسائل

طباعةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأربعينَ طالبًا في الصفِّ العاشرِ بحسبِ عددِ الكلماتِ التي يستطيعونَ طباعتَها في جهازِ الحاسوبِ في دقيقةٍ واحدةٍ:

عددُ الطلبةِ	الفئاتُ (عددُ الكلماتِ في الدقيقةِ)
8	26 – 30
12	31 – 35
10	36 – 40
7	41 – 45
3	46 – 50

1 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ.

2 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

شققٌ سكنيةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لِـ 23 شقةً سكنيةً – بحسبِ مِساحاتِها – بنَتْها إحدى شركاتِ الإسكانِ عامَ 2020م:

عددُ الشققِ	الفئاتُ (المِساحةُ m^2)
2	$80 \le x < 100$
5	$100 \le x < 120$
7	$120 \le x < 140$
6	$140 \le x < 160$
3	$160 \le x \le 180$

3 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ.

4 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ بطريقتيْنِ مختلفتيْنِ.

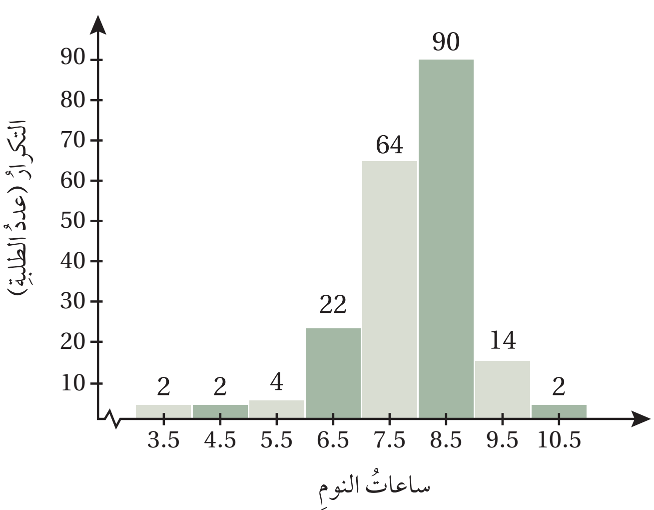
كرةُ سلَّةٍ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعَ اللاعبينَ في فريقيْنِ لكرةِ السلَّةِ وفقَ أطوالِهِمْ بالسنتيمترِ:

فريقُ الأُسودِ	فريقُ النسورِ	الطولُ (x)
2	3	$170 \le x < 178$
3	1	$179 \le x < 187$
3	4	$188 \le x < 196$
2	2	$197 \le x \le 205$

5 أُقدِّرُ التباينَ لأطوالِ اللاعبينَ في كلِّ فريقٍ.

6 أيُّ الفريقيْنِ أكثرُ تجانسًا منْ حيثُ أطوالُ اللاعبينَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

ساعاتُ النومِ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لِـ 200 طالبٍ بحسبِ ساعاتِ نومِهِمْ:

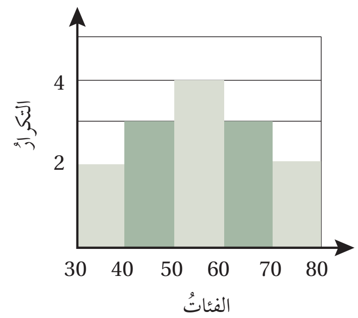


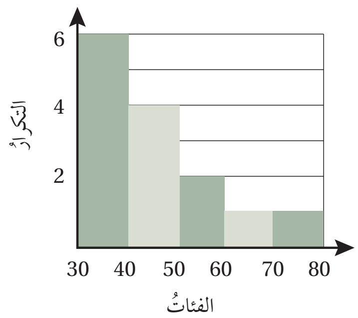
7 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ.

8 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

9 أَصِفُ توزيعَ هذهِ البياناتِ.

10 أُقارِنُ بينَ قيمتَي التباينِ للبياناتِ المُمثَّلةِ في الشكليْنِ الآتيينِ، مُفسِّرًا سببَ الاختلافِ بينَهُما.





11 أحل السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم.

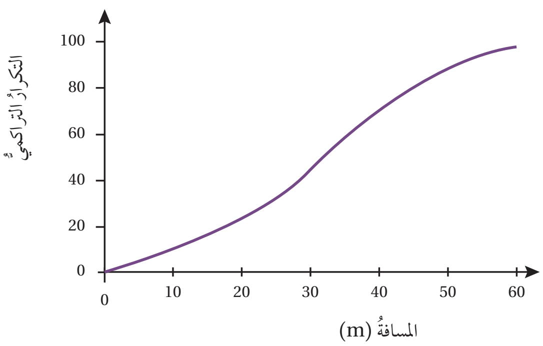
مهارات التفكير العليا

12 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أُنظِّمُ البياناتِ الآتيةَ في جدولٍ تكراريٍّ (أختارُ طولًا مناسبًا للفئات)، ثمَّ أُقدِّرُ قيمتَي الوسطِ الحسابيِّ والتباينِ، مُستعمِلًا آلةً حاسبةً لإيجادِ القيمةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما، ثمَّ أُقارِنُ قيمَهُما الدقيقةَ بالقيمِ التقديريةِ.

11	11	11	11	12	13	14	14	14	15
10	9	12	15	9	10	16	13	11	10
13	13	11	8	9	8	14	13	14	7
10	12	16	16	9	9	10	9	12	15
9	11	10	10	10	6	15	12	11	11

13 **تبريرٌ:** في السؤالِ (12)، ما تأثيرُ أطوالِ فتراتِ الجدولِ التكراريِّ الذي أنشأْتُهُ في القيمةِ التقديريةِ للتباينِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

14 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ تقديرُ التباينِ للبياناتِ المُمثَّلةِ في المنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



الدرسُ 4

احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ
Probability of Mutually Exclusive Events

فكرةُ الدرسِ حسابُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ، وغيرِ المتنافيةِ، ومُتمِّمةِ الحادثِ.

المصطلحاتُ الحادثُ البسيطُ، الحادثُ المُركَّبُ، الحادثانِ المتنافيانِ.

مسألةُ اليومِ استوردَ تاجرٌ شِحْنةً منَ السكَّرِ في باخرتيْنِ. إذا كانَ احتمالُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها 60%، واحتمالُ وصولِ الباخرةِ الثانيةِ في موعدِها 50%، واحتمالُ وصولِهما معًا 30%، فما احتمالُ وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها؟

يُسمّى الحادثُ الواحدُ (مثلُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها) **الحادثَ البسيطَ** (simple event)، أمّا **الحادثُ المُركَّبُ** (compound event) فيتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ أوْ أكثرَ، مثلُ **وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها.**

إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُما يُسمَّيانِ **حادثيْنِ متنافييْنِ** (mutually exclusive)؛ إذا تعذَّرَ وقوعُهُما معًا في الوقتِ نفسِهِ. ويُقصَدُ بالمتنافييْنِ عدمُ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَهُما.

أتعلَّمُ
يُطلَقُ على الحادثيْنِ المتنافييْنِ أيضًا اسمُ الحادثيْنِ المنفصليْنِ.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافييْنِ أمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

1 **التجربةُ هيَ لعبةُ كرةِ القدمِ. الحادثُ الأولُ هوَ الفوزُ في المباراةِ، والحادثُ الثاني هوَ الخسارةُ.**

الحادثانِ متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ الفوزُ والخسارةُ في الوقتِ نفسِهِ.

2 **التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظمٍ. الحادثانِ هما الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ، أوِ الحصولُ على عددٍ أقلَّ منْ 3**

الحادثانِ غيرُ متنافييْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3 في الوقتِ نفسِهِ.

أتذكَّرُ
الحادثانِ (A وَ B) وَ(A أوْ B) كلاهُما مُركَّبٌ؛ لأنَّهُ يتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافيَيْنِ أَمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

a) التجربةُ هيَ سحبُ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًّا منْ سلَّةٍ فيها 5 بطاقاتٍ حمراءَ، وَ3 بطاقاتٍ خضراءَ. الحادثُ الأولُ سحبُ بطاقةٍ حمراءَ، والحادثُ الثاني سحبُ بطاقةٍ خضراءَ.

b) التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظمٍ. الحادثُ الأوّلُ هوَ الحصولُ على عددٍ فرديٍّ والثاني هوَ الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ تقاطعَ حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ يعني وقوعَهُما معًا، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (وَ: and) أوْ الرمزِ (∩)، وأنَّ اتحادَ حادثيْنِ يعني وقوعَ أحدِهما على الأقلِّ، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (أوْ: or) أوْ الرمزِ (∪). فإذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معًا $P(A\cap B)$ يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ $P(A\cup B)$ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما.

مفهومٌ أساسيٌّ

احتمالُ الحادثينِ المتنافيَيْنِ

بالكلماتِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معًا يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A\cap B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

أتعلَّمُ

الحرفُ (P) هوَ اختصارٌ لكلمةِ (Probability) التي تعني الاحتمالَ.

مثال 2

إذا كانَ الحادثانِ Z و Y متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(Y) = 0.3$، و $P(Z) = 0.5$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

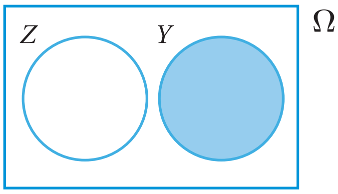
1 $P(Y\cup Z)$

$P(Y\cup Z) = P(Y) + P(Z)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافيين

$P(Y\cup Z) = 0.3 + 0.5$ بالتعويضِ

$=0.8$ بالتبسيطِ

2 $P(Y-Z)$



بمـا أنّ الحادثينِ Z و Y متنافيانِ، فـإنَّ $Y-Z$ يعني وقوعَ الحادثِ Y فقطْ؛ لأنّهما لا يقعانِ معًا، كما يظهرُ في شـكلِ فن المجاورِ. إذنْ:

$$P(Y-Z) = P(Y) = 0.3$$

3 $P(\overline{Y \cup Z})$

$P(\overline{Y \cup Z}) = 1 - P(Y \cup Z)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.8$ بالتعويضِ

$= 0.2$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ الحادثانِ A و B متنافيينِ في تجربةٍ عشـوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = \frac{1}{5}$، و $P(B) = \frac{1}{4}$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(B \cap \overline{A})$ **c)** $P(\overline{A \cup B})$

أحتاجُ في بعضِ المسـائلِ إلى تحديدِ ما إذا كانتْ حـوادثُ معيّنةٌ متنافيةٌ أمْ لا، وذلكَ لإيجادِ احتمالاتٍ مرتبطةٍ بها.

مثال 3

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرّةً واحدةً، أَجِدُ ما يأتي:

1 **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، وظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

أفترضُ أنَّ (A) هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 1، وَ(B) هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ. إذنْ، $A = \{1\}, B = \{2, 4, 6\}$

بمـا أنَّ $\{1\} \cap \{2, 4, 6\} = \phi$، فإنَّ (A) وَ(B) حادثانِ متنافيانِ. إذنْ، احتمالُ وقوعِهما معًا هوَ صفرٌ. وبالرموزِ: $P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$

2 **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، أوْ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

بما أنَّ (A) وَ(B) حادثانِ متنافيانِ، فـإنَّ احتمالَ وقوعِ (A) أوْ (B) (وقوعُ أحدِهما على الأقلِّ) يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما. وبالرموزِ:

$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافييْنِ

$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$ بإيجادِ احتمالاتِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ، والتعويضِ

$= \frac{2}{3}$ بالجمعِ، ثمَّ التبسيطِ

أتذكَّرُ

يعنـي الحـادثُ $Y-Z$ وقوعَ الحـادثِ Y فقطْ، وعدمَ وقوعِ الحادثِ Z، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $Y \cap \overline{Z}$

أتذكَّرُ

احتمـالُ وقـوعِ متممةِ الحـادثِ A هو 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

أتذكَّرُ

لأيِّ تجربـةٍ عشـوائيةٍ، احتمالُ وقـوعِ الحادثِ البسـيطِ E يساوي عددَ عناصـرِ هـذا الحادثِ $n(E)$ مقسـومًا علـى عددِ عناصرِ فضاءِ العيِّنةِ $n(\Omega)$؛ أيْ:

$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

أتذكَّرُ

لأيِّ حادثٍ (A) في فضـاءِ العيِّنةِ لتجربةٍ عشوائيةٍ ما Ω، فإنَّ:

$0 \le P(A) \le 1$

أتحقق من فهمي

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منْ بينِ الأعدادِ: 8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1، أَجِدُ:

a) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4

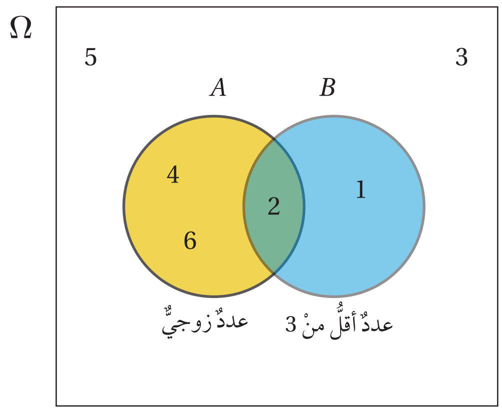
b) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 4

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ Ω للدلالةِ على فضاءِ العيِّنةِ للتجربةِ العشوائيةِ، ويُقرَأُ: أوميجا.

لاحظْتُ في المثالِ 1 أنَّ حادثَي الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ أوْ عددٍ أقلَّ منْ 3 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ هما غيرُ متنافيَيْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3، فكيفَ أَجِدُ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ؟

إذا كانَ (A) حادثَ الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ، وَ(B) حادثَ الحصولِ على عددٍ أقلَّ منْ 3، في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ هذيْنِ الحادثيْنِ باستعمالِ أشكالِ فنْ كما يأتي:



عندَ حسابِ احتمالِ كلِّ حادثٍ على حِدَةٍ، أَجِدُ أنَّ:

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

عندَ إيجادِ احتمالِ وقوعِ أحدِ الحادثيْنِ على الأقلِّ، وجمعِ هذيْنِ الاحتماليْنِ، فإنَّ احتمالَ العددِ 2 سيتكرَّرُ؛ لأنَّهُ موجودٌ في الحادثيْنِ (موجودٌ في منطقةِ التقاطعِ بينَ الحادثيْنِ)، ولذلكَ يجبُ طرحُهُ منْ مجموعِ الاحتماليْنِ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمالُ الحادثينِ غيرِ المتنافيينِ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلماتِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْهِما مطروحًا منْهُ احتمالَ وقوعِ (A) وَ(B) معًا.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 4

يحتوي صندوقٌ على 15 بطاقةً مُرقَّمةً منْ 1 إلى 15، إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، فأَجِدُ احتمالَ الحادثيْنِ الآتييْنِ:

1 أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، ومنْ عواملِ العددِ 12

أفترضُ أنَّ (M) هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، وَ(F) هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ عواملِ العددِ 12.

إذنْ $M = \{3, 6, 9, 12, 15\}, F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

أداةُ الوصلِ (وَ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ تقاطعُ الحادثيْنِ (M) وَ(F).

إذن $M \cap F = \{3, 6, 12\}$

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F)$$
$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2 أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، أوْ منْ عواملِ العددِ 12

أداةُ الوصلِ (أوْ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثيْنِ غيرِ المتنافييْنِ (M) وَ(F) اللذيْنِ سُمِّيا في الفرعِ السابقِ. وهذا يعني احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ (احتمالُ اتحادِهِما):

$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$
$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

أتحقق من فهمي

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منَ المجموعةِ: { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }، أَجِدُ:

a) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ومنْ عواملِ العددِ 10

b) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ منْ عواملِ العددِ 10

مثال 5

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.75$, $P(A \cup B) = 0.85$، فأجِدُ كلًّا ممّا ياتي:

1 $P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثينِ غيرِ متنافيينِ

$0.85 = 0.65 + 0.75 - P(A \cap B)$ بالتعويضِ

$0.85 = 1.4 - P(A \cap B)$ بالتبسيطِ

$P(A \cap B) = 0.55$ بحلّ المعادلةِ

2 $P(\bar{A})$

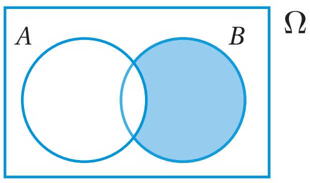
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.65$ بالتعويضِ

$= 0.35$ بالتبسيطِ

3 $P(\bar{A} \cap B)$

إنَّ $\bar{A} \cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ B فقطْ، وعدمَ وقوعِ الحادثِ A كما يظهرُ في شكلِ فن المجاورِ، ولإيجادِ احتمالِهِ أطرحُ احتمالَ تقاطعِ الحادثينِ A و B منِ احتمالِ الحادثِ B، إذنْ:



$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ احتمالُ وقوعِ الحادثِ B فقطْ

$= 0.75 - 0.55$ بالتعويضِ

$= 0.2$ بالتبسيطِ

4 $P(\bar{A} \cup B)$

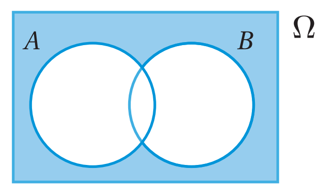
$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتِّحادِ حادثينِ غيرِ متنافيينِ

$= 0.35 + 0.75 - 0.2$ بالتعويضِ

$= 0.9$ بالتبسيطِ

5 $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

إنَّ $\overline{A} \cap \overline{B}$ يعني متممةَ اتّحادِ الحادثينِ A و B كما يظهرُ في شكلِ فن المجاورِ، إذنْ:



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$ احتمالُ تقاطعِ متممةِ حادثينِ

$= 1 - P(A \cup B)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.85$ بالتعويضِ

$= 0.15$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، وكان $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3,$ $P(A \cap B) = 0.2$، فأجِدْ كلًّا ممّا ياتي:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A-B)$

d) $P(A \cup \overline{B})$ e) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافيَيْنِ أمْ لا لكلِّ تجربةٍ عشوائيةٍ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

1 ظهورُ العددِ 3، أوْ ظهورُ عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

2 ظهورُ أحدِ عواملِ العددِ 12، أوْ ظهورُ عددٍ أوليٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

3 ظهورُ عددَيْنِ مجموعُهُما 8 أوْ 12 عندَ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

في تجربةِ اختيارِ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًّا منْ 20 بطاقةً مُتماثِلةً، كُتِبَ على كلٍّ منْها عددٌ منْ 1 إلى 20، أَجِدُ:

4 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 5

5 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 5

6 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4

7 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، أوْ يقبلُ القسمةَ على 4

إذا كانَ الحادثانِ A و B حادثَيْنِ متنافيينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.4$، و $P(Z) = 0.25$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

8 $P(A \cap B)$ 9 $P(A \cup B)$ 10 $P(\overline{A \cup B})$ 11 $P(A-B)$

مجموعةٌ منَ الكراتِ المُتماثِلةِ، مُرقَّمةٌ منْ 1 إلى 21، وموضوعةٌ داخلَ صندوقٍ.
إذا اختيرَتْ كرةٌ منَ الصندوقِ عشوائيًّا، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

12 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا.

13 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا منْ مضاعفاتِ العددِ 3

14 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 3

15 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.15$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

16 $P(A \cup B)$ 17 $P(\bar{A})$ 18 $P(B - A)$ 19 $P(A \cup \bar{B})$ 20 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

رياضةٌ: سُئِلَ 60 رياضيًّا إذا كانوا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ أوْ كرةِ السلَّةِ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في الجدولِ الآتي:

	عدمُ ممارسةِ أيٍّ منَ اللعبتيْنِ	كرةُ السلَّةِ فقطْ	كرةُ القدمِ فقطْ	كرةُ القدمِ، وكرةُ السلَّةِ
عددُ الرياضيينَ	10	8	30	12

إذا اختيرَ رياضيٌّ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

21 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبتَيْ كرةِ القدمِ وكرةِ السلَّةِ.

22 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ.

23 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

24 احتمالِ أنْ يكونَ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلَّةِ.

25 تجارةٌ: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

تَحَدٍّ: إذا كانَ R و S حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(R) = P(S) = 3P(R \cap S), P(R \cup S) = 0.75$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

26 $P(R \cap S)$ 27 $P(R)$ 28 $P(\bar{S})$ 29 $P(\bar{R} \cap \bar{S})$

30 تبريرٌ: قالَ هاني: إنَّ احتمالَ فوزِ فريقِهِ المُفضَّلِ هوَ 0.3، فردَّ عليْهِ يزيدُ قائلًا: إذنْ، احتمالُ خسارةِ الفريقِ هوَ 0.7، هلْ قولُ يزيدَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

31 مسألةٌ مفتوحةٌ: أَصِفُ موقفيْنِ منْ حياتي اليوميةِ، أحدُهُما يتضمَّنُ حادثيْنِ متنافييْنِ، والآخرُ يتضمَّنُ حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ، مُبيِّنًا كيفَ حدَّدْتُ ذلكَ.

الدرسُ 5

احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ

Probability of Independent and Dependent Events

فكرةُ الدرسِ تمييزُ الحوادثِ المستقلةِ منَ الحوادثِ غيرِ المستقلةِ، وحسابُ احتمالاتِها.

المصطلحاتُ الحوادثُ المستقلةُ، الحوادثُ غيرُ المستقلةِ، الاحتمالُ المشروطُ، جداولُ الاتجاهينِ.

مسألةُ اليومِ تحتوي السنةُ على 365 يومًا؛ لذا، فإنَّ احتمالَ أنْ يكونَ الأولُ منْ شهرِ أيلولَ يومَ ميلادِ شخصٍ هوَ $\frac{1}{365}$ تقريبًا. إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ يومُ ميلادِ كليهما الأولِ منْ شهرِ أيلولَ؟

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ (A) وَ (B) **مستقليْنِ** (independent) إذا كانَ وقوعُ أحدِهما (أوْ عدمُ وقوعِهِ) لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ (أوْ عدمِ وقوعِ) الآخرِ.

احتمالُ الحادثينِ المستقلّينِ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلماتِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ مستقليْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معًا هوَ حاصلُ ضربِ احتمالِ وقوعِ كلٍّ منْهُما.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ مستقليْنِ، فإنَّ:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أتعلَّمُ
تُستعمَلُ عمليةُ الضربِ عندَ حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ التي تقعُ تباعًا. يُمكِنُ تعميمُ قانونِ حسابِ احتمالِ وقوعِ حادثيْنِ مستقليْنِ معًا لأكثرَ منْ حادثيْنِ مستقليْنِ.

مثال 1

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ وقطعةِ نقدٍ منتظميْنِ عشوائيًّا معًا مرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ والصورةِ على قطعةِ النقدِ.

أفترضُ أنَّ (A) هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ، وَ(B) هوَ حادثُ ظهورِ الصورةِ على قطعةِ النقدِ. ألاحِظُ أنَّ وقوعَ الحادثِ (A) أوْ عدمَ وقوعِهِ لا يُؤثِّرُ في وقوعِ الحادثِ (B) أوْ عدمِ وقوعِهِ. إذنْ، (A) وَ (B) حادثانِ مستقلانِ، وإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

أتحقق من فهمي

في تجربةِ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظمينِ عشـــوائيًّا معًا مــرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ على حجرِ النردِ الأولِ وعددٍ أكبرَ منْ 4 على حجرِ النردِ الثاني.

لأيِّ تجربةٍ عشـــوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ (A) وَ (B) **غيرَ مستقلَّيْنِ** (dependent) إذا أثَّرَ وقوعُ أحدِهِما في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.

مثال 2

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلَّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:

1 **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ مختلفةُ الألوانِ، علمًا بأنَّ سحبَ الكرةِ الثانيةِ كانَ بعدَ إرجاعِ الكرةِ الأولى إلى الكيسِ.**

إرجاعُ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني أنَّهُ يُمكِنُ إعادةُ سحبِها، أوْ سحبُ غيرِها، فتكونُ فرصُ ســحبِها وغيرِها منَ الكراتِ متكافئةً؛ أيْ إنَّ نتيجةَ سحبِها لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ سحبِ أيِّ كرةٍ أُخرى؛ فالحادثانِ مستقلانِ.

2 **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، وعدمُ إرجاعِ أيٍّ منْهُما إلى الكيسِ.**

عدمُ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني نقصَ عددِ الكراتِ المُتبقِّيةِ فيهِ، وهذا يعني أنَّ احتمالَ سحبِ الكرةِ الثانيةِ سيتأثَّرُ بنتيجةِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا؛ فالحادثانِ غيرُ مستقلَّيْنِ.

3 **سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ، ثمَّ سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ آخرَ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ.**

نتيجةُ ســحبِ الكرةِ منَ الكيسِ الأولِ لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ ســحبِ كرةٍ منَ الكيسِ الثاني؛ فالحادثانِ مستقلانِ.

يُســتعملُ علمُ الاحتمالاتِ فــي الــذكاءِ الاصطناعيِّ، وهــي الأنظمــةُ أو الأجهزةُ التي تحاكي الذكاءَ البشــريَّ ويمكنُها أنْ تطوّرَ منْ قدراتِها ذاتيًّا استنادًا إلى المعلوماتِ التي تجمعُها.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلَّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:

a) اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ عشوائيًّا وأكلُها، ثمَّ اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ أُخرى عشوائيًّا منْ كيسٍ يحوي 10 قطعِ حلوى حمراءَ وَ25 قطعةَ حلوى زرقاءَ، جميعُها مُتماثِلةٌ.

b) ظهورُ العددِ 5 على حجرَيْ نردٍ أُلقِيا معًا مرَّةً واحدةً عشوائيًّا.

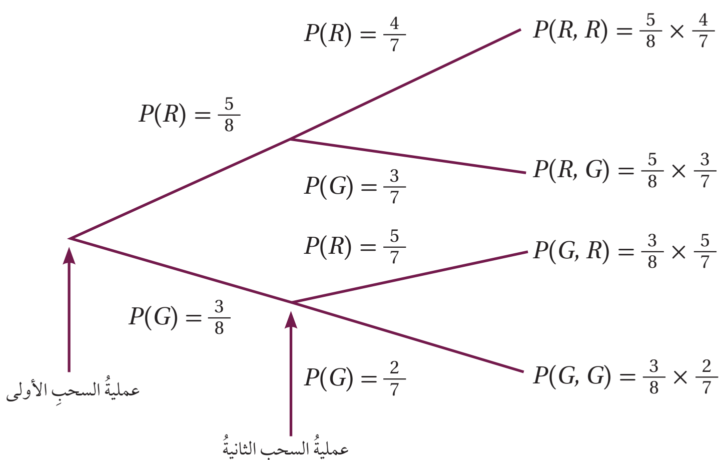
c) ســحبُ كرةٍ حمراءَ عشــوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، 4 منْها حمــراءَ وَ 3 صفراءَ، ثمَّ إعادتُها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبُ كرةٍ حمراءَ أُخرى عشوائيًّا.

يساعدُ استعمالُ الشجرةِ الاحتماليةِ على حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ المستقلةِ وغيرِ المستقلةِ.

مثال 3

يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ (R)، وَ 3 كراتٍ خضراءَ (G)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها منْ دونِ إرجاعِها إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ التاليةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ بالشجرةِ الاحتماليةِ الآتي كيفَ تتأثَّرُ عمليةُ السحبِ الثانيةُ بنتيجةِ عمليةِ السحبِ الأولى عندَ عدمِ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ:



1 **سحبُ كرتيْنِ خضراويْنِ.**

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

بعدَ عمليةِ السحبِ الأولى يقلُّ عددُ الكراتِ في الكيسِ بمقدارِ كرةٍ خضراءَ

2 **سحبُ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ.**

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالةٍ واحدةٍ فقطْ منَ الحالاتِ الأربعِ التي تظهرُ في الشجرةِ الاحتماليةِ

3 **سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.**

$$P(R \cap G) + P(G \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالتيْنِ، هما: الكرةُ الأولى حمراءُ، والثانيةُ خضراءُ، أوِ الكرةُ الأولى خضراءُ، والثانيةُ حمراءُ

> **لغةُ الرياضياتِ**
>
> العباراتُ الآتيةُ متكافئةٌ:
> - سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.
> - سحبُ كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.
> - سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما حمراءُ، والأُخرى خضراءُ.
> - سحبُ كرةٍ منْ كلِّ لونٍ.

أتحقق من فهمي

يحتوي كيسٌ على 6 قطعِ حلوى حمراءَ (R)، وَ 8 قطعِ حلوى خضراءَ (G)، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ قطعةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ قطعةً أُخرى عشوائيًّا ليأكلَها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتمالية:

a) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مُتماثِلتَي اللونِ.

b) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مختلفتَي اللونِ.

أُلاحِظُ في المثالِ السابقِ أنَّ احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ يساوي احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى مضروبًا في احتمالِ سحبِ كرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّ كرةً خضراءَ سُحِبَتْ في المرَّةِ الأولى.

مفهومٌ أساسيٌّ

احتمالُ الحادثينِ غيرِ المستقلّينِ

بالكلماتِ: احتمالُ وقوعِ حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ معًا يساوي احتمالَ وقوعِ الحادثِ الأولِ مضروبًا في احتمالِ وقوعِ الحادثِ الثاني بعدَ وقوعِ الحادثِ الأولِ.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ مستقليْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

يُقرَأُ الرمزُ $P(B \mid A)$: احتمالُ وقوعِ الحادثِ (B) شرطَ وقوعِ الحادثِ (A)؛ لذا يُسمّى **الاحتمالَ المشروطَ** (conditional probability)، ويُمكِنُ إيجادُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0$$

مثال 4

أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟

في هذهِ التجربةِ العشوائيةِ، فضاءُ العيِّنةِ هوَ: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كانَ (A) هوَ حادثَ ظهورِ العددِ 6، وَ(B) هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ، فإنَّ:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$

$P(A \mid B)$ تعني احتمالَ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا:

الاحتمالُ المشروطُ $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بالتبسيطِ $$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

أتحقق من فهمي

أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟

في كثيرٍ منَ الأحيانِ، تعرضُ البياناتُ لفئتيْنِ منَ الأشياءِ باستعمالِ ما يُسمّى **جداولَ الاتجاهيْنِ** (two–ways tables)، وهيَ جداولُ تتيحُ إيجادَ الاحتمالِ المشروطِ على نحوٍ سهلٍ.

مثال 5: من الحياة

تدويرٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ كتلَ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ بالأطنانِ في يوميْنِ منْ إحدى المدنِ. إذا سُحِبَتْ عيِّنَةٌ عشوائيةٌ منْها قبلَ البدءِ بإعادةِ تدويرِها، فما احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنَةُ ورقيةً، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ؟

	غيرُ ورقيةٍ	ورقيةٌ
السبتُ	94	7
الأحدُ	121	8

تُسهِمُ عمليةُ تدويرِ النُّفاياتِ في المحافظةِ على البيئةِ بصورةٍ كبيرةٍ. فمثلًا، إعادةُ تدويرِ طنٍّ واحدٍ منَ الورقِ قدْ تحولُ دونَ قطعِ 17 شجرةً.

إذا كانَ (A) هوَ حادثَ سحبِ عيِّنَةٍ منَ الورقِ، وَ(B) هوَ حادثَ سحبِ عيِّنَةٍ أُخرى جُمِعَتْ يومَ الأحدِ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟

	المجموعُ	غيرُ ورقيةٍ	ورقيةٌ
السبتُ	101	94	7
الأحدُ	129	121	8
المجموعُ	230	215	15

الخطوةُ 1: أُكمِلُ جدولَ الاتجاهيْنِ بإيجادِ المجاميعِ.

الخطوةُ 2: أجِدُ احتمالاتِ الحوادثِ اللازمةِ لحسابِ الاحتمالِ المشروطِ.

بالنظرِ إلى جدولِ الاتجاهيْنِ، أَجِدُ كلًّا منْ: $P(A)$، وَ $P(B)$، وَ $P(A \cap B)$:

كتلةُ الورقِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 15 طنًّا، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $$P(A) = \frac{15}{230}$$

كتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 129 طنًّا، وكتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $$P(B) = \frac{129}{230}$$

كتلةُ النُّفاياتِ الورقيةِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 8 أطنانٍ، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ 230 طنًّا

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ قيمَ الاحتمالاتِ بصيغةِ الاحتمالِ المشروطِ.

صيغةُ الاحتمالِ المشروطِ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

إذنْ، احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنةُ ورقيةً، وأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ هوَ $\frac{8}{129}$

أتحقق من فهمي

إذا سُحِبَتْ عيِّنةٌ عشوائيةٌ، فما احتمالُ أنْ تكونَ غيرَ ورقيةٍ، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ السبتِ؟

ملحوظةٌ

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ الاحتمالِ المشروطِ بسهولةٍ منْ جدولِ الاتجاهيْنِ مباشرةً.

مُلخَّصُ المفاهيمِ

نوعُ الحوادثِ	الوصفُ	القانونُ
المتنافيانِ	لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ.	$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
غيرُ المتنافييْنِ	يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
المُتتامّانِ	لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ، واتحادُهُما معًا يُمثِّلُ فضاءَ العيِّنةِ.	$P(A) + P(\bar{A}) = 1$
المستقلانِ	وقوعُ أحدِهِما لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
غيرُ المستقليْنِ	وقوعُ أحدِهِما يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$
المشروطةُ	وجودُ معلومةٍ إضافيةٍ عنْ وقوعِ أحدِهِما.	$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

أتدرب وأحل المسائل

كراتٌ زجاجيةٌ: يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ (R)، وَ3 كراتٍ خضراءَ (G)، وكرتيْنِ صفراويْنِ (Y)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها، ثمَّ أُعيدَتْ إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها:

1 ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ الأولى حمراءَ والثانيةُ صفراءَ؟

2 ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرتانِ خضراويْنِ؟

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقليْنِ أوْ غيرَ مستقليْنِ في كلٍّ منَ التجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ:

3 سحبُ كرةٍ زرقاءَ عشوائيًّا منْ صندوقٍ، والحصولُ على العددِ 5 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

4 اختيارُ طالبٍ منْ مواليدِ شهرِ 10 عشوائيًّا ليخرجَ منْ غرفةِ الصفِّ، ثمَّ اختيارُ طالبٍ آخرَ عشوائيًّا منْ مواليدِ شهرِ 5 ليلحقَ بهِ.

5 الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، وعددٍ يقبلُ القسمةَ على 2 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ آخرَ منتظمٍ.

6 إصابةُ صيّاديْنِ الهدفَ الثابتَ الذي أَطلقَ كلٌّ منْهُما طلقةً واحدةً نحوَهُ عشوائيًّا.

7 سحبُ بطاقةٍ عشوائيًّا تحملُ العددَ 6 منْ مجموعةِ بطاقاتٍ مُتماثِلةٍ تحملُ الأرقامَ منْ 1 إلى 10، ثمَّ إعادتُها، ثمَّ سحبُ بطاقةٍ أُخرى عشوائيًّا تحملُ عددًا زوجيًّا.

أقلامُ حبرٍ: في علبةٍ قلما حبرٍ أحمرَ، وثلاثةُ أقلامِ حبرٍ أزرقَ، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ سالمٌ منْها قلميْنِ عشوائيًّا على التوالي منْ دونِ إرجاعٍ. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:

8 اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أحمرَ.

9 اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أزرقَ.

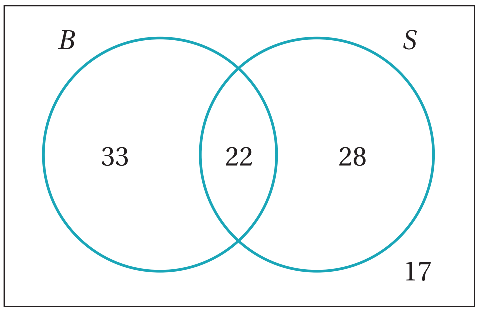
10 اختيارُ قلمِ حبرٍ منْ كلِّ لونٍ.

اختباراتٌ: تقدَّمَ سامي لاختبارينِ في الرياضياتِ، وكانَ احتمالُ نجاحِهِ في الأوّلِ 75%، واحتمالُ نجاحِهِ في الثاني إذا نجحَ في الأوّلِ 80%، واحتمالُ رسوبِهِ في الثاني إذا رسبَ في الأوّلِ 60%، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

11 احتمالُ نجاحِ سامي في كلا الاختبارينِ.

12 احتمالُ نجاحِ سامي في أحدِ الاختبارينِ، ورسوبِهِ في الآخرِ.

سُئِلَ 100 شخصٍ عنْ وجودِ أخٍ لهُمْ أوْ أختٍ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في شكلِ فِنْ المجاورِ، حيثُ:



B: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أخٌ.

S: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أختٌ.

إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

13 أنْ يكونَ لهُ أخٌ؟

14 أنْ يكونَ لهُ أخٌ، علمًا بأنَّ لهُ أختًا؟

15 أنْ يكونَ لهُ أختٌ، علمًا بأنَّ لهُ أخًا؟

وظائفُ: **يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ أعدادَ المُتقدِّمينَ لوظيفةٍ في إحدى الشركاتِ، ومُؤهِّلاتِهِمُ العلميةَ، وخبراتِهِمُ السابقةَ.**
إذا اختيرَ أحدُ المُتقدِّمينَ للوظيفةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

		لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ	
		لا	نعمْ
لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ	نعمْ	27	54
	لا	4	5

16 أنْ يكونَ لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ شهادةً جامعيةً؟

17 ألّا يكونَ لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ خبرةً سابقةً؟

إشاراتُ مرورٍ: **تمرُّ غادةُ في رحلةِ عودتِها منَ العملِ بشارعٍ رئيسٍ عليْهِ إشارتانِ ضوئيتانِ. إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الإشارةَ الأولى، وتجتازَها وهيَ مضاءةٌ باللونِ الأخضرِ G هوَ 0.3، وإذا كانَتْ مضاءةً بالأحمرِ R، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.8، أمّا إذا كانَتِ الإشارةُ الأولى مضاءةً بالأخضرِ، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.4**

أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ كلٍّ منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

18 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأحمرِ.

19 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأخضرِ.

20 احتمالُ وصولِها إحدى الإشارتيْنِ وهيَ مضاءةٌ بالأخضرِ، ووصولِها الإشارةَ الأُخرى وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ.

أرصادٌ جويةٌ: أفادَتْ مذيعةُ النشرةِ الجويةِ أنَّ احتمالَ تساقطِ الثلوجِ يومَ الإثنينِ هيَ 25%، وأنَّها ترتفعُ إلى 90% يومَ الثلاثاءِ. أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ احتمالِ:

21 تساقطِ الثلوجِ يومَ الثلاثاءِ، وعدمِ تساقطِها يومَ الإثنينِ.

22 عدمِ تساقطِ الثلوجِ في كلا اليوميْنِ.

23 تساقطِ الثلوجِ في أحدِ اليوميْنِ على الأقلِّ.

صيدٌ: أطلقَ صيّادٌ طلقةً واحدةً على هدفٍ ثابتٍ، وأطلقَ آخرُ طلقةً واحدةً على الهدفِ نفسِهِ. إذا كان احتمالُ إصابةِ الأولِ للهدفِ 70%، واحتمالُ إصابةِ الثاني للهدفِ 60%، فأَجِدُ احتمالَ:

24 إصابةِ كلا الصيّاديْنِ الهدفَ.

25 عدمِ إصابتِهِما الهدفَ.

26 إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ أصابَ الهدفَ.

27 عدمِ إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ لمْ يُصِبِ الهدفَ.

28 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ.

مهارات التفكير العليا

29 **تبريرٌ:** إذا كانَ (A) وَ (B)حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

30 **تبريرٌ:** قالَتْ تماضرُ: إنَّهُ لأيِّ حادثيْنِ (A) وَ (B) في فضاءِ العيِّنةِ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)$$

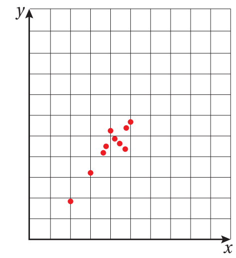
هلْ قولُ تماضرَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

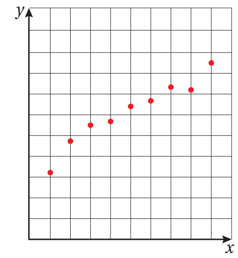
31 **تحدٍّ:** يحتوي كيسٌ على n منَ الكراتِ المُتماثِلةِ مختلفةِ الألوانِ. إذا كانَ احتمالُ سحبِ كرةٍ حمراءَ ثمَّ سحبِ كرةٍ خضراءَ منْ دونِ إرجاعٍ 2.4% تقريبًا، فما قيمةُ n؟

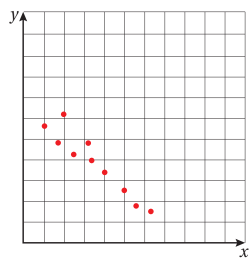
32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أذكرُ مثالًا على حادثيْنِ مستقليْنِ، ومثالًا آخرَ على حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ، مُبيِّنًا كيفَ أَجِدُ احتمالَ وقوعِ الحادثيْنِ معًا في كلِّ مثالٍ.

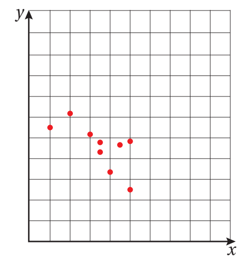
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 شكلُ الانتشـارِ الذي يُظهِرُ الارتباطَ الموجبَ الأقوى بينَ (x) وَ (y) هوَ:

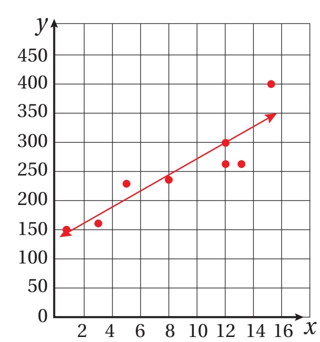
a) 

b) 

c) 

d) 

2 باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً في الشكلِ الآتي، تقديرُ قيمةِ y عندما $x = 7$ هوَ:



a) 150 b) 175

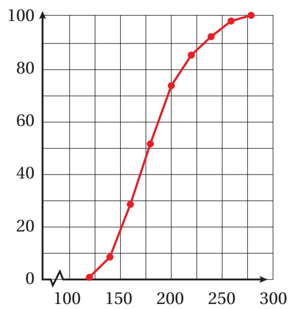
c) 200 d) 225

3 قيمـةُ المدى الربيعيِّ للقيمِ: 11 ، 5 ، 10 ، 8 ، 7 ، 10 ، 15 ، 12 ، 13 ، 9 ، 6 ، 7 ، 4 هيَ:

a) 5 b) 6

c) 9 d) 11

4 **رسائلُ بريديةٌ:** يُبيِّنُ الشـكلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكتلةِ 100 رسالةٍ (بالغرامِ) مُسجَّلةٍ لدى أحدِ مكاتبِ البريدِ. قيمةُ الربيعِ الأعلى لكتلِ الرسائلِ هيَ:



a) 160 b) 200

c) 210 d) 230

5 في الجدولِ الآتي، إذا كانَ مجموعُ مُربَّعاتِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ في التكرارِ المقابلِ لها هوَ 324، فإنَّ قيمةَ التباينِ هيَ:

الفئاتُ	التكرارُ
$5 \le x < 10$	7
$10 \le x < 15$	12
$15 \le x < 20$	6

a) 13.50 b) 12.96

c) 3.67 d) 3.60

6 **حجرا نردٍ:** أُلقِيَ حجرا نـردٍ منتظمانِ، أحدُهُما أحمرُ، والآخرُ أزرقُ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. احتمالُ ظهورِ عددٍ أوليٍّ على حجرِ النردِ الأحمـرِ، وعددٍ أقلَّ منْ 3 على حجرِ النردِ الأزرقِ هوَ:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$

c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3,$ $P(B) = 0.6,\ P(A \cap B) = 0.1$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

13 $P(A)$

13 $P(A \cup B)$

13 $P(A \cup B)$

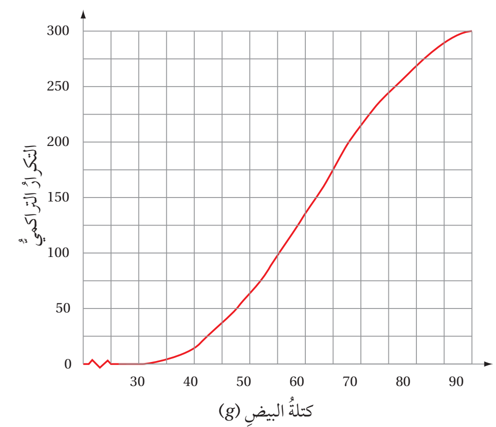
13 $P(B - A)$

13 $P(A \cup B)$

زراعةٌ: دوّنَ مهندسٌ زراعيٌّ كتلةَ 300 بيضةٍ بالغرامِ كما في الجدولِ الآتي:

التكرارُ	كتلةُ البيضةِ (x)
15	$30 < x \leq 40$
48	$40 < x \leq 50$
72	$50 < x \leq 60$
81	$60 < x \leq 70$
54	$70 < x \leq 80$
30	$80 < x \leq 90$

يُبيِّنُ التمثيلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لهذا الجدولِ:



أستعملُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لإيجادِ:

8 قيمةِ الوسيطِ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

9 قيمةِ المدى الربيعيِّ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

10 قيمةِ المئينِ 80 لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

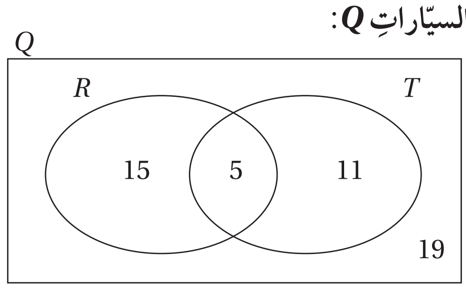
11 عددِ البيضِ الذي تزيدُ كتلتُهُ على 65g

12 يُمثِّلُ الجدولُ الآتي كميةَ الأمطارِ في إحدى مناطقِ المملكةِ على مدارِ 20 عامًا لأقربِ ملّيمترٍ:

عددُ السنواتِ	كميةُ الأمطارِ
2	$199 \leq x < 249$
3	$249 \leq x < 299$
6	$299 \leq x < 349$
3	$349 \leq x < 399$
4	$399 \leq x < 449$
2	$449 \leq x \leq 499$

أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكميةِ الأمطارِ.

سيّاراتٌ: يُبيِّنُ شكلُ فنْ الآتي عددَ السيّاراتِ الحمراءِ R، وعددَ السيّاراتِ ذاتِ البابيْنِ T، وعددَ سيّاراتٍ أُخرى في أحدِ مواقفِ السيّاراتِ Q:



إذا اختيرَتْ سيّارةٌ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

13 أنْ تكونَ حمراءَ، وذاتَ بابيْنِ؟

14 ألّا تكونَ حمراءَ، ولها بابانِ؟

15 إذا اختيرَتْ سيّارةٌ، وكانَتْ ذاتَ بابيْنِ، فما احتمالُ ألّا تكونَ حمراءَ؟

16 إذا اختيرَتْ سيّارتانِ، الواحدةُ تلوَ الأُخرى عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ لونُهُما أحمرَ؟

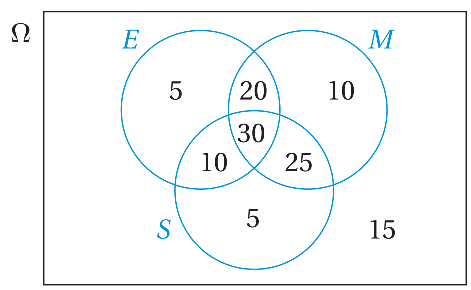
كراتٌ ملونةٌ: يحتوي كيسٌ على كرتيْنِ سوداويْنِ، وكرةٍ بيضاءَ. إذا كانَتْ جميعُ الكراتِ مُتماثِلةً، وسحبَ مصعبٌ كرةً عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، ثمَّ أعادَها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبَ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، فأستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

17 الكرتانِ المسحوبتانِ بيضاوانِ.

18 الكرتانِ المسحوبتانِ مختلفتا اللونِ.

19 إحدى الكرتيْنِ المسحوبتيْنِ على الأقلِّ لونُها أسودُ.

تقدَّمَ 120 طالبًا لاختباراتٍ في اللغةِ الإنجليزيةِ (E)، والرياضياتِ (M)، والعلومِ (S)، وقدْ توزَّعوا وَفقَ نجاحِهِمْ في هذهِ الاختباراتِ كما في شكلِ فِنْ الآتي:



إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الطلبةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

20 أنْ يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟

21 أنْ يكونَ ناجحًا في اللغةِ الإنجليزيةِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟

22 ألّا يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ليسَ ناجحًا في الرياضياتِ؟

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

لونُ العينيْنِ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي احتمالَ أنْ يكونَ الشخصُ في مجتمعٍ ما ذا عينيْنِ زرقاويْنِ، أوْ بُنِّيتيْنِ، أوْ خضراويْنِ:

لونُ العينيْنِ	زرقاوانِ	بُنِّيتانِ	خضراوانِ
الاحتمالُ	0.4	0.5	0.1

إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

23 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما زرقاويْنِ؟

24 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما مختلفتَيِ اللونِ؟

أقلامٌ ملونةٌ: يحتوي صندوقٌ على 3 أقلامٍ حمراءَ R، وقلميْنِ زرقاويْنِ B، وَ4 أقلامٍ خضراءَ G. اختارَتْ شيماءُ قلميْنِ عشوائيًّا منَ الصندوقِ على التوالي، ومنْ دونِ إرجاعٍ. ما احتمالُ:

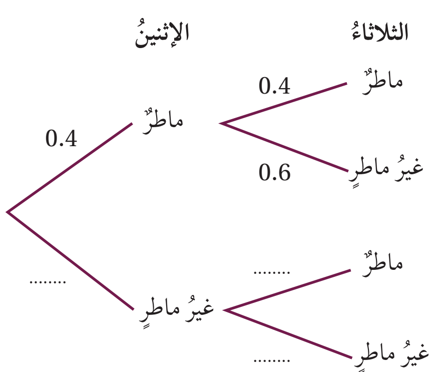
25 أنْ يكونَ لونُ القلميْنِ أحمرَ؟

26 أنْ يكونَ للقلميْنِ اللونُ نفسُهُ؟

27 أنْ يكونَ لونُ أحدِ القلميْنِ فقطْ أخضرَ؟

أمطارٌ: إذا نزلَ المطرُ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ 0.4، وإذا لمْ ينزلِ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ 0.2. نزلَ المطرُ يومَ الأحدِ:

28 أُكمِلُ الفراغَ في الشكلِ الآتي:



29 أَجِدُ احتمالَ نزولِ المطرِ في يومٍ واحدٍ على الأقلِّ منَ اليوميْنِ الوارديْنِ في الشكلِ.